应用数学和力学,第 29 卷 第 3 期
2008 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 3, Mar. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 03-0325-06

波动方程的差分反演模型*

王德明

(哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001)

(王彪推荐)

摘要: 为了反演波动方程的系数函数, 利用差分离散及扰动假设,推导出一个适合迭代的数值模型. 解决了以往方法中正反演模型数值精度不一致问题, 以及由此带来的一系列问题. 经数值模拟计算说明,该方法是可行的和有效的.

关 键 词: 反问题; 波动方程; 扰动迭代

中图分类号: O241.8 文献标识码: A

引 言

波动方程反问题是指那些在正问题中的一个或几个原来的已知量,现在变为未知. 而原问题的未知量可能仍是未知的. 我们只知道与这些未知量有关的某些附加信息,用方程、定解条件与附加的某些其他条件来确定这些未知量.

在以往的反问题求解方法中, 脉冲谱技术(PST)[1]是一个典型的方法之一. 它的基本思想是,为了识别某一系统,可向该系统传送某些信息,如脉冲信息,然后从接收的信息中进行分析与综合. 信息的传送与接收在时域中进行,而分析与综合则是借助于一个迭代过程在频域中进行.

脉冲谱技术的分析与综合过程是借助于 Green 函数的理论, 将每个迭代过程中的关于未知参数的微分方程转化为第一类 Fredholm 积分方程. 理论上讲, 这个转化过程是严格的. 然而, Green 函数的解析表达式往往是不易得到的. 它们的数值求解不仅计算量大,而且精度低,这是脉冲谱技术在应用时遇到的一个重要问题. 如果选取特殊的附加条件及未知参数的特殊边界条件,有时也可以避开 Green 函数的计算[2],这无疑又限制了测量条件, 因为所选取的特殊附加条件,在工程中未必是能够实现的. 更何况在迭代过程中,未知参数的特殊边界条件,直接影响迭代的收敛性. 而且,微分方程的离散和积分方程的离散, 其精度是不一致的. 这也是以往在方法中的计算结果只能取一步迭代的重要原因之一.

根据前人的扰动假设思想,本文在频域中构造一个扰动迭代过程,利用中心差分格式进行离散,将波动方程用离散值的矩阵和向量模型来代替. 进而利用矩阵分析原理,将模型转化为关于迭代中未知量的数值反演模型. 这样,避开了 Green 函数的计算, 而将 Green 函数的计算

* 收稿日期: 2007-09-24; 修订日期: 2008-01-24
作者简介: 王德明(1960—), 男, 黑龙江人, 副教授, 博士(Tel: +86-451-86239789; E-mail: wangdeming@hit.edu.cn).

隐含在矩阵的转换技巧之中．这就去掉了实际工程中对测量条件的限制．并且保证了正、反演模型中的数值精度的一致性，去掉了由于正、反演模型中的数值精度的不一致，给迭代带来的较大误差的问题．这是迭代不收敛的一个重大因素．

应该指出的是，反问题往往是不适定的．数值求解时，一般需要加入一些对解的限制．例如光滑化假设[3-5]等．本文中采用 Phillips 和 Twemey[3-4] 的光滑化方法求解反问题，结果是令人满意的．

1 差分反演模型

考虑波动方程（杆的振动微分方程）的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = m(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x \in [a, b],\ t \geqslant 0, \\ u(a, t) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial x}u(b, t) = f(t), \\ u(x, t) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(x, t)$ 表示位移函数；$K(x)$、$m(x)$ 分别表示刚度参数和质量参数．

