文章编号: 1000-0887(2008) 03-0281-20

多维区域中非线性偏微分方程的修正 Laguerre 谱与拟谱方法*

徐承龙[1,2], 郭本瑜[2,3,4]

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092;
2. 上海高校计算科学 E-研究院, 上海 200234;
3. 上海师范大学 数学系, 上海 200234;
4. 上海高校科学计算重点实验室, 上海 200234)

(戴世强推荐)

摘要: 研究多维区域中非线性偏微分方程的谱与拟谱方法. 建立了修正 Laguerre 正交逼近与插值结果, 这些结果对于建立和分析无界区域中的数值方法起着重要的作用. 作为结果的一个应用, 研究了二维无界区域中的 Logistic 方程的修正 Laguerre 谱格式, 证明了它的稳定性和收敛性. 数值试验结果表明所提出方法具有很高的精度, 与理论分析结果完全吻合.

关 键 词: 多维区域; 修正 Laguerre 正交多项式; 插值与正交逼近; 谱与拟谱方法
中图分类号: O241.5; O241.82; O241.3 文献标识码: A

引 言

在过去的 20 年中, 无界区域中的谱与拟谱方法得到了迅速发展. Maday, Pernaud-Thomas 和 Vandeven[1], Funaro[2], Guo 和 Shen[3], Guo 等人[4], Guo 和 Zhang[5], Guo 和 Xu[6], Mastroanni 和 Monegate[7], Shen[8], Xu 和 Guo[9]等给出了加权 Sobolev 空间中 Laguerre 正交逼近与插值的结果, 同时给出了数值求解半无限区间上微分方程定解问题的例子. 众所周知, 许多实际问题是在多维无穷区域上求解的. 然而, 到目前为止, 多维无穷区域 Laguerre 谱与拟谱方法的文献几乎没有.

我们将在本文中研究多维区域上的 Laguerre 正交逼近和插值问题, 以及它们在数值求解非线性微分方程定解问题中的应用. 在实际计算中, 我们将带几个参数的修正 Laguerre 多项式作为基函数. 通过调整这些参数, 我们可以得到更好的数值结果. 本文的工作同时还受到了数值求解外部区域问题的启发.

本文安排如下: 第 1 节, 我们将建立多维区域的修正 Laguerre 正交逼近和插值的结果. 第 2 节, 我们将二维区域中的 Logistic 方程的定解问题作为例子, 讨论怎样建立合适的谱格式, 同

* 收稿日期: 2007-12-12; 修订日期: 2008-01-24
基金项目: 上海高校计算科学 E-研究院基金资助(NE03004); 上海市(重大)科技攻关资助项目(N075105118); 上海市重点学科计划资助项目(NT0401)
作者简介: 徐承龙(1963—), 男, 上海人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-21-65983240; Fax: + 86-21-65982341; E-mail: clxu601@online.sh.cn).

时证明了相应谱格式的稳定性与收敛性. 第 3 节, 将讨论相应问题的拟谱格式, 与谱格式相比较, 拟谱格式在实际处理非线性项时更简单. 第 4 节, 我们将给出一些数值结果, 这些结果显示了我们提出的新格式具有很高的精度.

1 多维区域中的 Laguerre 正交逼近

设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $|\boldsymbol{x}|=\sum_{q=1}^{n}|x_q|$. 无穷区间 $\Lambda_q=\{x_q \mid 0<x_q<\infty\}$, $1\leqslant q\leqslant n$, 多维无穷区域 $\Lambda=\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\times\Lambda_n$.

设 $\beta_q>0$, 向量 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 记 $\underline{\beta}=\min\limits_{1\leqslant q\leqslant n}\beta_q$, $\bar{\beta}=\max\limits_{1\leqslant q\leqslant n}\beta_q$, $\beta\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{q=1}^{n}\beta_q x_q$. 权函数 $\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}}$. 对任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 在通常意义下定义加权函数空间 $L^p_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 以及相应的模 $\|v\|_{L^p_{\omega^{(\beta)}}}$. 特别, 我们分别用 $(u,v)_{\omega^{(\beta)}}$ 和 $\|v\|_{\omega^{(\beta)}}$ 表示空间 $L^2_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 的内积和模.

记 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, $|\boldsymbol{k}|=\sum_{q=1}^{n}k_q$, 其中 k_q 表示任意非负整数. 为简单起见, 记 $\partial_{x_q}v(\boldsymbol{x})=\partial v(\boldsymbol{x})/\partial x_q$, $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}v(\boldsymbol{x})=\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}v(\boldsymbol{x})$. 对任意整数 $m\geqslant 0$, 我们在通常意义下定义加权 Sobolev 空间 $H^m_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$, 它们的内积、半范和范数分别为:

$$(u,v)_{m,\omega^{(\beta)}}=\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant m}(\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}u,\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}v)_{\omega^{(\beta)}},$$

$$|v|_{m,\omega^{(\beta)}}=\left(\sum_{|\boldsymbol{k}|=m}\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}v\|^2_{\omega^{(\beta)}}\right)^{1/2},\quad \|v\|_{m,\omega^{(\beta)}}=(v,v)^{1/2}_{m,\omega^{(\beta)}}.$$

对任意实数 $r>0$, 空间 $H^r_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 以及它的模 $\|v\|_{r,\omega^{(\beta)}}$ 可用文献[10]中的插值方法定义. 最后定义空间

$$H^1_{0,\omega^{(\beta)}}(\Lambda)=\left\{v \mid v\in H^1_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda),\ \text{在 }\Lambda\text{ 的边界上满足 }v(\boldsymbol{x})=0\right\}.$$

另外, $\|v\|_{L^\infty}$ 表示 $\|v\|_{L^\infty(\Lambda)}$.

本文将用到下面的嵌入不等式.

