

无限非均质横观各向同性黏弹性介质中 具有圆柱孔洞时的振动

D P 阿查亚¹, 因德拉吉 罗伊², P K 比沃斯³

(1. 班加巴斯英宁学院, 加尔各答 700 009, 西孟, 印度;

2. 卡亚尼大学 数学系, 卡亚尼, 那迪, 西孟, 印度;

3. 甘杰拉巴拉学院 数学系, 741 248, 743145 西孟, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 在无限介质中, 研究了横截面为圆的柱形孔洞表面上瞬时径向力或扭转引起的扰动, 讨论了高阶黏弹性和横观各向同性弹性参数的非均匀性对扰动产生的影响. 根据高阶黏弹性 Voigt 模型, 将非零应力分量简化为径向位移分量项表示, 这对横观各向同性和高阶黏弹性固体介质是合宜的. 导出了含有弹性和黏弹性参数以幂律变化时的应力方程. 在瞬时力和扭转边界条件下, 求解该方程, 求得径向位移分量以及和它相关的应力分量, 用修正的 Bessel 函数项来表示. 对瞬时径向力作用问题进行了数值分析, 并给出了不同阶的黏弹性和非均质性时的位移和应力变化图形. 扭转作用时扰动的数值解可以用类似的方法研究, 这里不再深入讨论.

关键词: 高阶黏弹性; 非均质和横观各向同性; 瞬时力和扭转; 径向位移; 应力分量; 修正的 Bessel 函数

中图分类号: O343.8; O345 **文献标识码:** A

引 言

在 Flügge^[1]、Ezzat^[2]、Bullen^[3]、Nowack^[4]、约塞夫等人^[5]的文献中, 广泛地研究了各种不同模型的波和振动问题. Sengupta 等人^[6]研究了高阶黏弹性固体球的旋转振动. 出于科技不同分支的实际应用的需要, 尤其是在地球物理学和地震学中, 更多的学者^[6-11]对广义黏弹性介质中的扰动问题作了研究. Bhattacharya 和 Sengupta^[10]研究了在广义黏弹性介质中, 施加在球状内腔上的冲击力引起的扰动问题, 其它很多学者^[5, 10, 12]对类似问题也进行过研究. 各向异性、弹性和黏弹性参数的非均匀性, 在波和振动问题中起着重要作用. 还有不少学者尝试求解各向异性介质中波和振动的问题^[7, 12-13]. Bhattacharya 等人^[10]、Mukherjee^[14]对弹性介质的非均质性在波和振动问题中的作用进行了研究. Mondal 和 Sengupta^[15]则考虑了在圆柱状各向异性非均质材料中存在圆柱空洞时的扭转问题. Mondal 等人^[15]和 Mukherjee^[14]假定弹性常数是离圆

收稿日期: 2007-06-01; 修订日期: 2007-12-28

作者简介: D. P. Acharya(联系人, 联系地址: 109/3, Kailash Roy Chowdhury Road, Barrackpore, Kolkata 700 009, WB, India; E-mail: acharyadp_05@rediffmail.com).

本文原文为英文, 由海治译, 张禄坤校.

柱主轴的距离 n 次幂变化的。本文继续上述的研究,对更为广泛的情况进行了讨论,将同时考虑高阶黏弹性、弹性和黏弹性参数的幂律变化、各向异性等。本文详细地分析了在一个无限非均质、高阶黏弹性、横观各向同性的固体介质中,由圆柱体源表面上的瞬时力和扭转引起的径向位移分量和应力分量的变化。当黏弹性阶不等于 2 时,用修正的 Bessel 函数求解该问题。数值讨论了圆柱源表面上瞬时径向力的作用,分析了高阶黏弹性以及弹性和黏弹性参数的非均质性的影响,并用图形表示出来。相信对该问题的深入研究是前所未有的。

1 瞬时径向力作用问题

1.1 基本公式与边界条件

建立由圆柱源上的瞬时径向力产生扰动时的基本公式。假设在一个无限、非均质、横观各向同性(各向异性的一个特例)的黏弹性介质中,存在一个横截面为圆形,半径为 a 的圆柱孔。以 (r, θ, z) 表示任意点在柱坐标系中的坐标,其中 z 为圆柱孔的对称轴。

根据 Voigt^[16] 提出并为其他作者^[6-11] 所使用的模型,给出以应变分量表示相应应力分量的、广义 m 阶横观各向同性的黏弹性材料方程^[6-11, 14]

$$\begin{cases} rr = \sum_{p=0}^m \left[A_{33}^p \frac{p}{t^p} \right] e_{rr} + \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] (e_r + e_z), \\ = \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] e_{rr} + \sum_{p=0}^m \left[A_{11}^p \frac{p}{t^p} \right] e_r + \sum_{p=0}^m \left[A_{12}^p \frac{p}{t^p} \right] e_z, \\ zz = \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] e_{rr} + \sum_{p=0}^m \left[A_{12}^p \frac{p}{t^p} \right] e_r + \sum_{p=0}^m \left[A_{11}^p \frac{p}{t^p} \right] e_z, \\ r = \sum_{p=0}^m \left[A_{44}^p \frac{p}{t^p} \right] e_r, \quad z = \sum_{p=0}^m \left[A_{66}^p \frac{p}{t^p} \right] e_z, \quad rz = \sum_{p=0}^m \left[A_{44}^p \frac{p}{t^p} \right] e_{rz}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 e_{rr} 、 e_r 、 e_z 、 e_r 、 e_z 、 e_{rz} 为柱坐标系中的应变分量, A_{33}^0 、 A_{13}^0 、 A_{11}^0 、 A_{12}^0 等为弹性参数, A_{33}^p 、 A_{13}^p 、 A_{11}^p 、 A_{12}^p 等($p = 1, 2, \dots, m$) 为与第 m 阶黏弹性相关的参数, p/t^p 表示对时间 t 的第 p 阶导数。

