文章编号: 1000-0887(2008) 03-0361-08　

# 广义耦合 KdV 孤子方程的达布变换及其奇孤子解*

刘　萍

(西南大学 数学与统计学院,应用数学系, 重庆 400715)

(周哲玮推荐)

摘要: 借助谱问题的规范变换, 给出广义耦合 KdV 孤子方程的达布变换, 利用达布变换来产生广义耦合KdV 孤子方程的奇孤子解, 并且用行列式的形式来表达广义耦合 KdV 孤子方程的奇孤子解. 作为应用,广义耦合 KdV 孤子方程奇孤子解的前两个例子被给出.

关　键　词: 达布变换; 孤子方程; 奇孤子解; 规范变换

中图分类号: O175.29　　文献标识码: A

## 引　　言

文献[1] 介绍了共焦 Lax 矩阵的 3 个重要应用, 其中之一是找出新的谱问题

$$\phi_x = \boldsymbol{U}\phi,\quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -\lambda + u & 2v \\ 2\left(l + \dfrac{r}{v}\right) & \lambda - u \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\lambda$ 是一个常谱参数, $r$、$l$ 是 2 个常参数并且 $u$ 和 $v$ 是两个势.

通过引进谱问题的一个辅助问题, 广义耦合 KdV 孤子方程的谱系[1] 被得到, 从而广义耦合 KdV 孤子方程被得到.

在这篇文章中, 讨论广义耦合 KdV 孤子方程

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{r}{vl}(\ln v)_{xx} + \left(1 + \dfrac{2r}{vl}\right)u_x + 2u^2 - 4vl\right]_x, \\ v_t = -\dfrac{1}{2}v_{xx} - \dfrac{r}{l}(\ln v)_{xx} + 2(uv)_x + \dfrac{2r}{l}u_x. \end{cases} \tag{2}$$

孤子方程是非线性科学领域中极具潜力的课题. 对于孤子方程, 近来已经有许多求解的方法. 例如反散射方法、双线性(Hirota) 方法、贝克隆( Bäcklund) 变换法、达布( Darboux) 变换法、代数几何法、极点展开法等等. 其中, 达布变换是一种自然而美妙的方法, 利用达布变换法可以获得孤子方程的精确解[2-6]. 从平凡解出发, 利用达布变换和达布阵法可以获得孤子方程的精确解[7-9].

本文考虑这个重要的广义耦合 KdV 孤子方程( 2) . 我们借助谱问题和规范变换, 构造出广义耦合 KdV 孤子方程的达布变换, 并且利用达布变换求得广义耦合 KdV 孤子方程( 2) 的奇

* 收稿日期: 2007-09-28; 修订日期: 2008-01-16
作者简介: 刘萍( 1972—) , 女, 河南商丘人, 讲师, 硕士(E-mail: liupingz11@tom.com) .

孤子解. 作为应用, 我们利用达布变换给出了广义耦合 KdV 孤子方程(2) 奇孤子解的前两个例子.

# 1 达布变换

在这节, 我们考虑下列谱问题

$$\phi_x = U\phi,\quad U=\begin{pmatrix} -\lambda+u & 2v \\ 2\left(l+\dfrac{r}{v}\right) & \lambda-u \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $\lambda$ 是 1 个常谱参数, $r$、$l$ 是 2 个常参数并且 $u$ 和 $v$ 是两个势. 相应的时间部分是

$$\begin{cases} \phi_t = V\phi, \\ V=\begin{pmatrix} -\lambda^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{r}{lv}\right)u_x+u^2-\dfrac{r}{2lv}(\ln v)_{xx} & 2v\lambda+2uv-v_x \\ 2\left(l+\dfrac{r}{v}\right)\lambda+2u\left(l+\dfrac{r}{v}\right)-\dfrac{rv_x}{v^2} & \lambda^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{r}{vl}\right)u_x-u^2+\dfrac{r}{2vl}(\ln v)_{xx} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

由相容性条件 $\phi_{xt}=\phi_{tx}$ 产生零曲率方程 $U_t-V_x+[U, V]=\mathbf{0}$, 通过直接计算零曲率方程可以得到广义耦合 KdV 孤子方程(2).