引理 1.1 存在一个与任意函数以及 β 无关的常数 c_0, 使得对于任意的函数 $v\in H^1_{0,\omega^{(\beta)}}(\Lambda)\cap H^n_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$,

$$\|\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}v\|_{L^\infty}\leqslant c_0(\beta_1\cdots\beta_n)^{1/2}(1+\underline{\beta}^{-n/2})\|v\|^{1/2}_{\omega^{(\beta)}}\|v\|^{1/2}_{n,\omega^{(\beta)}},\tag{1}$$

$$\|v\|_{\omega^{(\beta)}}\leqslant(2/\beta_q)\|\partial_{x_q}v\|_{\omega^{(\beta)}},\qquad 1\leqslant q\leqslant n.\tag{2}$$

证明 我们首先对情形 $\beta_q=1$, $1\leqslant q\leqslant n$ 证明(1)式. 设 $\omega(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|}$. 则对于任意的 $u\in H^1_{0,\omega}(\Lambda)\cap H^n_\omega(\Lambda)$, $|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{s}|\leqslant n$, 利用 Sobolev 空间插值结果,

$$\begin{aligned}\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}u\|_\omega\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{s}}u\|_\omega &\leqslant \|u\|_{|\boldsymbol{k}|,\omega}\|u\|_{|\boldsymbol{s}|,\omega}\leqslant\\ &c\|u\|_\omega^{1-|\boldsymbol{k}|/n}\|u\|_{n,\omega}^{|\boldsymbol{k}|/n}\|u\|_\omega^{1-|\boldsymbol{s}|/n}\|u\|_{n,\omega}^{|\boldsymbol{s}|/n}=\\ &c\|u\|_\omega\|u\|_\omega^{1-(|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{s}|)/n}\|u\|_{n,\omega}^{(|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{s}|)/n}\leqslant c\|u\|_\omega\|u\|_{n,\omega}.\end{aligned}$$

因此, 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Lambda$,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|}u^2(\boldsymbol{x})&=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\partial_{y_1}\cdots\partial_{y_n}(\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{y}|}u^2(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n\leqslant\\ &c\sum_{|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{s}|\leqslant n}\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}u\|_\omega\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{s}}u\|_\omega\leqslant c\|u\|_\omega\|u\|_{n,\omega}.\end{aligned}\tag{3}$$

我们现在对任意的 $v\in H^1_{0,\omega^{(\beta)}}(\Lambda)\cap H^n_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 用尺度变换方法证明(1)式. 为此取

$$y_q = \frac{x_q}{\beta_q}, \quad u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y}) = v\left(\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2}, \cdots, \frac{x_n}{\beta_n}\right).$$

直接计算得

$$\| e^{-|\boldsymbol{x}|} u^2 \|_{L^\infty} = \| e^{-\beta\cdot\boldsymbol{y}} v^2 \|_{L^\infty}, \tag{4}$$

$$\| u \|_\omega^2 = \int_\Lambda (u(\boldsymbol{x}))^2 e^{-|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x} =$$

$$\beta_1 \cdots \beta_n \int_\Lambda (v(\boldsymbol{y}))^2 e^{-\beta\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y} = \beta_1 \cdots \beta_n \| v \|_{\omega(\beta)}^2, \tag{5}$$

$$\| u \|_{n,\omega}^2 = \sum_{s=0}^{n} \sum_{|\boldsymbol{k}|=s} \int_\Lambda (\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}} u(\boldsymbol{x}))^2 e^{-|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x} =$$

$$\sum_{s=0}^{n} \sum_{|\boldsymbol{k}|=s} \frac{\beta_1 \cdots \beta_n}{\beta_1^{2k_1} \cdots \beta_n^{2k_n}} \int_\Lambda (\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{k}} v)^2 e^{-\beta\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y} \leqslant$$

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{\beta_1 \cdots \beta_n}{\underline{\beta}^{2s}} | v |_{s,\omega(\beta)}^2 \leqslant c_0 \beta_1 \cdots \beta_n (1 + \underline{\beta}^{-n/2})^4 \| v \|_{n,\omega(\beta)}^2. \tag{6}$$

结合(3)~(6)式便得(1)式.

下面我们证明(2)式. 对任意的 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$,

$$e^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}} v^2(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_q} \partial_{y_q} (e^{-\beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{q-1} x_{q-1} - \beta_q y_q - \beta_{q+1} x_{q+1} - \cdots - \beta_n x_n} \times$$

$$v^2(x_1, \cdots, x_{q-1}, y_q, x_{q+1}, \cdots, x_n)) dy_q.$$

从而

$$e^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}} v^2(\boldsymbol{x}) + \beta_q \int_0^{x_q} e^{-\beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{q-1} x_{q-1} - \beta_q y_q - \beta_{q+1} x_{q+1} - \cdots - \beta_n x_n} \times$$

$$v^2(x_1, \cdots, x_{q-1}, y_q, x_{q+1}, \cdots, x_n) dy_q =$$

$$2\int_0^{x_q} e^{-\beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{q-1} x_{q-1} - \beta_q y_q - \beta_{q+1} x_{q+1} - \cdots - \beta_n x_n} v(y_1, x_2, \cdots, x_n) \times$$

$$\partial_{y_q} v(x_1, \cdots, x_{q-1}, y_q, x_{q+1}, \cdots, x_n) dy_q \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\beta_q \int_0^{x_q} e^{-\beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{q-1} x_{q-1} - \beta_q y_q - \beta_{q+1} x_{q+1} - \cdots - \beta_n x_n} \times$$

$$v^2(x_1, \cdots, x_{q-1}, y_q, x_{q+1}, \cdots, x_n) dy_q +$$

$$\frac{2}{\beta_q} \int_0^{x_q} e^{-\beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{q-1} x_{q-1} - \beta_q y_q - \beta_{q+1} x_{q+1} - \cdots - \beta_n x_n} \times$$

$$(\partial_{y_q} v(x_1, \cdots, x_{q-1}, y_q, x_{q+1}, \cdots, x_n))^2 dy_q.$$

在上式中令 $x_q \to \infty$, 再在区域 $\{(x_1, \cdots, x_{q-1}, x_{q+1}, \cdots, x_n) \mid 0 < x_j < \infty, j = 1, \cdots, q-1, q+1, \cdots, n\}$ 中积分, 便得(2)式.

我们将引进多维修正 Laguerre 多项式. 设 l_q 为任意非负整数, $\boldsymbol{l} = (l_1, \cdots, l_n)$, $|\boldsymbol{l}| = \sum_{q=1}^{n} l_q$. 如果对于任意的 $1 \leqslant q \leqslant n$, $k_q \leqslant l_q$, 我们称 $\boldsymbol{k} \leqslant \boldsymbol{l}$.