考虑到问题中圆柱体的对称性,假设所有函数仅依赖于 r 和时间 t ,因此仅有的非零位移分量 u_r 是 r 和 t 的函数,即, $u_r = u_r(r, t)$ 。在此假设下,应变张量分量 e_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) 可表达为

$$e_{rr} = \frac{u_r}{r}, \quad e_r = \frac{u_r}{r}, \quad e_z = 0, \quad e_{\theta\theta} = e_z = e_{rz} = 0$$

于是式(1)中应力分量可用径向位移 u_r 表示:

$$\begin{cases} rr = \sum_{p=0}^m \left[A_{33}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r} + \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r}, \\ = \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r} + \sum_{p=0}^m \left[A_{11}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r}, \\ zz = \sum_{p=0}^m \left[A_{13}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r} + \sum_{p=0}^m \left[A_{12}^p \frac{p}{t^p} \right] \frac{u_r}{r}, \\ r = \quad z = \quad rz = 0 \end{cases} \quad (2)$$

无法自动满足的仅有的动应力方程为

$$-\frac{r}{r} + \frac{r}{r} = \frac{2}{t^2} \frac{ur}{t^2}, \quad (3)$$

其中 ρ 为材料的密度常量

引入如下无量纲量:

$$r^* = \frac{r}{a}, \quad u_r^* = \frac{ur}{a}, \quad \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{A_{33}^0}, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{A_{13}^0}, \quad t^* = t \quad (3a)$$

由于扰动是由圆柱源表面上的瞬时径向应力产生的,文献[7, 17-19]的作者在求解该问题时,非零位移仅是时间的函数,假定 u_r^* 随时间呈指数衰减,如同边界上指定应力一样,因而位移的无量纲形式可假设如下:

$$u_r^*(r^*, t^*) = \hat{u}_r^*(r^*) e^{-t^*}, \quad (4)$$

当然解也可以采用一种更为广义的形式给出

假定非均匀的横观各向同性黏弹性材料的弹性和黏弹性参数服从以下幂律变化^[17]:

$$A_{33}^p = C_{33}^p r^{*n}, \quad A_{13}^p = C_{13}^p r^{*n}, \quad A_{11}^p = C_{11}^p r^{*n}, \quad A_{12}^p = C_{12}^p r^{*n}, \quad A_{44}^p = C_{44}^p r^{*n} \quad (5)$$

将式(3a)、式(4)和式(5)代入方程(2)中,可得到

$$\sigma_r^* = \left[\frac{C_{33}^0}{C_{33}^p} \frac{2\hat{u}_r^*}{r^*} + \frac{C_{13}^0}{C_{33}^p} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} \right] e^{-t^*}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \left[\frac{C_{11}^0}{C_{13}^p} \frac{2\hat{u}_r^*}{r^*} + \frac{C_{11}^0}{C_{13}^p} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} \right] e^{-t^*} \quad (7)$$

由上述可知,应力方程(3)变换为

$$\frac{2}{r^*} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} + \frac{n+1}{r^*} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} + \frac{n(C_{13}^0/C_{33}^0)}{33} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} - \frac{(C_{11}^0/C_{33}^0)}{11} \frac{\hat{u}_r^*}{r^*} - \frac{\hat{u}_r^*}{33 r^*} = 0, \quad (8)$$

其中

$$\frac{C_{33}^p}{C_{33}^0} = \sum_{p=0}^m (-)^p \frac{C_{33}^p}{C_{33}^0}, \quad \frac{C_{13}^p}{C_{13}^0} = \sum_{p=0}^m (-)^p \frac{C_{13}^p}{C_{13}^0},$$

$$\frac{C_{11}^p}{C_{11}^0} = \sum_{p=0}^m (-)^p \frac{C_{11}^p}{C_{11}^0} = \frac{a^{2-2n}}{C_{33}^0}$$

尽管在某些研究工作中,初始响应可能更为重要,大多数研究者^[7, 17-19]在分析该问题时,与本文类似,仅考虑边界条件,并不设置初始条件

根据以前学者的研究,虽然本问题中未指定初始条件,但圆柱体源表面上场函数的初始值仍然可以从这些函数的最终表达式中得到

由于离圆柱轴一定距离后,径向位移是有限的,且边界表面上承受的是瞬时径向力,因而本问题的边界条件可表述为^[7, 8, 17]:

$$\hat{u}_r^* \text{ 有限}, \quad \sigma_r^* = 0, \quad (9a)$$

$$\sigma_r^* = -P e^{-t^*}, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = 1, \quad (9b)$$

其中 P 为常量

因而,第 1 个问题的基本公式归结为,在式(9)给出的边界条件下,求解微分方程式(8)

1.2 问题的解

1.2.1 情况 $n = 2$

为了便于该问题求解,使用以下替换式:

$$\hat{u}_r^* = \hat{u}_r^{*n/2}, \quad \hat{r} = r^{*(2-n)/2} \quad (10)$$

从而方程(8)变换为

$$\frac{2}{\hat{r}} \frac{\hat{u}}{\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\hat{u}}{\hat{r}} - \left(k_1^2 + \frac{2}{\hat{r}^2} \right) \hat{u} = 0, \quad (11)$$