下面我们讨论谱问题(3) 和(4) 的达布变换. 首先引入谱问题的规范变换

$$\bar{\phi} = T\phi, \tag{5}$$

其中 $T$ 由下式确定

$$T_x+TU=\bar{U}T, \tag{6}$$

$$T_t+TV=\bar{V}T. \tag{7}$$

进而 Lax 对(3) 式和(4) 式转化为

$$\bar{\phi}_x=\bar{U}\bar{\phi}, \tag{8}$$

$$\bar{\phi}_t=\bar{V}\bar{\phi}. \tag{9}$$

谱问题的规范变换称为达布变换, 若它将相应的谱问题转化为相同形式的谱问题.

假定

$$T=T(\lambda)=\alpha\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$A=\lambda^N+\sum_{k=0}^{N-1}A_k\lambda^k,\quad B=\sum_{k=0}^{N-1}B_k\lambda^k,\quad C=\sum_{k=0}^{N-1}C_k\lambda^k,\quad D=\sum_{k=0}^{N-1}D_k\lambda^k,$$

$\alpha$、$A_k$、$B_k$、$C_k$ 和 $D_k(0\leqslant k\leqslant N-1)$ 是 $x$ 和 $t$ 的函数.

设 $\varphi(\lambda)=(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))^{\mathrm{T}}$, $\psi(\lambda)=(\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda))^{\mathrm{T}}$ 是(3) 式的 2 个基本解(即(3) 式的任 1 个解都能表示为 $\varphi(\lambda)$、$\psi(\lambda)$ 的线性组合; $\varphi(\lambda)$、$\psi(\lambda)$ 线性无关). 通过(5) 式知, 存在常数 $r_j(1\leqslant j\leqslant 2N-1)$ 满足

$$\begin{cases} (A\varphi_1(\lambda_j)+B\varphi_2(\lambda_j))-r_j(A\psi_1(\lambda_j)+B\psi_2(\lambda_j))=0, \\ (C\varphi_1(\lambda_j)+D\varphi_2(\lambda_j))-r_j(C\psi_1(\lambda_j)+D\psi_2(\lambda_j))=0. \end{cases} \tag{11}$$

进一步, (11) 式可以写成线性代数系统

$$\begin{cases} A + \sigma_j B = 0, \\ C + \sigma_j D = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k + \sigma_j B_k) \lambda_j^k = -\lambda_j^N, \\ \sum_{k=0}^{N-1} (C_k + \sigma_j D_k) \lambda_j^k = 0, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\sigma_j = \frac{\varphi_2(\lambda_j) - r_j \psi_2(\lambda_j)}{\varphi_1(\lambda_j) - r_j \psi_1(\lambda_j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2N-1), \tag{13}$$

当常数 $\lambda_j$、$r_j$ ($\lambda_k \neq \lambda_j$, 若 $k \neq j$) 适当选择时, (12) 式的系数非 0. 因此, 如果我们选取

$$B_{N-1} = -v, \quad C_{N-1} = \frac{2rl}{(A_{N-1})_x - 2lv} - l, \tag{14}$$

剩余的 $A_k$、$B_k$、$C_k$ 和 $D_k$ ($0 \leqslant k \leqslant N-1$) 由线性系统(12) 唯一确定, 而 $\alpha$ 在下文给定.

矩阵(10) 式表明 $\det \boldsymbol{T}(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的 $2N-1$ 次多项式且

$$\det \boldsymbol{T}(\lambda_j) = \alpha^2 [A(\lambda_j) D(\lambda_j) - B(\lambda_j) C(\lambda_j)].$$

另一方面, 由(12) 式可知

$$A(\lambda_j) = -\sigma_j B(\lambda_j), \quad C(\lambda_j) = -\sigma_j D(\lambda_j).$$

所以

$$\det \boldsymbol{T}(\lambda) = \beta \prod_{j=1}^{2N-1} (\lambda - \lambda_j),$$

这表明 $\lambda_j$ ($1 \leqslant j \leqslant 2N-1$) 是 $\det \boldsymbol{T}$ 的根(其中 $\beta$ 与 $\lambda$ 无关).