设 $\mathscr{L}_{l_q}^{(\beta)}(x_q)$ 为一维 l_q 阶修正 Laguerre 正交多项式(例如见文献[5]),

$$\mathscr{L}_{l_q}^{(\beta_q)}(x_q) = (1/l_q!) e^{\beta_q x_q} \partial_{x_q}^{l_q} (x_q^{l_q} e^{-\beta_q x_q}), \qquad 1 \leqslant q \leqslant n.$$

则 n-维 $\boldsymbol{l}$ 阶修正 Laguerre 正交多项式定义为:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x}) = \prod_{q=1}^{n} \mathscr{L}_{l_q}^{(\beta_q)}(x_q) = \frac{1}{l_1! l_2! \cdots l_n!} e^{\beta\cdot\boldsymbol{x}} \partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{l}} (x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} e^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}}).$$

它们构成 $L^2_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 空间的一个完备正交系．进一步, 设 k_q 为任意的非负整数, $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$．可以验证对于任意的 $\boldsymbol{k}\leqslant\boldsymbol{l}$,

$$\int_\Lambda \partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}\mathscr{L}_{\boldsymbol{m}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\prod_{q=1}^{n}\frac{l_q!}{(l_q-k_q)!}\beta_q^{k_q-1}\delta_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}},\tag{7}$$

其中 $\delta_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}$ 为 n- 维 Kronecker 符号．因此, 对于任意的 $v\in L^2_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$,

$$v(\boldsymbol{x})=\sum_{|\boldsymbol{l}|=0}^{\infty}\hat{v}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x}),\quad \hat{v}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}=\frac{1}{\beta_1\cdots\beta_n}\int_\Lambda v(\boldsymbol{x})\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\tag{8}$$

下面我们用 N 表示任何非负整数, $\mathscr{P}_N$ 表示每个变量次数都不超过 N 的代数多项式在区域 Λ 上限制的集合．$\mathscr{P}_N^0=\mathscr{P}_N\cap H^1_{0,\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$．本文中我们用 c 表示与 N、β 及任何函数无关的适当的正常数.

下面的逆不等式可用与文献[11]中类似的方法证明.

引理 1.2 对任何的整数 $r\geqslant 0$ 及 $\phi\in\mathscr{P}_N$,

$$\|\partial_{x_q}^r\phi\|_{\omega^{(\beta)}}\leqslant c(\beta_q N)^r\|\phi\|_{\omega^{(\beta)}}.\tag{9}$$

并且对任何 $|\boldsymbol{k}|=r\geqslant 0$,

$$\|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}\phi\|_{\omega^{(\beta)}}\leqslant c(\beta N)^r\|\phi\|_{\omega^{(\beta)}}.\tag{10}$$

我们现在考虑几个经常用到的正交投影算子.

$L^2_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 上的正交投影算子 $P_N^{(\beta)}:L^2_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)\to\mathscr{P}_N$ 定义为

$$(P_N^{(\beta)}v-v,\phi)_{\omega^{(\beta)}}=0,\qquad\forall\phi\in\mathscr{P}_N.$$

为了给出较精确的误差估计式, 对任何非负整数 r, 引进空间 $H^r_{\omega^{(\beta)},A}(\Lambda)$．它的半范数及范数定义为

$$|v|_{r,\omega^{(\beta)},A}=\left(\sum_{|\boldsymbol{k}|=r}\int_\Lambda(\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}v(\boldsymbol{x}))^2\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{r,\omega^{(\beta)},A}=\left(\sum_{\sigma=0}^{r}|v|_{\sigma,\omega^{(\beta)},A}\right)^{1/2}.$$

我们有下列基本逼近结果.

定理 1.1 对于任何整数 $0\leqslant\mu\leqslant r$ 及 $v\in H^r_{\omega^{(\beta)},A}(\Lambda)$,

$$|P_N^{(\beta)}v-v|^2_{\mu,\omega^{(\beta)},A}\leqslant c(\beta N)^{\mu-r}|v|^2_{r,\omega^{(\beta)},A}.$$

证明 利用(8)式, 直接计算得

$$P_N^{(\beta)}v(\boldsymbol{x})-v(\boldsymbol{x})=-\sum_{q=1}^{n}\sum_{l_1,\cdots,l_{q-1}\leqslant N}\sum_{l_q>N}\sum_{l_{q+1},\cdots,l_n=0}^{\infty}\hat{v}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)}(\boldsymbol{x}).$$

再结合(7)式, 我们便得对任意 $|\boldsymbol{k}|=\mu\leqslant r\leqslant N$,

$$\int_\Lambda(\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}(P_N^{(\beta)}v(\boldsymbol{x})-v(\boldsymbol{x})))^2\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{q=1}^{n}D_{N,\beta,q}(v),\tag{11}$$

其中

$$D_{N,\beta,q}(v)=\sum_{k_1\leqslant l_1\leqslant N,\cdots,k_{q-1}\leqslant l_{q-1}\leqslant N}\sum_{l_q>N}\sum_{l_{q+1},\cdots,l_n\geqslant k_n}(\hat{v}_{\boldsymbol{l}}^{(\beta)})^2\beta_q^{k_q-1}\frac{l_q!}{(l_q-k_q)!}\times$$

$$\prod_{1\leqslant\sigma\leqslant n,\ \sigma\neq q}\beta_\sigma^{k_\sigma-1}\frac{l_\sigma!}{(l_\sigma-k_\sigma)!}.$$

下面设 $\boldsymbol{k}^*=(k_1,k_2,\cdots,k_{q-1},k_q+r-\mu,k_{q+1},\cdots,k_n)$．显然 $|\boldsymbol{k}^*|=r$, 并且

$$\int_\Lambda (\partial_x^{k^*} v(x))^2 x^{k^*} \omega^{(\beta)}(x)\,dx = \sum_{l_1 \geqslant k_1, \cdots, k_{q-1} \geqslant k_{q-1}} \sum_{l_q \geqslant k_q + r - \mu} \sum_{l_{q+1} \geqslant k_{q+1}, \cdots, l_n \geqslant k_n} (\hat{v}_l^{(\beta)})^2 \beta_q^{k_q + r - \mu - 1} \times \frac{l_q!}{(l_q - k_q - r + \mu)!} \prod_{1 \leqslant \sigma \leqslant n, \sigma \neq q} \beta_\sigma^{k_\sigma - 1} \frac{l_\sigma!}{(l_\sigma - k_\sigma)!}.$$

容易验证对任意 $l_q > N$,

$$\frac{l_q!}{(l_q - k_q)!} \leqslant cN^{\mu - r} \frac{l_q!}{(l_q - k_q - r + \mu)!}.$$

因此

$$D_{N,\beta,q}(v) \leqslant c(\beta_q N)^{\mu - r} \int_\Lambda (\partial_x^{k^*} v(x))^2 x^{k^*} \omega^{(\beta)}(x)\,dx \leqslant c(\beta_q N)^{\mu - r} |v|^2_{r,\omega^{(\beta)},A}.$$

结合上式以及(11)式,即得

$$\int_\Lambda (\partial_x^{k}(P_N^{(\beta)} v(x) - v(x)))^2 x^{k} \omega^{(\beta)}(x)\,dx \leqslant c(\beta N)^{\mu - r} |v|^2_{r,\omega^{(\beta)},A},$$

从而

$$|P_N^{(\beta)} v - v|^2_{\mu,\omega^{(\beta)},A} \leqslant c(\beta N)^{\mu - r} |v|^2_{r,\omega^{(\beta)},A}.$$