其中

$$k_1^2 = \frac{4}{(2-n)^2} \frac{*}{33}, \quad \frac{2}{\hat{r}} = \frac{n^2 \frac{*}{33} - 4n(C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{13} + 4(C_{11}^0/C_{33}^0) \frac{*}{11}}{(2-n)^2 \frac{*}{33}}, \quad n=2, \quad (12)$$

(情况 $n=2$, 将会在 1.2.2 节中讨论)

式(11)的解可表示为^[20]

$$\hat{u} = AI_1(k_1 \hat{r}^{(2-n)/2}) + BK_1(k_1 \hat{r}^{(2-n)/2}), \quad (13)$$

其中 I_1, K_1 分别为第 1 类和第 2 类 1 阶的修正 Bessel 函数, A, B 为不依赖于 r 的常数. 综合方程(4)、(10)和(13)得到

$$u_r^* = r^{*-(n/2)} [AI_1(k_1 r^{*(2-n)/2}) + BK_1(k_1 r^{*(2-n)/2})] e^{-t^*} \quad (14)$$

引入边界条件(9)得到

$$A = 0, \quad B = -\frac{2P}{V}, \quad (15)$$

其中

$$V = (n-2)k_1 \frac{*}{33} K_{1+1}(k_1) - \left\{ (1n+n-2) \frac{*}{13} - 2(C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{13} \right\} K_1(k_1) \quad (16)$$

从而, 径向位移分量 u_r^* 和应力分量 σ_r^* 、 τ^* (均为无量纲形式) 可表示为

$$u_r^*(r^*, t^*) = -\frac{2P}{V} r^{*-(n/2)} K_1(k_1 r^{*(2-n)/2}) e^{-t^*}, \quad (17)$$

$$\sigma_r^* = -\frac{P}{V} r^{*(-n-2)/2} F(r^*) e^{-t^*}, \quad (18)$$

$$\tau^* = -\frac{P}{V} r^{*(-n-2)/2} F_1(r^*) e^{-t^*}, \quad (19)$$

其中

$$F(r^*) = (n-2)k_1 \frac{*}{33} r^{*(2-n)/2} K_{1+1}(k_1 r^{*(2-n)/2}) - \left\{ (1n+n-2) \frac{*}{13} - 2(C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{13} \right\} K_1(k_1 r^{*(2-n)/2})$$

和

$$F_1(r^*) = (n-2)k_1 \frac{*}{13} r^{*(2-n)/2} K_{1+1}(k_1 r^{*(2-n)/2}) - \left\{ (1n+n-2) \frac{*}{13} - 2(C_{11}^0/C_{13}^0) \frac{*}{11} \right\} K_1(k_1 r^{*(2-n)/2})$$

1.2.2 情况 $n=2$

当 $n=2$ 时, 方程(11)是无法求得所需要结果的, 于是, 在这种情况下, 通过方程(8)可得

$$\frac{2}{r^*} \frac{u_r^*}{r^*} + \frac{3}{r^*} \frac{u_r^*}{r^*} + \left[2 \frac{C_{13}^0}{C_{33}^0} \frac{*}{33} - \frac{C_{11}^0}{C_{33}^0} \frac{*}{33} - \frac{*}{33} \right] \frac{u_r^*}{r^*} = 0 \quad (20)$$

方程(20)的解可写成以下形式:

$$u_r^* = A_1 r^{*m_1} + B_1 r^{*m_2},$$

其中 A_1 和 B_1 为常量且有

$$m_1, m_2 = -1 \left(1 - 2 \frac{C_{13}^0}{C_{33}^0} \frac{*}{*} + \frac{C_{11}^0}{C_{33}^0} \frac{*}{*} + \frac{*}{*} \right)^{1/2}$$

引入边界条件(9)可得

$$A_1 = 0, B_1 = - \frac{P}{m_2 \frac{*}{*} + (C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{*}}$$

从而,当 $n = 2$ 时, 径向位移分量和应力分量(均为无量纲形式)可表示为

$$u_r^*(r^*, t^*) = - \frac{P}{m_2 \frac{*}{*} + (C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{*}} r^{* m_2} e^{-t^*}, \quad (21)$$

$$\sigma_{rr}^* = - P r^{* m_2 - 1} e^{-t^*}, \quad (22)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = - P \frac{m_2 \frac{*}{*} + (C_{11}^0/C_{13}^0) \frac{*}{*}}{m_2 \frac{*}{*} + (C_{13}^0/C_{33}^0) \frac{*}{*}} r^{* m_2 - 1} e^{-t^*} \quad (23)$$

2 表面上扭转作用问题

2.1 基本公式和边界条件

本节将求解因圆柱体表面上瞬时扭转引起的扰动问题。为了和现有问题的实际情况相一致, 假设 $u(r, t)$ 为位移中仅有的非零分量, 且应力分量 σ_r 可表示为

$$\sigma_r = \sum_{p=0}^m \left(A_{44}^p \frac{r^p}{t^p} \right) e_r, \quad (24)$$

其中 $e_r = \frac{u}{r} - \frac{u}{r}$

待求解的动应力方程为

$$\frac{r}{r} + \frac{2}{r} \frac{r}{r} = \frac{2}{t^2} \frac{u}{t^2} \quad (25)$$