命题 1 设 $\alpha$ 满足一阶常微分方程

$$\partial_x \ln \alpha = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(D_{N-1}), \tag{15}$$

由(6) 式确定的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与矩阵 $\boldsymbol{U}$ 具有相同形式, 即 $\boldsymbol{U}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -\lambda + u & 2v \\ 2\left(l + \dfrac{r}{v}\right) & \lambda - u \end{pmatrix},$$

下列变换

$$\begin{cases} u = u - \dfrac{1}{2} \partial_x \ln(D_{N-1}), \\ v = v - \dfrac{1}{2l} \partial_x A_{N-1}, \end{cases} \tag{16}$$

将原位势函数 $u$ 和 $v$ 映射为新位势函数 $u$ 和 $v$.

证 设 $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^* / (\det \boldsymbol{T})$ 且

$$(\boldsymbol{T}_x + \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}) \boldsymbol{T}^* = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$\boldsymbol{T}^*$ 表示 $\boldsymbol{T}$ 的伴随矩阵, 则容易验证 $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的 $2N$ 次多项式. 由已知条件(14), 可知 $f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的 $2N-1$ 次多项式. 当 $\lambda = \lambda_j$ ($1 \leqslant j \leqslant 2N-1$) 时, 利用(3) 式和(13) 式, 可以得到一个 Riccati 方程

$$\sigma_{jx} = 2\left(l + \frac{r}{v}\right) + 2(\lambda_j - u)\sigma_j - 2v\sigma_j^2.$$

通过直接计算, 知所有 $\lambda_j$ ($1 \leqslant j \leqslant 2N-1$) 是 $f_{sl}(\lambda)$ ($s, l = 1, 2$) 的根, 进而(17) 式可改写成

$$(\boldsymbol{T}_x + \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}) \boldsymbol{T}^* = (\det \boldsymbol{T}) \boldsymbol{P}(\lambda), \tag{18}$$

$P(\lambda)$ 有以下形式

$$\boldsymbol{P}(\lambda)=\begin{pmatrix} p_{11}^{(1)}\lambda+p_{11}^{(0)} & p_{12}^{(0)} \\ p_{21}^{(0)} & p_{22}^{(1)}\lambda+p_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

其中 $p_{kj}^{(l)}(k,j=1,2;l=0,1)$ 与 $\lambda$ 无关．所以方程(18)等价于

$$\boldsymbol{T}_x+\boldsymbol{TU}=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{T}. \tag{19}$$

比较等式(19)中 $\lambda^{N+1}$、$\lambda^N$ 和 $\lambda^{N-1}$ 的系数，可以得到

$$p_{11}^{(1)}=-1,\ p_{22}^{(1)}=1,\ p_{21}^{(0)}=-2C_{N-1},\ p_{11}^{(0)}=u+\partial_x\ln\alpha, \tag{20}$$

$$p_{12}^{(0)}C_{N-1}=A_{N-1x}+2\left(l+\frac{r}{v}\right)B_{N-1},\ p_{22}^{(0)}=-\partial_x\ln\alpha-u+\partial_x\ln(D_{N-1}). \tag{21}$$

将(15)式代入(20)式和(21)式，有

$$p_{11}^{(0)}=u,\ p_{12}^{(0)}=2v,\ p_{22}^{(0)}=-u,\ p_{21}^{(0)}=2\left(l+\frac{r}{v}\right),$$

对比(6)式和(19)式，易得 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}(\lambda)$． 证毕．

若 $\varphi(\lambda_j)$ 和 $\psi(\lambda_j)$ 也同时满足(4)式，采用与命题1类似的方法，我们可以证明在变换(5)和(16)共同作用下，由(7)式确定的 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 有相同形式．