由于 $\|v\|_{0,\omega^{(\beta)},A} = \|v\|_{\omega^{(\beta)}}$,定理1.1给出了 $\|P_N^{(\beta)} v - v\|_{\omega^{(\beta)}}$ 的一个上界. 然而,我们还需估计在通常Sobolev空间 $H^\mu_{\omega^{(\beta)}}(\Lambda)$ 中的逼近上界. 为此,对于任意整数 $0 \leqslant s \leqslant r$, 定义

$$|v|_{A^r_{s,\beta}} = \left(\sum_{|k| = r} \int_\Lambda (\partial_x^k v(x))^2 |x|^{r-s} \omega^{(\beta)}(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

定理1.2 对任意的整数 $1 \leqslant \mu \leqslant r$,

$$|P_N^{(\beta)} v - v|^2_{\mu,\omega^{(\beta)}} \leqslant c\underline{\beta}^{-2r} \beta^{2\mu + r}(1 + \beta^{-\mu}) N^{2\mu - r}(|v|^2_{A^r_{1,\beta}} + |v|^2_{A^r_{\mu,\beta}}), \tag{12}$$

假设 $|v|_{A^r_{1,\beta}}$ 以及 $|v|_{A^r_{\mu,\beta}}$ 有界.

证明 我们首先对 $\beta_q = 1, 1 \leqslant q \leqslant n$ 用归纳法证明(12)式. 此时我们分别用 $\omega(x)$, $|v|_{A^r_s}$, P_N 表示 $\omega^{(\beta)}(x)$, $|v|_{A^r_{s,\beta}}$, $P_N^{(\beta)}$. 因此只要验证对于任意整数 $1 \leqslant \mu \leqslant r$,

$$|P_N u - u|^2_{\mu,\omega} \leqslant cN^{2\mu - r}(|u|^2_{A^r_1} + |u|^2_{A^r_\mu}). \tag{13}$$

为方便起见,我们引进记号 $\omega_q(x_q) = e^{-x_q}$, $\|u\|_{\omega_q,\Lambda_q} = \|u\|_{L^2_{\omega_q}(\Lambda_q)}$ 以及 $|u|_{A^r_s(\Lambda_q)} = \|x_q^{(r-s)/2} \partial^r_{x_q} u\|_{\omega_q,\Lambda_q}$. $L^2_{\omega_q}(\Lambda_q)$-正交投影用 P_{N,Λ_q} 表示. 由文献[4]中的引理3.3,对于任何整数 $1 \leqslant \mu \leqslant r$, 只要 $\|x_q^{(r-1)/2} \partial^r_{x_q} u\|_{\omega_q,\Lambda_q}$ 和 $\|x_q^{(r-\mu)/2} \partial^r_{x_q} u\|_{\omega_q,\Lambda_q}$ 有界,

$$\|\partial^\mu_{x_q}(P_{N,\Lambda_q} u - u)\|^2_{\omega_q,\Lambda_q} \leqslant cN^{2\mu - r}(\|x_q^{(r-1)/2} \partial^r_{x_q} u\|^2_{\omega_q,\Lambda_q} + \|x_q^{(r-\mu)/2} \partial^r_{x_q} u\|^2_{\omega_q,\Lambda_q}), \tag{14}$$

由上式可推出 $n = 1$ 时(13)式成立.

假设(13)式对 $n \leqslant m$ 成立,考虑 $n = m + 1$ 的情形. 设 $\mathscr{T}_{d,\Lambda_q}(1 \leqslant q \leqslant n)$ 为恒等算子. 为书写方便,我们记

$$x_m = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad \Lambda_m = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_m,$$

$$k_m = (k_1, k_2, \cdots k_m), \quad |k_m| = \sum_{q=1}^m k_q, \quad \omega_m(x_m) = \prod_{q=1}^m \omega_q(x_q).$$

并设

$$P_{N,\Lambda_m} = P_{N,\Lambda_1}\circ P_{N,\Lambda_2}\circ\cdots P_{N,\Lambda_m},\quad \mathscr{T}_{d,\Lambda_m} = \mathscr{T}_{d,\Lambda_1}\circ\mathscr{T}_{d,\Lambda_2}\circ\cdots\mathscr{T}_{d,\Lambda_m}.$$

显然 $P_{N,\Lambda_{m+1}}u = P_{N,\Lambda_m}P_{N,\Lambda_{m+1}}u$. 进一步, 对任何满足 $|\boldsymbol{k}_{m+1}| = \mu \geqslant 1$ 的 $\boldsymbol{k}_{m+1}$, 存在 q, 使得 $1 \leqslant q \leqslant m+1$, $k_q \geqslant 1$. 不失一般性, 我们可以假设 $k_{m+1} \geqslant 1$. 从而

$$\partial_{\boldsymbol{x}_{m+1}}^{\boldsymbol{k}_{m+1}}(P_{N,\Lambda_{m+1}}u - u) = \partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}(P_{N,\Lambda_{m+1}}u - u) = B_1 + B_2, \tag{15}$$

其中

$$B_1 = \partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}(P_{N,\Lambda_{m+1}} - \mathscr{T}_{d,\Lambda_{m+1}})\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}P_{N,\Lambda_m}u,\quad B_2 = \partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}(P_{N,\Lambda_m} - \mathscr{T}_{d,\Lambda_m})\partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}u.$$

我们依次使用(14)、(9)式和定理 1.1 便可推得

$$\begin{aligned}
&\|B_1\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant \\
&\quad cN^{2k_{m+1}-r}\sum_{\xi=1,k_{m+1}}\int_{\Lambda_m}\omega_m(\boldsymbol{x}_m)\,|\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}P_{N,\Lambda_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|^2_{A_\xi^r(\Lambda_{m+1})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant \\
&\quad cN^{2\mu-r}\sum_{\xi=1,k_{m+1}}\int_{\Lambda_m}\omega_m(\boldsymbol{x}_m)\,|P_{N,\Lambda_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|^2_{A_\xi^r(\Lambda_{m+1})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant \\
&\quad cN^{2\mu-r}\sum_{\xi=1,k_{m+1}}|u|^2_{A_\xi^r(\Lambda_{m+1})}.
\end{aligned}\tag{16}$$

下面我们估计 $\|B_2\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}$. 若 $|\boldsymbol{k}_m| = \mu - k_{m+1} \geqslant 1$, 则利用归纳假设,

$$\begin{aligned}
&\|B_2\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant \\
&\quad cN^{2|\boldsymbol{k}_m|+k_{m+1}-r}\sum_{\xi=1,|\boldsymbol{k}_m|}\int_{\Lambda_{m+1}}\omega_{m+1}(x_{m+1})\,|\partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}u(\cdot,x_{m+1})|^2_{A_\xi^{r-k_{m+1}}(\Lambda_m)}\mathrm{d}x_{m+1}.
\end{aligned}$$