引入无量纲量

$$r = \frac{r}{A_{44}^0}, u^* = \frac{u}{a}, t^* = t, u^*(r^*, t^*) = \hat{u}^*(r^*) e^{-t^*},$$

可得

$$\sigma_r^* = \left[\sum_{44}^* \left(\frac{\hat{u}^*}{r^*} - \frac{\hat{u}^*}{r^*} \right) \right] e^{-t^*} \quad (26)$$

从而, 动应力方程(25)变换为

$$\frac{2}{r^{*2}} \frac{\hat{u}^*}{r^{*2}} + \frac{n+1}{r^*} \frac{\hat{u}^*}{r^*} - (n+1) \frac{\hat{u}^*}{r^{*2}} - \frac{a^2}{C_{44}^0} \frac{2}{44} \frac{\hat{u}^*}{r^{*n}} = 0, \quad (27)$$

其中 $\sum_{44}^* = \sum_{p=0}^m (-X)^p \frac{C_{44}^p}{C_{44}^0}$

因为无穷远处, 位移仍是有限的, 同时圆柱体表面上作用着扭转, 边界条件可表示为:

$$\hat{u}_H^* \text{ 有限}, \quad r^* \rightarrow 1, \quad (28a)$$

$$\sigma_{rH}^* = -K_{44}^* S e^{-t^*}, \quad r^* = 1, \quad (28b)$$

其中 S 为常数

2.2 问题的解

2.2.1 情况 $n \neq 2$

根据替换式

$$\hat{u}_H^* = \hat{u}_1 r^{* - n/2}, \quad \hat{r}_1 = r^{* (2-n)/2},$$

方程(27)转换为

$$\frac{5^2 \hat{u}_1}{5 \hat{r}_1^2} + \frac{1}{\hat{r}_1} \frac{5 \hat{u}_1}{5 \hat{r}_1} - \left(k_2^2 + \frac{\hat{M}}{\hat{r}_1^2} \right) \hat{u}_1 = 0, \quad (29)$$

其中

$$k_2^2 = \frac{4Q_x^2 X^2}{(2-n)^2 C_{44}^0 K_{44}}, \quad \hat{M} = \left(\frac{2+n}{2-n} \right)^2,$$

(式中 $n \neq 2$, 而情况 $n = 2$, 将会在后面讨论) 1

通过求解方程(29), 得到

$$u_H^* = r^{* -(n/2)} [C \text{IM}_2(k_2 r^{* (2-n)/2}) + DK \text{M}_2(k_2 r^{* (2-n)/2})] e^{-t^*}, \quad (30)$$

其中 C, D 为常数1

引入边界条件(28), 得到

$$C = 0, \quad D = -\frac{2S}{F}, \quad (31)$$

其中 $F = (n-2)k_2 \text{KM}_2(k_2) - (Mn + n - 2M + 2) \text{KM}_2(k_2) I$

相应的位移分量和应力分量的无量纲形式为

$$u_H^*(r^*, t^*) = -\frac{2S}{r^{* (n/2)} F} \text{KM}_2(k_2 r^{* (2-n)/2}) e^{-t^*}, \quad (32)$$

$$R_{rH}^* = -K_{44}^* S r^{* - n/2 - 1} \frac{F_2(r^*)}{F} e^{-t^*}, \quad (33)$$

其中

$$F_2(r^*) = (n-2)k_2 r^{* (2-n)/2} \text{KM}_2(k_2 r^{* (2-n)/2}) - (Mn + n - 2M + 2) \text{KM}_2(k_2 r^{* (2-n)/2}) I$$

2.2.2 情况 $n = 2$

微分方程(27)可简化为以下形式:

$$\frac{5^2 \hat{u}_H^*}{5 r^{* 2}} + \frac{3}{r^*} \frac{5 \hat{u}_H^*}{5 r^*} - \left(3 + \frac{Q_x^2 X^2}{C_{44}^0 K_{44}} \right) \frac{\hat{u}_H^*}{5 r^{* 2}} = 0, \quad (34)$$

这是一个常微分方程, 其解为

$$u_H^* = C_1 r^{* m_1} + D_1 r^{* m_2}, \quad (35)$$

其中 C_1, D_1 为常数且有

$$m_1, m_2 = -1 \pm \left(4 + \frac{Q_x^2 X^2}{C_{44}^0 K_{44}} \right)^{1/2}$$

由边界条件(28)得到

$$D_1 = 0, \quad C_1 = -\frac{S}{m_1 - 1}$$

相应的位移分量和应力分量为

$$u_H^*(r^*, t^*) = -\frac{S}{(m_1 - 1)} r^{* m_1} e^{-t^*}, \quad R_{rH}^* = -K_{44}^* S r^{* m_1 - 1} e^{-t^*}$$

很明显, 仅有的位移分量 u_H^* 和应力 R_{rH}^* 分量均为瞬态量, 经过一段较长时间后将消失, 而且这些量是轴对称的, 大小取决于离开圆柱轴的径向距离1