附加条件取 $x = x_s$ 处的位移

$$u(x_s, t) = g(t), \qquad x_s \in (a, b],\ t > 0. \tag{2}$$

这里，假设 $m(x)$ 是已知的，$K(x)$ 是未知的待定参数． 反问题为：根据方程(1) 式和附加条件(2) 式，反演未知参数 $K(x)$．

对(1) 式、(2) 式取关于时间变量 t 的 Laplace 变换，将时域问题转变为频域问题．得

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{dV}{dx}\right) + \omega^2 m(x)V(x, \omega) = 0, \\ V(a, \omega) = 0,\ \dfrac{d}{dx}V(b, \omega) = F(\omega), \end{cases} \tag{3}$$

$$V(x_s, \omega) = G(\omega), \tag{4}$$

其中，V、F、G 分别为 u、f、g 的 Laplace 变换的映象．

扰动假设

$$\begin{cases} K(x) = K_0(x) + k(x), \\ V(x, \omega) = V_0(x, \omega) + v(x, \omega), \end{cases} \tag{5}$$

其中，$K_0(x)$ 为初始参数函数，可以取为已知的函数或常数；$k(x)$ 为 $K(x)$ 与 $K_0(x)$ 的差值，称为扰动参数，为未知待求量；$V_0(x, \omega)$ 和 $v(x, \omega)$ 分别为对应于 $K_0(x)$ 的初始位移函数和对应于 $k(x)$ 的扰动位移函数．

将(5) 式代入方程(3) 式及附加条件(4) 式，并进行分离，得

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K_0(x)\dfrac{dV_0}{dx}\right) + \omega^2 m(x)V_0(x, \omega) = 0, \\ V_0(a, \omega) = 0,\ \dfrac{d}{dx}V_0(b, \omega) = F(\omega) \end{cases} \tag{6}$$

和

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[K_0(x) + k(x))\dfrac{dv}{dx}\right] + \omega^2 m(x)v(x, \omega) = \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dV_0}{dx}\right), \\ v(a, \omega) = 0,\ \dfrac{d}{dx}v(b, \omega) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$v(x_s, \omega) = G(\omega) - V_0(x_s, \omega). \tag{8}$$

取

$$x_i = a + ih, \ h = \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

将(9)式代入(6)式、(7)式中的方程,并经边界条件处理,则得

$$\boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{P}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{k}, \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \left\{0, 0, \cdots, h^2 F(\omega)\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -K_{01} & K_a & -K_{02} & & & \\ & -K_{02} & K_b & -K_{03} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -K_{0n-1} & K_c & -K_{0n} \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

其中

$$K_a = K_{01} + K_{02} + \omega^2 m(x_1) h^2, \ K_b = K_{02} + K_{03} + \omega^2 m(x_2) h^2,$$

$$K_c = K_{0n-1} + K_{0n} + \omega^2 m(x_{n-1}) h^2;$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -K_1 & K_d & -K_2 & & & \\ & -K_2 & K_e & -K_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -K_{n-1} & K_f & -K_n \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

其中

$$K_d = K_1 + K_2 + \omega^2 m(x_1) h^2, K_e = K_2 + K_3 + \omega^2 m(x_2) h^2,$$

$$K_f = K_{n-1} + K_n + \omega^2 m(x_{n-1}) h^2;$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ -(V_{01} - V_{00}) & (V_{02} - V_{01}) & & & \\ & -(V_{02} - V_{01}) & (V_{03} - V_{02}) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(V_{0n-1} - V_{0n-2}) & (V_{0n} - V_{0n-1}) \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times n},$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \left\{V_{00}, V_{01}, \cdots, V_{0n}\right\}^{\mathrm{T}}, \ V_{0i} = V_0(x_i, \omega),$$

$$\boldsymbol{v} = \left\{v_0, v_1, \cdots, v_n\right\}^{\mathrm{T}}, \ v_i = v(x_i, \omega), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

$$\boldsymbol{k} = \left\{k_1, k_2, \cdots, k_n\right\}^{\mathrm{T}}, \ k_i = k(x_{i-1/2}),$$

$$K_{0i} = K_0(x_{i-1/2}), \ K_i = K_0(x_{i-1/2}) + k(x_{i-1/2}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由(10)式和(11)式,容易得到

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{K}_0^{-1} \boldsymbol{P},$$

$$v_s = \boldsymbol{w}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{w} = \{0, \cdots, 0, w_s, 0, \cdots, 0\}, \quad w_s = 1$$