命题2 设 $\alpha$ 满足关于 $t$ 一阶常微分方程

$$\partial_t\ln\alpha=\left(\frac{1}{4}+\frac{C_{N-1}}{2l}\right)(\ln D_{N-1})_{xx}+\frac{1}{4}(\ln D_{N-1})_x^2-u(\ln D_{N-1})_x+\frac{r}{2lv}(\ln v)_{xx}+$$
$$2(r+lv)+\left(\frac{1}{2}+\frac{C_{N-1}}{2l}\right)\left[\ln\left(v-\frac{(A_{N-1})_x}{2l}\right)\right]_{xx}+2\left(v-\frac{1}{2l}(A_{N-1})_x\right)C_{N-1}-$$
$$\left(1+\frac{2r}{lv}+\frac{C_{N-1}}{l}\right)u_x, \tag{22}$$

则由(7)式确定的矩阵 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 有相同的形式，在同一达布变换(5)式和(16)式作用下，原位势函数 $u$ 和 $v$ 映射为新位势函数 $u$ 和 $v$．

证 令 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^*/(\det\boldsymbol{T})$ 且

$$(\boldsymbol{T}_t+\boldsymbol{TV})\boldsymbol{T}^*=\begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & g_{12}(\lambda) \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

显然 $g_{11}(\lambda)$、$g_{22}(\lambda)$ 是关于 $\lambda$ 的 $2N+1$ 次多项式． 根据(14)式，有 $g_{12}(\lambda)$、$g_{21}(\lambda)$ 是关于 $\lambda$ 的 $2N$ 次多项式． 当 $\lambda=\lambda_j(1\leqslant j\leqslant 2N-1)$ 时，利用(4)式和(13)式，可以推导出 $\sigma_j(1\leqslant j\leqslant 2N-1)$ 满足 Riccati 方程

$$\sigma_{jt}=2\left(l+\frac{r}{v}\right)\lambda_j+2u\left(l+\frac{r}{v}\right)-\frac{rv_x}{v^2}+2\left[\lambda_j^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{vl}\right)u_x-\right.$$
$$\left.u^2+\frac{r}{2vl}(\ln v)_{xx}\right]\sigma_j-(2v\lambda_j+2uv-v_x)\sigma_j^2.$$

通过直接计算，$\lambda_j(1\leqslant j\leqslant 2N-1)$ 是 $g_{sl}(\lambda)$ $(s,l=1,2)$ 的根．联立等式(23)可得

$$(\boldsymbol{T}_t+\boldsymbol{TV})\boldsymbol{T}^*=(\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{Q}(\lambda), \tag{24}$$

$\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 有以下形式

$$\boldsymbol{Q}(\lambda)=\begin{pmatrix} q_{11}^{(2)}\lambda^2+q_{11}^{(1)}\lambda+q_{11}^{(0)} & q_{12}^{(1)}\lambda+q_{12}^{(0)} \\ q_{21}^{(1)}\lambda+q_{21}^{(0)} & q_{22}^{(2)}\lambda^2+q_{22}^{(1)}\lambda+q_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

其中 $q_{kj}^{(l)}(k,j=1,2;l=0,1,2)$ 不依赖于 $\lambda$． 进而等式(24)可写成

$$\boldsymbol{T}_t+\boldsymbol{TV}=\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{T}. \tag{25}$$

比较方程(25)中 $\lambda^{N+2}$、$\lambda^{N+1}$、$\lambda^{N}$ 和 $\lambda^{N-1}$ 的系数,我们可以得到

$$q_{11}^{(1)}=q_{22}^{(1)}=0,\ q_{22}^{(2)}=1,\ q_{11}^{(2)}=-1,\ q_{21}^{(1)}=-2C_{N-1},\tag{26}$$

$$q_{21}^{(0)}=-2C_{N-2}+2\left(l+\frac{r}{v}\right)D_{N-1}-q_{21}^{(1)}A_{N-1},\tag{27}$$

$$q_{11}^{(0)}=u^2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2r}{vl}\right)u_x-\frac{r}{2vl}(\ln v)_{xx}-q_{12}^{(1)}C_{N-1}+2\left(l+\frac{r}{v}\right)B_{N-1}+\partial_t\ln\alpha,\tag{28}$$