由于

$$2|\boldsymbol{k}_m| + k_{m+1} - r \leqslant 2\mu - r,$$
$$|\partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}u(\cdot,x_{m+1})|^2_{A_\xi^{r-k_{m+1}}(\Lambda_m)} \leqslant |u(\cdot,x_{m+1})|^2_{A^r_{\xi+k_{m+1}}(\Lambda_m)},$$

我们推得

$$\|B_2\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant cN^{2\mu-r}\sum_{\xi=1,|\boldsymbol{k}_m|}|u|^2_{A^r_{\xi+k_{m+1}}(\Lambda_{m+1})}. \tag{17}$$

若 $|\boldsymbol{k}_m| = 0$, 则 $k_{m+1} = \mu$. 利用定理 1.1 及直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\|B_2\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant \\
&\quad cN^{\mu-r}\int_{\Lambda_{m+1}}\omega(\boldsymbol{x}_{m+1})\,|\boldsymbol{x}_m|^{r-\mu}\sum_{|\boldsymbol{l}_m|=r-\mu}(\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{l}_m}\partial_{x_{m+1}}^{\mu}u(\boldsymbol{x}_{m+1}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{m+1} \leqslant \\
&\quad cN^{\mu-r}|u|^2_{A^r_\mu(\Lambda_{m+1})}.
\end{aligned}\tag{18}$$

显然对任何 $1 \leqslant \xi \leqslant \mu$, $|\boldsymbol{x}_{m+1}|^{-\xi} \leqslant |\boldsymbol{x}_{m+1}|^{-1} + |\boldsymbol{x}_{m+1}|^{-\mu}$. 因而, 对 $k_{m+1} \geqslant 1$,

$$|u|^2_{A^r_{k_{m+1}}(\Lambda_{m+1})} \leqslant |u|^2_{A^r_1(\Lambda_{m+1})} + |u|^2_{A^r_\mu(\Lambda_{m+1})}. \tag{19}$$

另一方面, 若 $|\boldsymbol{k}_m| \geqslant 1$, 则 $k_{m+1}+1 \leqslant \mu$. 从而, 对任何 $k_{m+1} \geqslant 1$,

$$|u|^2_{A^r_{k_{m+1}+1}(\Lambda_{m+1})} \leqslant |u|^2_{A^r_1(\Lambda_{m+1})} + |u|^2_{A^r_\mu(\Lambda_{m+1})}. \tag{20}$$

综合(15)式~(20)式便完成了归纳法的证明. 由于 $P_N = P_{N,\Lambda_n}$, 我们便得(13)式.

我们现在证明对任意的 β, (12)式成立. 为此, 设

$$u(\boldsymbol{x}) = v\left(\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2}, \cdots, \frac{x_n}{\beta_n}\right).$$

则有 $P_N^{(\beta)}v(\boldsymbol{x}) = P_N u(\boldsymbol{x})$. 可以验证对任意的 $0 \leqslant \sigma \leqslant \mu$,

$$|P_N u - u|^2_{\mu,\omega} \geqslant \frac{\beta_1\cdots\beta_n}{\beta^{2\mu}}|P_N^{(\beta)}v - v|^2_{\mu,\omega^{(\beta)}},\quad |u|^2_{A^r_\sigma} \leqslant \beta_1\cdots\beta_n\frac{\beta^{r-\sigma}}{\underline{\beta}^{2r}}|v|^2_{A^r_{\sigma,\beta}}. \tag{21}$$

最后，结合(13)式和(21)式即得(12)式.

$H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda)$–正交投影算子 $P_N^{(1,0,\beta)}: H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda) \to \mathscr{P}^0_N$ 定义为

$$(\nabla(P_N^{(1,0,\beta)}v - v), \nabla\phi)_{1,\omega(\beta)} = 0, \qquad \forall\phi\in\mathscr{P}^0_N.$$

定理 1.3　如果整数 $r \geqslant n$, $|v|_{A^r_{n,\beta}}$ 有界，则对于任意 $v\in H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda)$,

$$|P_N^{(1,0,\beta)}v - v|^2_{1,\omega(\beta)} \leqslant c\underline{\beta}^{-r}\beta^{r+2-n}N^{n-r}|v|^2_{A^r_{n,\beta}}. \tag{22}$$

证明　我们先证明对于 $\beta_q = 1$, (22)式成立. 此时用 $P_N^{(1,0)}$ 表示 $P_{N,\beta}^{(1,0)}$. 只要证明

$$|P_N^{(1,0)}v - v|^2_{1,\omega} \leqslant cN^{n-r}|v|^2_{A^r_n} \tag{23}$$

即可. 事实上，由投影定理，对任何 $u\in H^1_{0,\omega}(\Lambda)$,

$$|P_N^{(1,0)}u - u|^2_{1,\omega} \leqslant \inf_{\phi\in\mathscr{P}^0_N}|u-\phi|^2_{1,\omega}.$$

下面用 $P_{N,\Lambda_q}^{(1,0)}$ 表示$H^1_{0,\omega_q}(\Lambda_q)$–投影，$P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)} = P_{N,\Lambda_1}^{(1,0)}\circ P_{N,\Lambda_2}^{(1,0)}\cdots P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)}$, $1\leqslant q, m\leqslant n$. 取 $\phi = P_{N,\Lambda_n}^{(1,0)}u\in\mathscr{P}^0_N$, 我们将用归纳法证明

$$|u-\phi|^2_{1,\omega} \leqslant cN^{n-r}|u|^2_{A^r_n}. \tag{24}$$

使用上一个定理证明过程中相同的记号并记 $|v|_{r,\omega_q,\Lambda_q} = |v|_{H^r_{\omega_q}(\Lambda_q)}$. 由文献[9]中的定理2.3, 如果 $u\in H^1_{0,\omega_q}(\Lambda_q)$, 且对 $r\geqslant 1$, $\|x_q^{(r-1)/2}u\|_{\omega_q,\Lambda_q}$ 有界，则有

$$|P_{N,\Lambda_q}^{(1,0)}u - u|^2_{1,\omega_q,\Lambda_q} \leqslant cN^{1-r}\|x_q^{(r-1)/2}u\|^2_{\omega_q,\Lambda_q}. \tag{25}$$

这样便证明了情形 $n = 1$ 时(24)式成立.