而 $$v_s = v(x_s, \omega) = G(\omega) - V_0(x_s, \omega).$$

因此, 取 $\omega = \omega_j (j = 1, 2, \cdots, M; M > n)$, 则有

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{k}, \tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{Y} = \{G(\omega_1) - V_0(x_s, \omega_1), G(\omega_2) - V_0(x_s, \omega_2), \cdots, G(\omega_M) - V_0(x_s, \omega_M)\}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{E}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}[\boldsymbol{K}(\omega_1)]^{-1}\boldsymbol{H}_0(\omega_1) \\ \boldsymbol{w}[\boldsymbol{K}(\omega_2)]^{-1}\boldsymbol{H}_0(\omega_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}[\boldsymbol{K}(\omega_M)]^{-1}\boldsymbol{H}_0(\omega_M) \end{bmatrix}_{M\times n}.$$

在这里, 当 $M > n$ 时, (12) 式的求解可采用最小二乘法的思想, 即求解方程

$$\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}. \tag{13}$$

这样, (10) 式和 (13) 式就构成了求解扰动参数 $\boldsymbol{k}$ 的差分反演模型. 应该指出的是, 方程 (13) 式是关于 $\boldsymbol{k}$ 的非线性方程, 即 $\boldsymbol{K}$ 中含有 $\boldsymbol{k}$ 的分量, 需采用迭代的方法求解. 迭代过程为

1) 取 $\boldsymbol{k}^{(0)} = \boldsymbol{0}$, 代入中 $\boldsymbol{K}$, 求解 (13) 式得到 $\boldsymbol{k}^{(1)}$;

2) 将 $\boldsymbol{k}^{(1)}$ 代入 $\boldsymbol{K}$ 中, 求解 (13) 式得到 $\boldsymbol{k}^{(2)}$;

3) 如此循环下去, 直到收敛到稳定值.

2 数 值 模 拟

为了检验方法的可行性和有效性, 采用数值模拟的方法对反演模型进行验证. 数值模拟的过程为:

1) 首先给定未知参数 $k^*(x)$ 的准确形式, 亦即给定 $K^*(x) = K_0(x) + k^*(x)$ 的准确形式;

2) 将 $K^*(x)$ 代入方程 (3) 式, 利用类似 (10) 式的求解方法, 可得到 $V(x_s, \omega_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, M)$. 即生成数据

$$G(\omega_j) = V(x_s, \omega_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, M;$$

3) 给定初始参数值 $K_0(x)$;

4) 对选定的 $\omega = \omega_j (j = 1, 2, \cdots, M)$, 求解 (10) 式, 得到 $V_0(x_s, \omega_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, M)$;

5) 采用文中的迭代方法求解 (13) 式, 直到达到满意的精度为止;

6) 比较 $K^*(x)$ 与 $K(x)$ 比较, 以检验方法的可行性和有效性.

由于 (13) 式通常是一病态方程组, 需要采用特殊的处理技巧. 本文采用 Phillips 的光滑方法.

典型的数值模拟结果见表 1 和表 2 所示.

算例 1

$$K^*(x) = 1 - 0.1\cos(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

模拟计算时, 取 $K_0(x) \equiv 1$,

$$x_i = i\pi/n,$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, n; n = 10; \quad \omega_j = 2\pi j, \ j = 1, 2, \cdots, M; M = 20, x_s = \pi,$$

迭代 3 次的结果见表 1 所示.