$$\begin{aligned}q_{12}^{(0)}D_{N-1}={}&(B_{N-1})_t+B_{N-1}\partial_t\ln\alpha+2B_{N-3}+2vA_{N-2}+(2uv-v_x)A_{N-1}-\\&\left[u^2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2r}{vl}\right)\right]u_x-\frac{r}{2vl}(\ln v)_{xx})B_{N-1}-q_{11}^{(0)}B_{N-1}-q_{12}^{(1)}D_{n-2},\end{aligned}\tag{29}$$

$$q_{12}^{(1)}D_{N-1}=2vA_{N-1}+2uv-v_x+2B_{N-2},\tag{30}$$

$$\begin{aligned}q_{22}^{(0)}D_{N-1}={}&(D_{N-1})_t+D_{N-1}\partial_t\ln\alpha+(2uv-v_x)C_{N-1}+2vC_{N-2}-\\&\left[u^2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{2r}{vl}\right)u_x+\frac{r}{2vl}(\ln v)_{xx}\right]D_{N-1}-q_{21}^{(1)}B_{N-2}-q_{21}^{(0)}B_{N-1}.\end{aligned}\tag{31}$$

另一方面,利用已严格证明的命题1,比较方程(19)的 $\lambda^{N}$、$\lambda^{N-1}$ 和 $\lambda^{N-2}$ 系数,有

$$A_{N-1,x}=2vC_{N-1}-2\left(l+\frac{r}{v}\right)B_{N-1},\tag{32}$$

$$B_{N-1,x}=2uB_{N-1}-2vA_{N-1}-2B_{N-2}+2vD_{N-1},\tag{33}$$

$$C_{N-1,x}=2C_{N-2}-2C_{N-1}A_{N-1}-2\left(l+\frac{r}{v}\right)D_{N-1}-2uC_{N-1},\tag{34}$$

$$B_{N-2,x}=2uB_{N-2}-2B_{N-3}-2vA_{N-2}+2v)D_{N-2}.\tag{35}$$

根据(32)式~(35)式,(22)式并且联立广义耦合KdV 孤子方程(2),通过复杂计算,可以得到

$$q_{11}^{(0)}=-q_{22}^{(0)}=u^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{vl}\right)u_x-\frac{r}{2vl}(\ln v)_{xx},\quad q_{12}^{(1)}=2v,$$

$$q_{12}^{(0)}=2uv-v_x,\quad q_{21}^{(1)}=2\left(l+\frac{r}{v}\right),\quad q_{21}^{(0)}=2u\left(l+\frac{r}{v}\right)-\frac{rv_x}{v^2}.$$

对比(7)式和(25)式,易得 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Q}(\lambda)$. 证毕.

根据命题1和命题2,达布变换(5)式和(16)式将 Lax 对(3)式和(4)式映射为相同形式的 Lax 对(8)式和(9)式. 由相容性条件 $\phi_{xt}=\phi_{tx}$ 产生零曲率方程 $\boldsymbol{U}_t-\boldsymbol{V}_x+[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]=\boldsymbol{0}$,通过直接计算零曲率方程可以得到广义耦合KdV 孤子方程(2). 2个Lax 对通过相容性条件都可以导出广义耦合KdV 孤子方程(2). 我们也称变换 $(\phi,u,v)\to(\phi,u,v)$ 是广义耦合 KdV 孤子方程(2)的1个达布变换.

**定理1** 广义耦合 KdV 孤子方程(2)的1个解 $(u,v)$ 在达布变换(5)式和(16)式作用下,映射为1个新的解 $(u,v)$,其中 $A_{N-1}$ 和 $D_{N-1}$ 由已知条件(14)和线性系统(12)确定.

## 2 奇孤子解

当 $u$ 和 $v$ 是常数且 $v\neq 0$ 时,我们将 $(u,v)$ 作为广义耦合KdV 孤子方程(2)的一个种子解,在达布变换(5)和(16)的作用下,可以获得奇孤子解即孤子解中包含奇数 $(2N-1)$ 个孤子.