3 数值分析与讨论

为了便于数值计算,无量纲参数采用如下数值^[10]:

$$P = 1, E = 0.5, \frac{C_{13}^0}{C_{33}^0} = 0.3, \frac{C_{11}^1}{C_{33}^1} = 0.8, \frac{C_{33}^2}{C_{33}^0} x = \frac{1}{10}, \frac{C_{33}^2}{C_{33}^0} x^2 = \frac{1}{20}, \frac{C_{33}^3}{C_{33}^0} x^3 = \frac{1}{30},$$

$$\frac{C_{13}^1}{C_{13}^0} x = \frac{1}{40}, \frac{C_{13}^2}{C_{13}^0} x^2 = \frac{1}{50}, \frac{C_{13}^3}{C_{13}^0} x^3 = \frac{1}{60}, \frac{C_{11}^1}{C_{11}^0} x = \frac{1}{70}, \frac{C_{11}^2}{C_{11}^0} x^2 = \frac{1}{80}, \frac{C_{11}^3}{C_{11}^0} x^3 = \frac{1}{90}$$

通过现有商业软件 MS Excel 和 MathCAD-12, 对第 1 个问题, 即瞬时径向力作用问题进行了数值计算并绘制了图形 1。由于具有相似的性质, 本文不再对表面上作用扭转问题进行数值计算。图形本身已可说明了问题, 但是在讨论过程中, 还是会指出某些重要的特性 1

图 1 表明, 当 $r = 3, n = 4$ 时, 对不同黏弹性阶 ($p = 1, 2, 3$), 无量纲径向应力 R_r^* 随着无量纲时间 t^* 变化的规律 1 注意到, 对任意特定阶数的黏弹性系数, 径向应力的绝对值随着时间 t^* 的增加而从最大值开始逐渐减少 1 在任意特定的时刻处, 随着黏弹性阶数的增加, 径向应力数值也随之增加 1

图 2 表明, 当 $r^* = 3$ 和黏弹性阶 $p = 3$ 时, 在变量的不同幂次 ($n = 0.0, 0.5, 2.0, 2.5, 3.0$), 径向应力随着时间 t^* 变化的规律 1 该例中, 对任意特定的 n 值, 应力数值也随着时间 t^* 的增加而连续减少 1 对任意特定的 t^* , 当 n 等于 2 时, 径向应力值达到最小 1 不论 n 大于 2, 还是小于 2, 径向应力始终在增加 1 其它图形中, 也可以得出类似的结论 1 根据 Yang 和 Shen^[21]、Zhang 和 Wang^[22] 提供的分析表明, 这种特性在承受热负荷的 FGM 结构中十分普遍 1

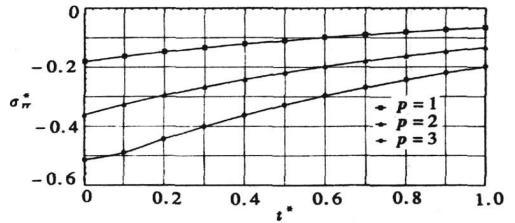


图 1 当 $r^* = 3$ 和 $n = 4$ 时 R_r^* 和 t^* 的关系

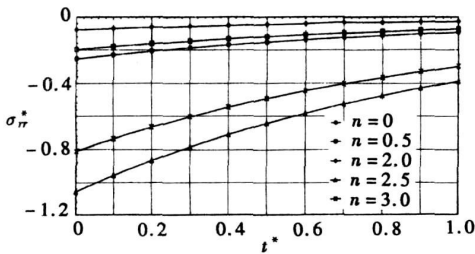


图 2 当 $r^* = 3$ 和 $p = 3$ 时 R_r^* 和 t^* 的关系

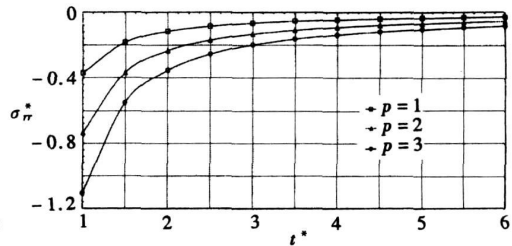


图 3 当 $t^* = 1$ 和 $n = 4$ 时 R_r^* 和 r^* 的关系

图 3 表明, 当 $t^* = 1$ 和 $n = 4$ 时, 对不同的黏弹性阶 ($p = 1, 2, 3$), 径向应力随着径向半径 r^* 变化的规律 1 对任意黏弹性阶, 在区间 $1 \leq r^* \leq 2.5$ 内, 随着 r^* 的增加, R_r^* 的绝对值迅速减小 1 当 $r^* > 2.5$ 时, R_r^* 减少速度非常慢 1 从图 3 还可以观察到, 在边界处 ($r^* = 1$), 对任意特定黏性阶, R_r^* 值达到最大, 且对不同阶的黏弹性, 对应不同的最大值 $|R_r^*|$ 1 还可以发现, 扰动在圆柱孔表面显著, 随着离开圆柱孔表面大约 2.5 倍的径向距离处, 扰动迅速减弱; 扰动随着远离圆柱孔表面变得越来越小, 直到最后变得很微弱 1 当黏弹性阶增加时, 圆柱孔附近的扰动显著增加 1 在有限径向距离处 ($r \setminus 1$) R_r^* 的值随着黏弹性阶的增加而增加 1

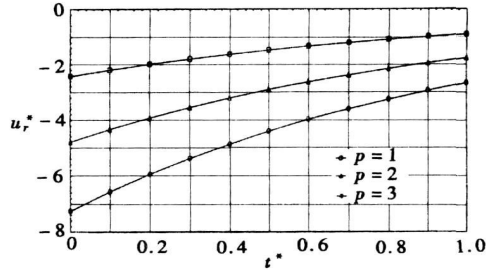
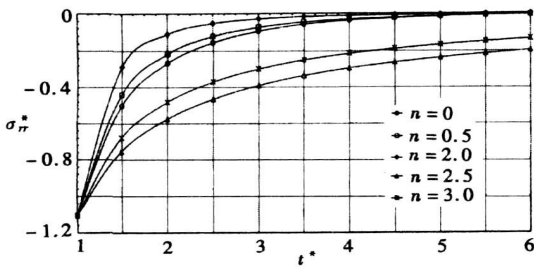