假设 $n\leqslant m$ 时(24)式成立，考虑情形 $n = m+1$. 利用(2)式，$n = m$ 时的(24)式以及半范 $|u|_{A^m_m(\Lambda_m)}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}\|P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)}u\|^2_{\omega_m,\Lambda_m} &\leqslant c|P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)}u|^2_{1,\omega_m,\Lambda_m} \leqslant c(|u|^2_{A^m_m(\Lambda_m)} + |u|^2_{1,\omega_m,\Lambda_m}) = \\ &c(|u|^2_{m,\omega_m,\Lambda_m} + |u|^2_{1,\omega_m,\Lambda_m}) \leqslant c(|u|^2_{m,\omega_m,\Lambda_m} + \|\partial_{x_1}\partial_{x_2}\cdots\partial_{x_m}u\|^2_{\omega_m,\Lambda_m}) \leqslant \\ &c|u|^2_{m,\omega_m,\Lambda_m}.\end{aligned} \tag{26}$$

显然

$$\partial_{x_{m+1}}(\phi - u) = B_1 + B_2, \tag{27}$$

其中

$$B_1 = \partial_{x_{m+1}}(P_{N,\Lambda_{m+1}}^{(1,0)} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_{m+1}})P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)}u,\quad B_2 = (P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_m})\partial_{x_{m+1}}u.$$

由(25)式和(26)式，我们可推得

$$\begin{aligned}\|B_1\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} &\leqslant cN^{1-(r-m)}\int_{\Lambda_m}\omega_m(\boldsymbol{x}_m)|P_{N,\Lambda_m}^{(1,0)}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|^2_{A_1^{r-m}(\Lambda_{m+1})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant \\ &cN^{m+1-r}\int_{\Lambda_{m+1}}\omega_{m+1}(\boldsymbol{x}_{m+1})|x_{m+1}|^{r-m-1}\sum_{|\boldsymbol{k}_m|=m}(\partial^{\boldsymbol{k}_m}_{\boldsymbol{x}_m}\partial^{r-m}_{x_{m+1}}u(\boldsymbol{x}_{m+1}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{m+1} \leqslant \\ &cN^{m+1-r}|u|^2_{A^r_{m+1}(\Lambda_{m+1})}.\end{aligned} \tag{28}$$

类似地

$$
\begin{aligned}
\|B_2\|^2_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant\;& cN^{m-(r-1)}\int_{\Lambda_{m+1}}\omega_{m+1}(x_{m+1})\,|\partial_{x_{m+1}}u(\cdot,x_{m+1})|^2_{A^{r-1}_m(\Lambda_m)}\mathrm{d}x_{m+1}\leqslant\\
& cN^{m+1-r}|u|^2_{A^r_{m+1}(\Lambda_{m+1})}.
\end{aligned}\tag{29}
$$

另一方面,我们有

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_q}(\phi-u)=\;&\partial_{x_q}(P^{(1,0)}_{N,\Lambda_m}-\mathscr{T}_{d,\Lambda_m})P^{(1,0)}_{N,\Lambda_{m+1}}u+\\
&(P^{(1,0)}_{N,\Lambda_{m+1}}-\mathscr{T}_{d,\Lambda_{m+1}})\partial_{x_q}u,\qquad 1\leqslant q\leqslant m.
\end{aligned}
$$

上面的式子具有与(27)式相同的上界. 据此再结合(28)式和(29)式,可得 $|\phi-u|^2_{1,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}\leqslant cN^{m+1-r}|u|^2_{A^r_{m+1}(\Lambda_{m+1})}$. 因此,我们完成了归纳法及(23)式的证明. 最后,通过上一个定理证明过程中使用的尺度变换技巧,我们结束了(22)式的证明.

我们现在讨论 Laguerre-Gauss-Radau 插值. 对任意固定的 q,设 $\sigma^{(\beta_q)}_{N,0}=0$, $\sigma^{(\beta_q)}_{N,j_q}$ 是多项式 $\partial_{x_q}\mathscr{L}^{(\beta_q)}_{N+1}(x_q)$, $1\leqslant j_q\leqslant N$ 的零点. $\omega^{(\beta_q)}_{N,j_q}$ 表示权函数 $\omega_{\beta_q}(x_q)=e^{-\beta_q x_q}$, $1\leqslant j_q\leqslant N$ 的 Christoffel 数. 令 $\boldsymbol{j}=(j_1,\cdots,j_n)$. 我们取 n-维插值点为 $\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}=(\sigma^{(\beta_1)}_{N,j_1},\sigma^{(\beta_2)}_{N,j_2},\cdots,\sigma^{(\beta_n)}_{N,j_n})$, $0\leqslant j_q\leqslant N$, $1\leqslant q\leqslant n$. 则关于权函数 $\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})$ 对应的Christoffel 数为 $\omega^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}=\prod_{q=0}^{n}\omega^{(\beta_q)}_{N,j_q}$. 设 $\Lambda_{N,\beta}$ 为全体插值节点 $\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}$ 组成的集合. 对任意 $\phi\in\mathscr{P}_{2N}$,我们有下列恒等式:

$$
\int_\Lambda\phi(\boldsymbol{x})\,\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}\in\Lambda_{N,\beta}}\phi(\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}})\,\omega^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}.\tag{30}
$$

对任意 $v\in C(\Lambda)$, Laguerre-Gauss-Radau 插值函数 $I^{(\beta)}_N v\in\mathscr{P}_N$ 定义为:对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Lambda_{N,\beta}$, $I^{(\beta)}_N v(\boldsymbol{x})=v(\boldsymbol{x})$.

我们定义离散的内积和离散的范数

$$
(u,v)_{\omega^{(\beta)},N}=\sum_{\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}}\in\Lambda_{N,\beta}}u(\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}})\,v(\sigma^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}})\,\omega^{(\beta)}_{N,\boldsymbol{j}},\quad \|v\|_{\omega^{(\beta)},N}=(v,v)^{1/2}_{\omega^{(\beta)},N}.
$$

利用(30)式可知,对任意 $\phi,\psi\in\mathscr{P}_N$,

$$
(\phi,\psi)_{\omega^{(\beta)}}=(\phi,\psi)_{\omega^{(\beta)},N},\quad \|\phi\|_{\omega^{(\beta)}}=\|\phi\|_{\omega^{(\beta)},N}.\tag{31}
$$

显然

$$
(I^{(\beta)}_N v-v,\phi)_{\omega^{(\beta)},N}=0,\qquad \forall\phi\in\mathscr{P}_N.\tag{32}
$$

下面我们给出关于 Laguerre 插值的基本结果.