将常数 $u$、$v$ $(v\neq 0)$ 代入Lax 对(3)式和(4)式中,我们可以得到(3)式和(4)式的2个基本解

$$\varphi(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\cosh\xi_j\\ \dfrac{c_j}{2v}\sinh\xi_j+\dfrac{\lambda_j-u}{2v}\cosh\xi_j\end{pmatrix},\quad \psi(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\sinh\xi_j\\ \dfrac{c_j}{2v}\cosh\xi_j+\dfrac{\lambda_j-u}{2v}\sinh\xi_j\end{pmatrix},$$

其中

$\xi_j = c_j[x + (\lambda_j + u)t],\quad c_j = \sqrt{(\lambda_j - u)^2 + 4(vl + r)}\qquad (1 \leqslant j \leqslant 2N-1),$

根据等式(13),有

$$\sigma_j = \frac{c_j}{2v}\frac{\tanh\xi_j - r_j}{1 - r_j\tanh\xi_j} + \frac{\lambda_j - u}{2v}\qquad (1 \leqslant j \leqslant 2N-1).$$

联立已知条件(14)和线性代数系统(12),利用克拉默(Cramer)法则求解,得

$$A_{N-1} = \frac{\Delta_{A_{N-1}}}{\Delta},\quad C_{N-1} = \frac{2rl}{(A_{N-1})_x - 2vl} - l,\quad D_{N-1} = \frac{\Delta_{D_{N-1}}}{\Delta},\ \Delta_{D_{N-1}} = -C_{N-1}\Delta,$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \lambda_1 & \sigma_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \sigma_1\lambda_1^{N-2} & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \sigma_2 & \lambda_2 & \sigma_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \sigma_2\lambda_2^{N-2} & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma_{2N-1} & \lambda_{2N-1} & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1} & \lambda_{2N-1}^2 & \cdots & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-2} & \lambda_{2N-1}^{N-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{A_{N-1}} = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \lambda_1 & \sigma_1\lambda_1 & \cdots & \sigma_1\lambda_1^{N-2} & v\sigma_1\lambda_1^{N-1} - \lambda_1^N \\ 1 & \sigma_2 & \lambda_2 & \sigma_2\lambda_2 & \cdots & \sigma_2\lambda_2^{N-2} & v\sigma_2\lambda_2^{N-1} - \lambda_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma_{2N-1} & \lambda_{2N-1} & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1} & \cdots & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-2} & v\sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-1} - \lambda_{2N-1}^N \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \lambda_1 & \sigma_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \sigma_1\lambda_1^{N-2} & \sigma_1\lambda_1^{N-1} \\ 1 & \sigma_2 & \lambda_2 & \sigma_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \sigma_2\lambda_2^{N-2} & \sigma_2\lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma_{2N-1} & \lambda_{2N-1} & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1} & \lambda_{2N-1}^2 & \cdots & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-2} & \sigma_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-1} \end{vmatrix}.$$

从而,利用达布变换(16)式得到广义耦合 KdV 孤子方程(2)的奇孤子解即包含 $(2N-1)$ 个孤子的孤子解

$$\begin{cases} u[N] = u - \dfrac{1}{2}\partial_x \ln(D_{N-1}), \\ v[N] = v - \dfrac{1}{2l}\partial_x A_{N-1}. \end{cases}$$

为了便于讨论生成解的性质和图像,我们仅考虑 $N = 1$ 和 $N = 2$ 前 2 种情形.

(Ⅰ) 当 $N = 1$ 时,设 $\lambda = \lambda_1$, $u = 0$, $v = 1/2$, $r = 0$, $l = -1/2$, 根据已知条件(14)和线性代数系统(12),可以得到

$$A_0 = \frac{1}{2}\sigma_1 - \lambda_1,\quad C_0 = \frac{1}{2},\quad D_0 = -\frac{1}{2\sigma_1}.$$