图4 当 $t^* = 1$ 和 $p = 3$ 时 R_r^* 和 r^* 的关系

图5 当 $r^* = 3$ 和 $n = 4$ 时 u_r^* 和 t^* 的关系

图4表明, 当 $t^* = 1$ 和 $p = 3$ 时, 对不同 $n = 0, 0.5, 2.0, 2.5, 3.0$ 值, 主变量 R_r^* 随着 r^* 变化的5条曲线1 显然, 在圆柱孔表面($r^* = 1$), 对任意的 n 值, 对应的径向应力绝对值都有相同的最大值1 径向距离达到一定值后, 源于边界的扰动快速消失1 在离表面边界一定远的距离处, 扰动逐渐减小并最终消失1 特别注意 $n = 2$ 对应的曲线, 当 $n = 2$ 时, 对于一个特定的径向距离($r^* \times 1$), $|R_r^*|$ 达到最小, 而 $n \neq 2$ 时, 该值又总是增加的1 在表面处($r^* = 1$), 径向应力与 n 无关1

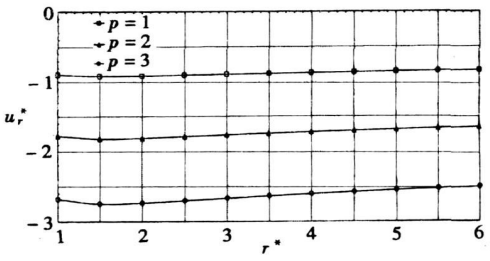
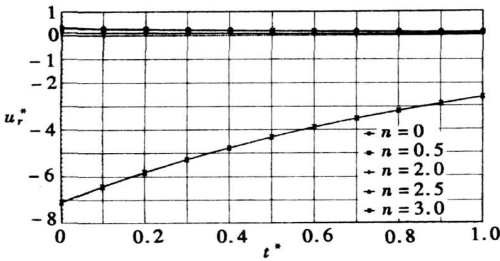


图6 当 $r^* = 3$ 和 $p = 3$ 时 u_r^* 和 t^* 的关系

图7 当 $t^* = 3$ 和 $n = 3$ 时 u_r^* 和 r^* 的关系

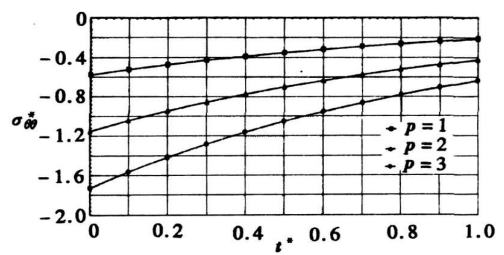
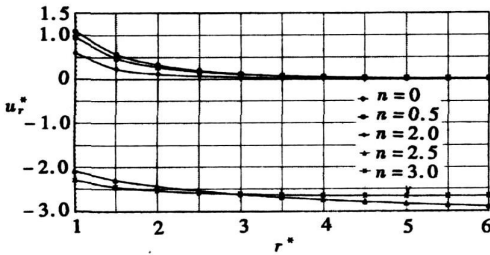


图8 当 $t^* = 1$ 和 $p = 3$ 时 u_r^* 和 r^* 的关系

图9 当 $r^* = 3$ 和 $n = 4$ 时 R_{rr}^* 和 t^* 的关系

图5显示了 $n = 4$ 时, $p = 1, 2, 3$ 对应的3条曲线1 图6显示了黏弹性阶 $p = 3$ 时, $n = 0, 0.5, 2.0, 2.5, 3.0$ 时, 对应的5条曲线1 这些曲线都显示了主变量 u_r^* 随着 t^* 的变化规律1 从图5可以看到, 径向位移始终随着黏弹性阶的增加而增加1 从图6可以看出, $n = 2.5$ 和 $n = 3$ 对应的两条曲线没有明显区别, 此外, $n = 0.5$ 和 $n = 2$ 所对应曲线的差别也很小, 从而可知, 径向位移的显著变化是伴随着 n 的较大改变而产生的1

从图7可以看出, 对于一个特定的黏弹性阶, 随着 r^* 的变化, $|u_r^*|$ 的变化很小1 但是, 对于一个特定的 r^* 值, $|u_r^*|$ 的变化随着黏弹性阶的增加而明显增加1 图8反映了, 当 $t^* =$

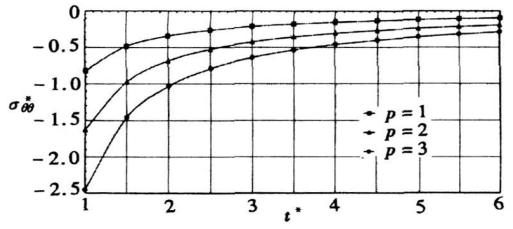
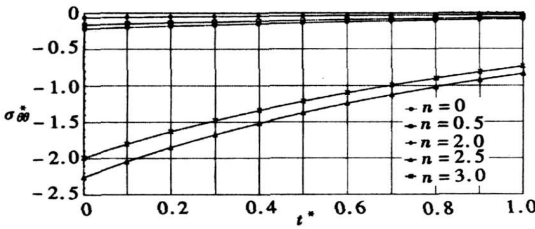


