应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 04-0393-05

M. Wadati 可积非线性发展方程的精确行波解[*]

李继彬[1,2]

(1. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093;
2. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 用平面动力系统方法研究由 M. Wadati 提出的一类可积非线性发展方程的精确行波解, 获得了该方程的扭波、反扭波解, 周期波解和不可数无穷多光滑孤立波解的精确的参数表达式, 以及上述解存在的参数条件.

关 键 词: 孤立波解; 扭波解; 反扭波解; 周期波解; 非线性发展方程
中图分类号: O357.1 文献标识码: A

引 言

1980 年, Miki Wadati 等人[1]研究了以下的可积非线性发展方程:

$$q_t - 2(1/\sqrt{1+q})_{xxx} = 0. \tag{1}$$

他们发现通过变换 $r = 1-(1+q)^{-1/2}$, 方程(1)可化为方程

$$r_t + (1-r)^3 r_{xxx} = 0. \tag{2}$$

应用反散射方法, 作者们得到方程(1)的一个精确的"单孤子"解和方程(2)的一个精确的"尖孤子"解.

据本文作者所知, 方程(1)和(2)所确定的行波解的动力学行为至今尚未有文献讨论. 本文将用动力系统方法研究方程(1)的所有的精确行波解. 我们要证明, 当波速 $c>0$ 时, 方程(1)恰有一个扭波解、一个反扭波解和无穷多的孤立波解. 当波速 $c<0$ 时, 方程(1)有无穷多的周期波解.

令 $q(x,t) = \phi(x-ct) = \phi(\xi)$, 其中 $\xi = x-ct$, c 表示波速, 代入方程(1)并关于 ξ 积分 1 次, 取积分常数为 0, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = c\phi(1+\phi)^{3/2} + \frac{3(\phi')^2}{2(1+\phi)}. \tag{3}$$

再令 $\phi' = y$, 可得以下平面自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} = c\phi(1+\phi)^{3/2} + \frac{3y^2}{2(1+\phi)}. \tag{4}$$

* 收稿日期: 2008-02-19; 修订日期: 2008-03-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671179; 10772158)
作者简介: 李继彬(1943—), 男, 云南人, 教授, 博士生导师(联系人. E-mail: jibinli@gmail.com).

该系统有首次积分

$$H(\phi,y)=\frac{y^2}{(1+\phi)^3}-\frac{4c(2+\phi)}{\sqrt{1+\phi}}=h. \tag{5}$$

显然,系统(4)是有奇直线 $\phi=\phi_s\equiv-1$ 的奇行波系统(见Li 和 Dai 的文献[2]和文献[3-4]).其对应的伴随正则系统是

$$\frac{d\phi}{d\zeta}=y(1+\phi),\ \frac{dy}{d\zeta}=\frac{3}{2}y^2+c\phi(1+\phi)^{5/2}, \tag{6}$$

其中当 $\phi\neq 1$ 时, $d\xi=(1+\phi)d\zeta$. 直线 $\phi=\phi_s\equiv-1$ 变成了系统(6)的1条不变直线解.