进而,利用达布变换(16)式,广义耦合 KdV 孤子方程(2)的 1 个单孤子解为

$$\begin{cases} u[1] = \lambda_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{[c_1(\tanh\xi_1 - r_1) + \lambda_1(1 - r_1\tanh\xi_1)]^2 + (1 - r_1\tanh\xi_1)^2}{(1 - r_1\tanh\xi_1)[c_1(\tanh\xi_1 - r_1) + \lambda_1(1 - r_1\tanh\xi_1)]}, \\ v[1] = -1 + \dfrac{1}{2}\lambda_1^2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{c_1(\tanh\xi_1 - r_1)}{1 - r_1\tanh\xi_1}\right]^2. \end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $N = 2$ 时,设 $\lambda = \lambda_j (j = 1, 2, 3)$, $u = 0$, $v = 1/2$, $r = 0$, $l = -1/2$, 根据已知条件(14)和线性代数系统(12)可以得到

$$A_1 = \frac{\Delta_{A_1}}{\Delta},\quad C_1 = \frac{1}{2},\quad D_1 = \frac{\Delta_{D_1}}{\Delta},\quad \Delta_{D_1} = -\frac{1}{2}\Delta,$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \lambda_1 \\ 1 & \sigma_2 & \lambda_2 \\ 1 & \sigma_3 & \lambda_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_{A_1} = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & v\lambda_1\sigma_1 - \lambda_1^2 \\ 1 & \sigma_2 & v\lambda_2\sigma_2 - \lambda_2^2 \\ 1 & \sigma_3 & v\lambda_3\sigma_3 - \lambda_3^2 \end{vmatrix},\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \lambda_1\sigma_1 \\ 1 & \sigma_2 & \lambda_2\sigma_2 \\ 1 & \sigma_3 & \lambda_3\sigma_3 \end{vmatrix}.$$

从而, 根据达布变换(16) 式可以得到广义耦合 KdV 孤子方程(2) 的另 1 个三孤子解

$$\begin{cases} u[2] = -\dfrac{1}{2}\partial_x \ln(D_1), \\ v[2] = \dfrac{1}{2} + \partial_x A_1, \end{cases} \tag{37}$$

当参数适当选择时, 可以作出广义耦合 KdV 孤子方程(2) 的优美的三孤子相互碰撞图像. 例如当 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2.5$, $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 3$ 时, 方程(37) 中三孤子解$(u[2], v[2])$ 碰撞图形如下(图 1~ 图 4) 所示.