表 1 算例 1 的数值模拟结果

$x_{i-1/2}$	$K^*(x_{i-1/2})$	$K(x_{i-1/2})$	$\vert K^*-K\vert$
0.157 1	0.901 2	0.909 2	0.008 0
0.471 2	0.910 9	0.922 6	0.011 7
0.785 4	0.929 3	0.935 1	0.005 8
1.099 6	0.954 6	0.946 7	0.007 9
1.413 7	0.984 4	0.956 1	0.028 3
1.727 9	1.015 6	0.965 3	0.050 3
2.042 0	1.045 4	0.975 6	0.069 8
2.356 2	1.070 7	0.994 1	0.076 6
2.670 4	1.089 1	1.025 4	0.063 7
2.984 5	1.098 8	1.072 2	0.026 6

算例 2

$$K^*(x) = 1 - \frac{0.1}{1+25(x-0.5)^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

模拟计算时, 取 $K_0(x) = 1$,

$x_i = i\pi/n$,

$i = 0, 1, 2, \cdots, n; n = 10;\ \omega_j = 2\pi j,\ j = 1, 2, \cdots, M; M = 20$ 和 $x_s = 1$ 迭代 15 次的结果见表 2 所示.

表 2 算例 2 的数值模拟结果

$x_{i-1/2}$	$K^*(x_{i-1/2})$	$K(x_{i-1/2})$	$\vert K^*-K\vert$
0.05	0.983 5	0.989 1	0.005 6
0.15	0.975 4	0.966 6	0.008 8
0.25	0.961 0	0.945 6	0.015 4
0.35	0.936 0	0.928 6	0.007 4
0.45	0.905 9	0.918 7	0.012 8
0.55	0.905 9	0.918 3	0.012 4
0.65	0.936 0	0.927 9	0.008 1
0.75	0.961 0	0.944 9	0.016 1
0.85	0.975 4	0.964 1	0.011 3
0.95	0.983 5	0.979 9	0.003 6

3 讨 论

通过数值模拟计算表明, 本文的方法是可行的和有效的.

1) 本文方法中, 附加测量条件的位置 x_s 不受任何限制, 在实际应用时, 可根据需要和条件适当地选取.

2) ω 值的选取不同, 直接影响求解过程的稳定性. 适当地选取 ω 的离散值, 可避免方程(13)式的病态问题. 否则需采用特殊的方法求解, 如本文中采用 Phillips 的光滑化方法, 可取得较好的效果.

3) 理论上讲,迭代过程的收敛性分析是比较复杂的．通过大量的数值计算及分析,对扰动参数较小的情况,迭代过程一般都是收敛的．所以,本文的方法特别适用于力学中的结构微小参数识别问题．例如,用于识别由于磨损、连接及缺陷等故障所引起的结构参数的微小变化．这时,迭代初值可取 $\boldsymbol{k}^{(0)} \approx \mathbf{0}$．如果没有任何先验知识,可直接取 $\boldsymbol{k}^{(0)} = \mathbf{0}$.

4) 本文的方法中,由于直接利用微分方程的差分离散,所以,正、反演模型是对应的．避免了由于离散过程的不一致所带来的模型误差．例如,微分方程的离散精度与积分方程的离散精度的不一致将导致数值模型的误差,从而使方程(13)式的病态加剧．这正是本文方法可以迭代至收敛,而以往的方法只能取一步迭代的重要原因之一．

[参 考 文 献]

[1] Chen Y M, Tsien D S. A numerical algorithm for romote sensing of density profiles of simple ocean model by acoustic pulses[J]. J Comput Phys, 1997, **25**(1): 366-385.

[2] 王德明, 盖秉政. 结构刚度函数识别的一个途径[J]. 应用数学和力学, **26**(12): 1453-1458.

[3] Phillips D L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind[J]. J Assoc Comput Math, 1962, **9**(1): 84-97.

[4] Twomey S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear systems produced by quadrature[J]. J Assoc Comput Math, 1963, **10**(1): 97-101.

[5] 王德明. 稳定求解第一类 Fredholm 积分方程的一个方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006, **34**(10): 1414-1416.

Difference Inversion Model of a Wave Equation

WANG De-ming

(Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: For calculating the coefficient function of a wave equation, a numerical iterative model was derived from difference method and a perturbation assumption. The method has solved the disaccordant problem of numerical precision between direct problem model and inverse problem model, and its serial problems, in old method. Numerical simulation calculation shows that the method is feasible and effective.

Key words: inverse problem; wave equation; perturbation iteration