注意,在方程(2)中令 $r(x,t)=\varphi(x-ct)=\varphi(\xi)$, 可得关系

$$\varphi(\xi)=1-\frac{1}{\sqrt{1+\phi(\xi)}}$$

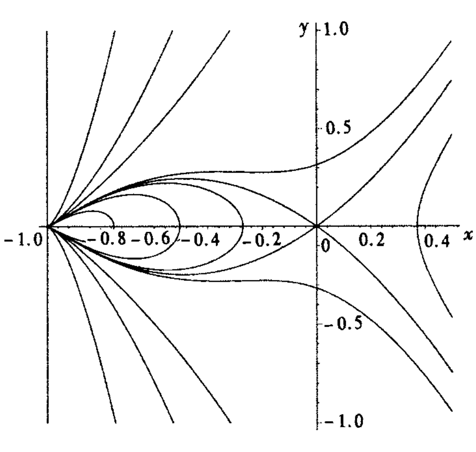
或

$$\phi(\xi)=\frac{1}{(1-\varphi(\xi))^2}-1.$$

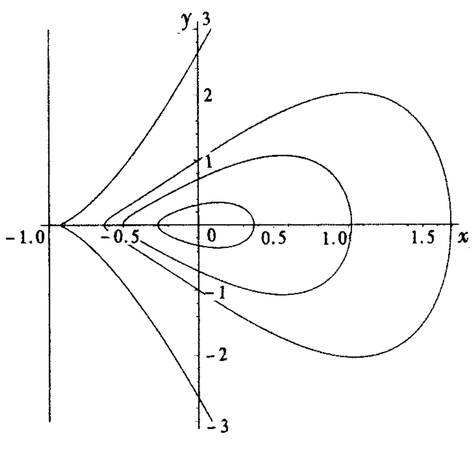
1 方程(4)和(6)的的轨道的平面相图

因为系统(4)和(6)有相同的不变曲线解,以下我们研究系统(6)的动力学性质.系统(6)存在2个平衡点 $O(0,0)$、$S(-1,0)$. 方程(6)的线性化系统的系数矩阵在原点 $O(0,0)$ 的行列式为 $J(0,0)=-c$; 在平衡点 $S(-1,0)$ 的的行列式为 $J(-1,0)=0$. 根据平面动力系统理论,对于平面可积系统(6)的平衡点,若 $J<0$, 则它是鞍点;若 $J>0$, 则它是中心;若 $J=0$ 并且平衡点的Poincaré 指标为0,则该平衡点是尖点,否则该平衡点是其他的高次平衡点.

记 $h_0=H(0,0)=-8c$. 通过定性分析并考虑由 $H(\phi,y)=h$ 所确定的水平曲线的性质,我们得到由图1所示的两个平面相图.



(a) $c>0$ 情形



(b) $c<0$ 情形

图1 系统(4)和(6)的轨道的平面相图

根据图1所示的两个平面相图,我们得到以下结论:

命题1 设 $c>0$.

1) 对应于由 $H(\phi,y)=h$, $h\in(-\infty,-8c)$ 所定义的曲线,系统(6)存在无穷多的同宿到平衡点 $S(-1,0)$ 的同宿轨道. 这些同宿轨道的存在意味着方程(1)具有无穷多的孤立波解.

2) 对应于由 $H(\Phi, y) = -8c$ 所定义的曲线, 系统(6) 存在连接平衡点 $S(-1, 0)$ 和 $O(0, 0)$ 的两异宿轨道. 这些异宿轨道的存在意味着方程(1) 具有一个扭波解和一个反扭波解.

命题 2 设 $c < 0$. 对应于由 $H(\Phi, y) = h, h \in (8|c|, \infty)$ 所定义的曲线, 系统(6) 存在无穷多的周期轨道. 这些异宿轨道的存在意味着方程(1) 具有不可数无穷多的光滑周期波解.

2 方程(1) 和(2) 的精确行波解

本节利用系统(4) 的第 1 个方程和首次积分(5), 我们计算命题 1 和 2 中所述的方程(1) 和(2) 的精确行波解.

由 $H(\Phi, y) = h$ 和变量代换 $\phi = 1 - 1/\sqrt{1+\Phi}$ 可得

$$y^2 = h(1+\Phi)^3 + 4c(2+\Phi)(1+\Phi)^{5/2} = \frac{4c(1-\phi)^2 + h(1-\phi) + 4c}{(1-\phi)^7}. \tag{7}$$

2.1 $c > 0$ 情形

(i) 首先计算扭波解和反扭波解的参数表示. 在式(7) 中取 $h = -8c$, 由系统(4) 的第 1 个方程和 $\mathrm{d}\Phi = -2\mathrm{d}\phi/(1-\phi)^3$, 我们得到

$$\begin{aligned}\xi &= \pm\int_{0.5}^{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{y} = \mp\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{1-\sqrt{2/3}}^{\phi}\frac{\sqrt{1-\phi}\,\mathrm{d}\phi}{\phi} = \\ &\mp\left\{\frac{2}{\sqrt{c}}[\operatorname{arcoth}\sqrt{1-\phi} - \sqrt{1-\phi}] + A_0\right\},\end{aligned}$$

其中 $A_0 = \dfrac{2}{\sqrt{c}}\left[\operatorname{arcoth}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/4} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/4}\right]$.

引入新变量 χ, 从上面的积分可得方程(1) 的解

$$\Phi(\chi) = \tanh^4\chi - 1, \quad \xi(\chi) = \mp\frac{2}{\sqrt{c}}[\chi - \operatorname{arcoth}\chi + A_0]. \tag{8}$$

于是, 方程(2) 有以下的精确行波解

$$\phi(\chi) = \coth^2\chi, \quad \xi(\chi) = \mp\frac{2}{\sqrt{c}}[\chi - \coth\chi + A_0]. \tag{9}$$

注意, 式(8) 和(9) 中的函数 $\xi(\chi)$ 在 $\chi = 0$ 是不连续的, 我们必须分别在 $\chi \in (-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 考虑函数 $\xi(\chi)$.