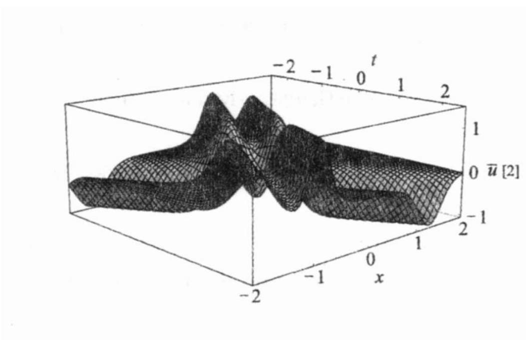

图 1 $u[2]$ 三孤子相互碰撞

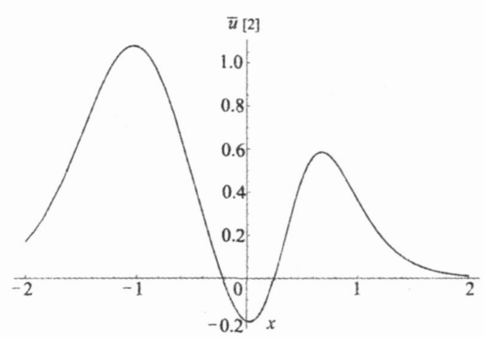

图 2 $u[2]$ 在 $t = 0$ 时的切面图

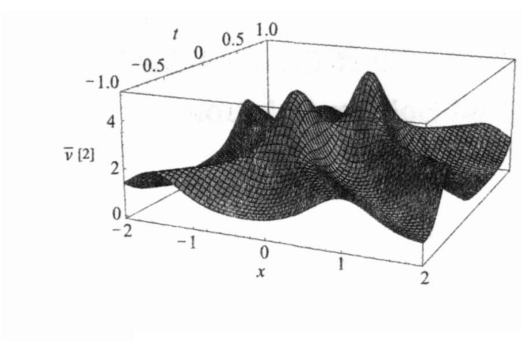

图 3 $v[2]$ 三孤子相互碰撞

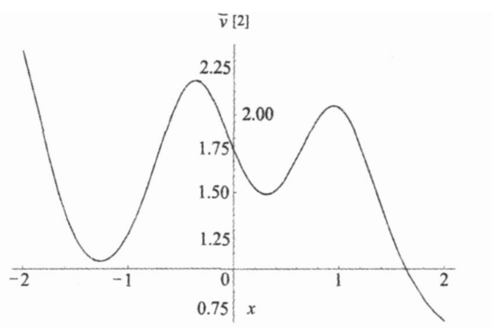

图 4 $v[2]$ 在 $t = 0.7$ 时的切面图

我们可以清楚地观察 $(u[2], v[2])$ 是 2 个孤子追赶和 1 个孤子正面碰撞的三孤子相互碰撞时的形状, $v[2]$ 的图像中有 2 个峰. 这是与 $2\times 2$ 谱问题有关的孤子碰撞图像的新类型.

**定理 2** 在 $\lambda_i > 1$ 或 $\lambda_i < -1$ $(i = 1, 2, 3)$ 范围内

(i) 若 $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 同为负数时, $(u[2], v[2])$ 是 3 个孤子相互追赶碰撞的孤子解, 其平面图均沿 $x$ 轴正向传播;

(ii) 若 $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 同为正数时, $(u[2], v[2])$ 是 3 个孤子相互追赶碰撞的孤子解, 其

平面图均沿 $x$ 轴负向传播;

(iii) 若 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 两正一负或两负一正时, $(u[2],v[2])$ 是 2 个孤子追赶碰撞和 1 个孤子正面碰撞.

当 $N$ 选取不同值时, 求解(14)式和线性代数系统(12), 利用达布变换(16)式, 我们可以得到广义耦合 KdV 孤子方程(2)不同的奇孤子解(36)式.

致谢 感谢西南大学学校青年基金资助(SWUQ2006028).

[参 考 文 献]

[1] LI Xue-mei, GENG Xian-guo. Lax matrix and a generalized coupled KdV hierarchy[J]. Phys A, 2003, **327**: 357-370.

[2] 刘萍, 张荣. 广义耦合 KdV 孤子方程的达布变换及其精确解[J]. 洛阳师范学院学报, 2005, **24**(5): 1-5.

[3] Li Y S, Ma W X, Zhang J E. Darboux transformation of classical Boussinesq system and its new solutions[J]. Phys Lett A, 2000, **275**: 60-66.

[4] Li Y S, Zhang J E. Darboux transformation of classical Boussinesq system and its multi-solition solutions[J]. Phys Lett A, 2001, **284**: 253-258.

[5] FAN En-gui. Darboux transformation and soliton-like solutions for the Gerdjikov-Ivanov equation[J]. Phys A: Math Gen, 2000, **33**: 6925-6933.

[6] 张金顺, 李华夏. 2+1 维 Levi 孤子方程的 Darboux 变换[J]. 郑州大学学报(自然科学版), 2001, **33**(3): 13-17.

[7] 刘萍. Broer-Kaup 系统的达布变换及其孤子解[J]. 数学物理学报, 2006, **26**A(7): 999-1007.

[8] LIU Ping, ZHANG Jin-hun. Darboux transformation of Broer-Kaup system and its odd-soliton solutions[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2006, **31**(5): 31-36.

[9] Geng X G, Tam H W. Darboux transformation and soliton solutions for generalized nonlinear Schrödinger equation[J]. Phys Soc Jpn, 1999, **68**(5): 1508-1512.

# Darboux Transformation of Generalized Coupled KdV Soliton Equation and Its Odd-Soliton Solutions

LIU Ping

(Department of Applied Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, P. R. China)

**Abstract:** Based on the resulting Lax pairs of generalized coupled KdV soliton equation, a new Darboux transformation with multi-parameters for generalized coupled KdV soliton equation is derived with the help of a gauge transformation of the spectral problem. By using Darboux transformation, the generalized odd-soliton solutions of ceneralized coupled KdV soliton equation are given and presented in determinant form. As an application, the first two cases are given.

**Key words:** Darboux transformation; soliton equation; odd-soliton solution; gauge transformation