定理 1.4 对任何整数 $r\geqslant\mu+n-1$, $\mu\geqslant0$, $\mu^*=\max\{1,\mu+n-1\}$,我们有下面的估计式:

$$
\begin{aligned}
|I^{(\beta)}_N v-v|^2_{\mu,\omega^{(\beta)}}\leqslant\;& c\underline{\beta}^{-2r}\beta^{2\mu+r}(1+\beta^{-\mu^*})N^{2\mu+n-r}(\ln N)^n(|v|^2_{A^r_{0,\beta}}+|v|^2_{A^r_{\mu^*,\beta}}),
\end{aligned}\tag{33}
$$

假设范数 $|v|_{A^r_{0,\beta}}$ 以及 $|v|_{A^r_{\mu^*,\beta}}$ 是有界的.

证明 我们使用与上一个定理证明过程中相同的记号. 首先对于 $\beta_q=1$ 证明(33)式成立. 此时用 I_N 表示 $I^{(\beta)}_N$,则只要证明下面估计即可:

$$
|I_N u-u|^2_{\mu,\omega}\leqslant c(\ln N)^nN^{2\mu+n-r}(|u|^2_{A^r_0}+|u|^2_{A^r_{\mu^*}}).\tag{34}
$$

对任意的 $1\leqslant q\leqslant n$,我们分别用 I_{N,Λ_q} 表示一维区间 Λ_q 上的Laguerre-Gauss-Radau 插值.

由文献[4]中的定理 3.5, 可得对任意的整数 $0 \leqslant \mu \leqslant r$,

$$\|\partial_{x_q}^{\mu}(I_{N,\Lambda_q}u - u)\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2 \leqslant cN^{2\mu+1-r}(\|x_q^{(r-1)/2}\partial_{x_q}^r u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2 + N^{-1}\|x_q^{(r-\mu)/2}\partial_{x_q}^r u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2 + \ln N\|x_q^{r/2}\partial_{x_q}^r u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2). \tag{35}$$

假设上面不等式右边涉及的范数都是有界的. 这样当 $n = 1$ 时(34)式成立, 从而可得

$$\|I_{N,\Lambda_q}u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2 \leqslant c\ln N(\|x_q^{1/2}\partial_{x_q}u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2 + \|\partial_{x_q}u\|_{\omega_q,\Lambda_q}^2). \tag{36}$$

假设(34)式对任何 $n \leqslant m$ 成立, 我们考虑情形 $n = m+1$. 设 $I_{N,\Lambda_m} = I_{N,\Lambda_1} \circ I_{N,\Lambda_2} \circ \ldots I_{N,\Lambda_m}$. 则 $I_{N,\Lambda_{m+1}} = I_{N,\Lambda_m} \circ I_{N,\Lambda_{m+1}}$. 显然

$$I_{N,\Lambda_{m+1}}u - u = (I_{N,\Lambda_m} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_m})I_{N,\Lambda_{m+1}}u + (I_{N,\Lambda_{m+1}} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_{m+1}})u.$$

设 $|u|_{\mu,\omega_m,\Lambda_m}$ 为空间 $H_{\omega_m}^{\mu}(\Lambda_m)$ 的半范. 则

$$|I_{N,\Lambda_{m+1}}u - u|_{\mu,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}} \leqslant B_1 + B_2, \tag{37}$$

其中

$$B_1 = |(I_{N,\Lambda_m} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_m})I_{N,\Lambda_{m+1}}u|_{\mu,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}},$$
$$B_2 = |(I_{N,\Lambda_{m+1}} - \mathscr{I}_{d,\Lambda_{m+1}})u|_{\mu,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}.$$

记 $\mu_m^* = \max\{1, |\boldsymbol{k}_m| + m - 1\}$. 则使用 $n = m$ 时的(34)式, 可推得

$$B_1 \leqslant c(\ln N)^m \sum_{|\boldsymbol{k}_{m+1}|=\mu} N^{2|\boldsymbol{k}_m|+m-r+1} \times \sum_{\xi=0,\mu_m^*}\int_{\Lambda_{m+1}}\omega_{m+1}(x_{m+1})|\partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}I_{N,\Lambda_{m+1}}u(\cdot,x_{m+1})|_{A_\xi^{r-1}(\Lambda_m)}^2\mathrm{d}x_{m+1}.$$

进一步, 利用(9)、(10)式, $n = m$ 时的(34)式以及(36)式, 可推得对 $\xi = 0, \mu_m^*$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Lambda_{m+1}}\omega_{m+1}(x_{m+1})|\partial_{x_{m+1}}^{k_{m+1}}I_{N,\Lambda_{m+1}}u(\cdot,x_{m+1})|_{A_\xi^{r-1}(\Lambda_m)}^2\mathrm{d}x_{m+1} \leqslant \\ &cN^{2k_{m+1}}\int_{\Lambda_m}|\boldsymbol{x}_m|^{r-1-\xi}\omega(\boldsymbol{x}_m)\sum_{|\boldsymbol{k}_m|=r-1}\|I_{N,\Lambda_{m+1}}\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)\|_{\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant \\ &cN^{2k_{m+1}}\ln N\int_{\Lambda_m}|\boldsymbol{x}_m|^{r-1-\xi}\omega(\boldsymbol{x}_m) \times \\ &\sum_{|\boldsymbol{k}_m|=r-1}(|\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|_{A_0^1(\Lambda_{m+1})}^2 + |\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|_{1,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant \\ &cN^{2k_{m+1}}\ln N(|u|_{A_\xi^r(\Lambda_{m+1})}^2 + |u|_{A_{\xi+1}^r(\Lambda_{m+1})}^2).\end{aligned}$$

如前一样, 我们可以验证

$$\sum_{\xi=0,\mu_m^*}(|u|_{A_\xi^r(\Lambda_{m+1})}^2 + |u|_{A_{\xi+1}^r(\Lambda_{m+1})}^2) \leqslant c(|u|_{A_0^r(\Lambda_{m+1})}^2 + |u|_{A_{\mu+m}^r(\Lambda_{m+1})}^2).$$

从而

$$B_1 \leqslant c(\ln N)^{m+1}N^{2\mu+m+1-r}(|u|_{A_0^r(\Lambda_{m+1})}^2 + |u|_{A_{\mu+m}^r(\Lambda_{m+1})}^2). \tag{38}$$

另一方面, 如记 $\mu_{m+1} = \max\{1, k_{m+1}\}$, 则由(35)式可推得

$$B_2 \leqslant c\ln N\sum_{|\boldsymbol{k}_{m+1}|=\mu}N^{2k_{m+1}+1-r+|\boldsymbol{k}_m|} \times \int_{\Lambda_m}\omega_m(\boldsymbol{x}_m)\sum_{\xi=0,\mu_{m+1}}|\partial_{\boldsymbol{x}_m}^{\boldsymbol{k}_m}u(\boldsymbol{x}_m,\cdot)|_{A_\xi^{r-|\boldsymbol{k}_m|}(\Lambda_{m+1})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m.$$