(ii) 现计算孤立波解的参数表示. 令 $z = 1-\phi$, 从式(7) 可见, 当 $h \in (-\infty, -8c)$, y 可表示为

$$y^2 = \frac{4c[z^2 + hz/(4c) + 1]}{z^7} = \frac{4c}{z^7}(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right), \tag{10}$$

其中 $a = a(h) = (8c)^{-1}(-h + \sqrt{h^2 - 64c^2})$, $(a(h))^{-1} = (8c)^{-1}(-h - \sqrt{h^2 - 64c^2})$. 由系统(4) 的第 1 个方程可得(见文献[5])

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\Phi_2}^{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{y} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{a(h)}^{z}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(a(h)-z)(1/(a(h))-z)z}} = \\ &\frac{2}{a(h)\sqrt{a(h)c}}\left[(a^2(h)-1)\Pi\left(\arcsin\sqrt{\frac{z-a(h)}{z-1/(a(h))}}, 1, k\right) + \right. \\ &\left.\left(\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{z-a(h)}{z-1/(a(h))}}, k\right)\right],\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $k = 1/(a(h))$, $\Pi(\bullet, 1, k)$ 是模为 k 的第三类不完全椭圆积分.

引入新变量 χ, 从上面的积分可得方程(1)和(2)的解分别为

$$\begin{cases} \phi(\chi) = \dfrac{\mathrm{cn}^4(\chi, k)}{a^2\mathrm{dn}^4(\chi, k)} - 1, \\ \xi(\chi) = \dfrac{2}{a^{3/2}\sqrt{c}}[\chi + (a^2 - 1)\Pi(\arcsin(\mathrm{sn}(\chi, k)), 1, k)] \end{cases} \tag{12}$$

和

$$\begin{cases} \phi(\chi) = 1 - \dfrac{a\,\mathrm{dn}^2(\chi, k)}{\mathrm{cn}^2(\chi, k)}, \\ \xi(\chi) = \dfrac{2}{a^{3/2}\sqrt{c}}[\chi + (a^2 - 1)\Pi(\arcsin(\mathrm{sn}(\chi, k)), 1, k)]. \end{cases} \tag{13}$$

2.2 $c < 0$ 情形

此时, 式(7)可表示为

$$y^2 = \frac{4|c|}{(1-\phi)^7}\left(-(1-\phi)^2 + \frac{h}{4|c|}(1-\phi) - 1\right) = \frac{4|c|}{z^7}(b - z)\left(z - \frac{1}{b}\right), \tag{14}$$

其中 $b = b(h) = (8|c|)^{-1}(h + \sqrt{h^2 - 64c^2})$. 由系统(4)的第1个方程可得

$$\xi = \int_{\phi_2}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{y} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{z}^{b(h)}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(b(h) - z)(z - 1/(b(h)))z}} = \frac{2b^2\sqrt{b}}{\sqrt{c}(b^2 - 1)}E\left(\arcsin\sqrt{\frac{b(b-z)}{b^2 - 1}}, k\right) = \frac{2b^2\sqrt{b}}{\sqrt{c}(b^2 - 1)}E\left(\arcsin\sqrt{\frac{b(b\sqrt{1+\phi} - 1)}{(b^2 - 1)\sqrt{1+\phi}}}, k\right), \tag{15}$$

其中 $k^2 = (b^2 - 1)/b^2$. 式(15)是方程(1)的所有周期波解的隐型精确参数表示.

[参 考 文 献]

[1] Wadati M, Ichikawa Y H, Shimizu T. Cusp soliton of a new integrable nonlinear evolution equation [J]. Progress of Theoretical Physics, 1980, **64**(6): 1959-1967.

[2] LI Ji-bin, DAI Hui-hui. On the Study of Singular Nonlinear Travelling Wave Equations: Dynamical Approach [M]. Beijing: Science Press, 2007.

[3] LI Ji-bin, WU Jia-hong, ZHU Huai-ping. Travelling waves for an integrable higher order KdV type wave equations[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, **16**(8): 2235-2260.

[4] LI Ji-bin, CHEN Guan-rong. On a class of singular nonlinear traveling wave equations[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, **17**(11): 4049-4065.

[5] Byrd P F, Fridman M D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Sciensists [M]. Berlin: Springer, 1977.

Exact Traveling Wave Solutions for an Integrable Nonlinear Evolution Equation Given by M. Wadati

LI Ji-bin[1, 2]
(1. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China)

Abstract: By using the method of dynamical systems, the travelling wave solutions of for an integrable nonlinear evolution equation was studied. Exact explicit parametric representations of kink and anti-kink wave solutions, periodic wave solutions and uncountably infinite many smooth solitary wave solutions are given.

Key words: solitary wave solution; kink wave solution; anti-kink wave solution; periodic wave solution; nonlinear evolution equation