图 10 当 $r^* = 3$ 和 $p = 3$ 时 R_{HH}^* 和 t^* 的关系 图 11 当 $t^* = 1$ 和 $n = 3$ 时 R_{HH}^* 和 r^* 的关系

1 和 $p = 3$ 时, 不同的 $n = 0.0, 0.5, 2.0, 2.5, 3.0$ 值, u_r^* 随着 r^* 的变化规律 1 图中可以看出, 当 $r^* > 4$ 时, $n = 0.0, n = 0.5, n = 2.0$ 所对应的 3 条曲线几乎一致 1 在区间 $1 \leq r^* \leq 4$, $|u_r^*|$ 从最大值连续减小, 在 $r^* = 4$ 时逼近于 0 1 从 $n = 2.5$ 和 $n = 3.0$ 所对应的曲线可以看出, 当 $r^* = 3$ 时, $|u_r^*|$ 具有相同的值 1 有趣的是, 从图 8 中还可以发现, 对所有 r^* 值, 包括 $r^* = 1$ (圆柱体表面), 当幂变量 n 等于 2.5 和 3.0 时, 位移始终为负; 当 $n = 0.0$ (匀质)、 $n = 0.5, n = 2.0$ 时, 位移却始终大于 0 1 于是可以得到结论, 当 $n = 2.5$ 和 $n = 3.0$ 时, 如果在圆柱孔内表面施加压力, 则圆柱孔变小 1

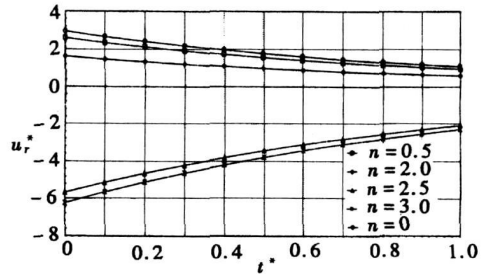
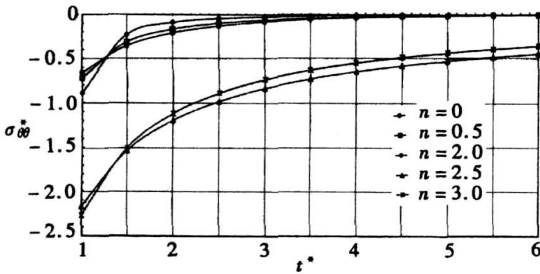


图 12 当 $t^* = 1$ 和 $p = 3$ 时 R_{HH}^* 和 r^* 的关系 图 13 当 $r^* = 1$ 和 $p = 3$ 时 u_r^* 和 t^* 的关系

在 $r^* = 1$ 时, 对不同 n 值, 包括 $n = 0$ (匀质材料), 讨论径向位移随着时间的变化过程 (图 13), 或者通过对 $n \neq 0$ (非匀质材料) 和 $n = 0$ (匀质材料), 就其结果进行比较 1 图 9 到图 12 为分别在不同的 t^* 和 r^* 的条件下, R_{HH}^* 的变化规律 1 对这些图形中的曲线可以进行类似的分析 1

4 结 论

- 1) 除 $n = 2$ 时, 无法用修正的 Bessel 函数表示以外, 对所有的 n 值, 其径向和周向振动的所有场函数, 都可以用封闭型式的修正 Bessel 函数项来表示 1
- 2) 位移分量和应力分量在性质上都是瞬态的, 因此, 经过一段时间后会消失 1 另外, 位移分量和应力分量是轴对称的, 其大小取决于离开源圆柱轴的径向距离 1
- 3) 随着时间的增加, 径向应力的绝对值逐渐减少 1 但是, 在任意特定时刻, 径向应力的绝对值又随着黏弹性阶的增加而增加 1
- 4) 当 $n = 2$ 时, 径向应力最小 1 不管 n 是否大于或小于 2, 径向应力总是增加的 1 类似特性在承受热负荷的 FGM 结构中十分普遍 1
- 5) 随着时间的增加, 径向位移的绝对值逐渐减少 1 而在任意特定时刻, 黏弹性阶的增加

将导致径向位移的增加1

6) 值得注意的是,对某些 $n > 2$ 的值,当在圆柱孔表面上施加压力时,孔洞将缩小1

7) 最后,分析得出最为重要的结论是,在无限、横观各向同性黏弹性固体介质中,由源圆柱体表面上的瞬时力引起的扰动,包括径向位移分量和应力分量,随着高阶黏弹性和弹性参数的不均匀性的增加,其值发生显著的变化,因此这些变量在任何时候都是不可忽视的1

致谢 感谢 Sri Sourav Acharya、MS、IIT Madras、AERB 在数值计算和图形方面提供的建议,感谢本文的审稿人提供的宝贵意见和评价1

[参 考 文 献]

- [1] Flugge W. Viscoelasticity [M]. London: Blasdell Publishing Co, 1967.
- [2] Ezzat M A. Fundamental solution in generalized magneto thermoelasticity with two relaxation times for perfect conductor cylindrical region[J]. Internat J Engrg Sci, 2004, 42(13/14): 1503-1519.
- [3] Bullen K E. An Introduction to Theory of Seismology [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1963.
- [4] Nowacki W. Dynamics of Elastic System [M]. London: Chapman and Hall, 1963.
- [5] 约塞夫#H#M . 带球形空腔的广义热弹性无限大材料的弹性模量和传热系数与材料参考温度的相关性[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(4): 431-436.
- [6] Sengupta P R, De N, Kar M, et al. Rotatory vibration of sphere of higher order viscoelastic solid[J]. Internat J Math Math Sci, 1994, 17(4): 799-806.
- [7] Biswas P K, Sengupta P R. Torsional vibration of a non-homogeneous viscoelastic circular cylinder involving strain and stress rate of higher order[J]. Acta Ciencia Indica, 1991, 17M(4): 747-754.
- [8] Biswas P K, Sengupta P R. Disturbances in an infinite visco-elastic medium by transient radial forces and twist on the surface of a cylindrical hole considering rate of stress and rate of strain of higher order[J]. Indian J Theor Phys, 1989, 37(1): 61-70.
- [9] Das T K, Sengupta P R. Effect of damping on the torsional vibration of a homogeneous viscoelastic circular cylinder including strain rate stress rate[J]. Acta Ciencia Indica, 1991, 17M(2): 271-280.
- [10] Bhattacharya S, Sengupta P R. Disturbances in a general viscoelastic medium due to impulsive forces on a spherical cavity[J]. Gerlands Beitr Geophysik, Leipzig, 1978, 87 (8): 57-62.
- [11] Biswas P K, Das T K. Propagation of waves in a higher order infinite visco-elastic medium by transient radial forces and twist on the surface of a cylinder[J]. Acta Ciencia Indica, 1991, 17M(3): 457-462.
- [12] Ghosh N C, Sengupta S. Radial deformation of a linearly varying non-homogeneous spherically anisotropic elastic spherical nodule with concentric spherical inclusion[J]. Bull Calcutta Math Soc, 1997, 89(2): 115-126.
- [13] Gaikwad M N, Deshmukh K C. Thermal stresses in anisotropic cylinder[J]. Bull Calcutta Math Soc, 2004, 96(6): 447-452.
- [14] Mukherjee J. Radial vibration of an inhomogeneous aeolotropic cylindrical shell[J]. Indian J Mech Maths, 1969, 7(2): 76-82.
- [15] Mondal A K, Sengupta S. Twisting of a hollow circular cylinder of cylindrically aeolotropic non-homogeneous material[J]. J Bihar Math Soc, 1999, 19(1): 41-50.
- [16] Voigt W. Theortische student ber die elasticitatsverhalnisse krystalle [J]. Abh Ges Wiss Goettingen, 1887, 34.
- [17] Mukherjee J. The disturbances in an infinite inhomogeneous medium due to transient forces and

Pure and Appl Geoph (PAGEOPH), 1969, 76

(5): 65-70.

- [18] Allam M N, Elsibai K A, AbouElregal A E. Thermal stresses in a harmonic field for an infinite body with a circular cylindrical hole without energy dissipation[J]. Journal of Thermal Stresses, 2002, 25 (1): 57-67.
- [19] Mukhopadhyay S. A problem on thermoelastic interactions without energy dissipation in an unbounded body with a spherical cavity subjected to harmonically varying stress[J]. Bull Calcutta Math Soc, 2007, 99(3): 261-270.
- [20] Arfken G B, Weber H J. Mathematical Methods for Physicists [M]. Fifth Ed. New Delhi: Academic Press, 2001, 709-716.
- [21] Yang J, Shen H S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions[J]. Composites Part B: Engineering, 2003, 34(2): 103-115.
- [22] Zhang N H, Wang M L. Thermo-viscoelastic deformations of functionally graded thin plates[J]. European Journal of Mechanics-A/ Solids, 2007, 26(5): 872-886.
- [23] Ghosh M K. Stresses in a semi-infinite non-homogeneous elastic medium due to torsion[J]. J Indian Acad Math, 2003, 25(2): 371-381.

V i b r a t i o n o f a n I n f i n i t e I n h o m o g e n e o u s T r a n s v e r s e l y
I s o t r o p i c V i s c o e l a s t i c M e d i u m W i t h a
C y l i n d r i c a l H o l e

D. P. Acharya¹, Indrajit Roy², P. K. Biswas³

(1. Bangabasi Morning College, Kolkata 700 009, WB, India;

2. Department of Mathematics, University of Kalyani, Kalyan, Nadia, WB, India;

3. Department of Mathematics, Kandrapara College, Kandrapara, WB, India)

Abstract: The influences of higher order viscoelasticity and the inhomogeneities of the transversely isotropic elastic parameters on the disturbances in an infinite medium, caused by the presence of a transient radial force or twist on the surface of a cylindrical hole with circular cross section are investigated. Following Voigt's model for higher order viscoelasticity the nonvanishing stress components valid for a transversely isotropic and higher order viscoelastic solid medium were deduced in terms of radial displacement component. Considering the power law variation of elastic and viscoelastic parameters, the stress equation of motion was developed. Solving this equation under suitable boundary conditions due to transient forces and twists radial displacement and relevant stress components were found out in terms of modified Bessel functions. The problem for the presence of transient radial force was numerically analysed. Modulations of displacement and stresses due to different order of viscoelasticity and inhomogeneity were graphically depicted. The numerical study of the disturbance caused by the presence of twist on the surface may be similarly done and is not pursued.

Key words: higher order viscoelasticity; inhomogeneity and transversely isotropy; transient force and twist; radial displacement; stress component; modified Bessel function