由于当 $\xi = 0, \mu_{m+1}$ 时

$$\int_{\Lambda_m}\omega(\boldsymbol{x}_m)\,|\,\partial_{x_m}^{k_m}u(\boldsymbol{x}_m,\ \cdot)\,|^2_{A_\xi^{r-|k_m|}(\Lambda_{m+1})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_m \leqslant c\,|\,u\,|^2_{A^r_{\xi+|k_m|}(\Lambda_{m+1})},$$

我们得到

$$B_2 \leqslant c\ln N\,N^{2\mu+m+1-r}(|\,u\,|^2_{A^r_0(\Lambda_{m+1})}+|\,u\,|^2_{A^r_\mu(\Lambda_{m+1})}).\tag{39}$$

将(38)式和(39)式代入(37)式, 即得

$$\begin{aligned}&|\,I_{N,\Lambda_{m+1}}u-u\,|^2_{\mu,\omega_{m+1},\Lambda_{m+1}}\leqslant\\&\qquad c(\ln N)^{m+1}N^{2\mu+m+1-r}(|\,u\,|^2_{A^r_0(\Lambda_{m+1})}+|\,u\,|^2_{A^r_{\mu+m}(\Lambda_{m+1})}).\end{aligned}$$

这样便完成了归纳法的证明, 从而(34)式成立.

最后, 由(34)式以及尺度变换技巧便得(33)式.

在这节的最后, 由(31)式~(33)式, 即得对任意的 $\phi\in\mathscr{P}_N$,

$$\begin{aligned}&|\,(v,\ \phi)_{N,\omega^{(\beta)}}-(v,\phi)_{\omega^{(\beta)}}\,|=|\,(I_N^{(\beta)}v-v,\phi)_{\omega^{(\beta)}}\,|\leqslant\\&\qquad\|I_N^{(\beta)}v-v\|_{\omega^{(\beta)}}\,\|\phi\|_{\omega^{(\beta)}}\leqslant\\&\qquad c\underline{\beta}^{-r}\beta^{r/2}(1+\beta^{-1/2})N^{(n-r)/2}(\ln N)^{n/2}(|\,v\,|_{A^r_{0,\beta}}+|\,v\,|_{A^r_{\mu^*,\beta}})\,\|\phi\|_{\omega^{(\beta)}}.\end{aligned}\tag{40}$$

2 两维无界区域中 Logistic 方程的 Laguerre 谱方法

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\Lambda=\Lambda_1\times\Lambda_2$, $V(\boldsymbol{x},t)$ 表示蠕虫的密度. $g(\boldsymbol{x},t)$ 以及 $V_0(\boldsymbol{x})$ 分别为源项和初始状态. 我们考虑下面带死亡边界条件的 Logistic 方程定解问题:

$$\begin{cases}\partial_t V(\boldsymbol{x},t)-\partial^2_{x_1}V(\boldsymbol{x},t)-\partial^2_{x_2}V(\boldsymbol{x},t)=\\\qquad V(\boldsymbol{x},t)(1-V(\boldsymbol{x},t))+g(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\Lambda, 0<t\leqslant T,\\v(x_1,0,t)=V(0,x_2,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T,\\V(\boldsymbol{x},0)=V_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Lambda.\end{cases}\tag{41}$$

假设 $V_0(\boldsymbol{x})\in L^2(\Lambda)$ 以及 $g\in L^2(0,T;L^2(\Lambda))$. 我们寻找问题(41)的解 $V\in L^\infty(0,T;L^2(\Lambda))\cap L^2(0,T;H^1_0(\Lambda))$. 为此, 应对解 $V(\boldsymbol{x},t)$ 在无穷远处加上合适的渐近条件:

$$|\,\boldsymbol{x}\,|\,V(\boldsymbol{x},t)\to 0,\ |\,\boldsymbol{x}\,|\,\partial_{x_q}V(\boldsymbol{x},t)\to 0,\ \text{a. e.},\ 当\ x_q\to\infty,\ q=1,2.\tag{42}$$

下面我们先定义问题(41)的解关于权函数 $\omega^{(\beta)}(\boldsymbol{x})$ 的一个弱形式, 然后再构造相应的谱格式. 然而不幸的是此时对应的弱形式在加权的 Sobolev 空间中不适定. 为了克服这个缺点, 我们作变量代换:

$$U(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}V(\boldsymbol{x},t),\ f(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}g(\boldsymbol{x},t),\ U_0(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}V_0(\boldsymbol{x}).$$

则(41)式变为

$$\begin{cases}\partial_t U(\boldsymbol{x},t)-\partial^2_{x_1}U(\boldsymbol{x},t)-\partial^2_{x_2}U(\boldsymbol{x},t)+\beta_1\partial_{x_1}U(\boldsymbol{x},t)+\beta_2\partial_{x_2}U(\boldsymbol{x},t)=\\\qquad U(\boldsymbol{x},t)(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4-\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}U(\boldsymbol{x},t))+f(\boldsymbol{x},t),\\\qquad\qquad \boldsymbol{x}\in\Lambda,\ 0<t\leqslant T,\\U(x_1,0,t)=U(0,x_2,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\U(\boldsymbol{x},0)=U_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Lambda.\end{cases}\tag{43}$$

渐近条件变成

$$\begin{aligned}&|\,\boldsymbol{x}\,|\,\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}U(\boldsymbol{x},t)\to 0,\ |\,\boldsymbol{x}\,|\,\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}\partial_{x_q}U(\boldsymbol{x},t)\to 0,\ \text{a. e.},\\&\qquad\qquad 当\ \boldsymbol{x}_q\to\infty,\ q=1,2.\end{aligned}\tag{44}$$

满足条件(44)的问题(43)的一个弱形式是: 寻找 $U\in L^{\infty}(0,T;L^2_{\omega(\beta)}(\Lambda))\cap L^2(0,T;H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda))$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t U(t),v)_{\omega(\beta)}+(\nabla U(t),\nabla v)_{\omega(\beta)}=\\ \quad((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)U(t)-\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}U^2(t),v)_{\omega(\beta)}+(f(t),v)_{\omega(\beta)},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall v\in H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda),\ 0<t\leqslant T,\\ U(0)=U_0.\end{cases}\tag{45}$$

对应的满足(44)式的问题(43)的修正 Laguerre 谱格式是: 寻找 $u_N(t)\in\mathscr{P}^0_N$ 使得对任意 $0<t\leqslant T$, 满足

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla u_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=\\ \quad((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)u_N(t)-\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}u_N^2(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(f(t),\phi)_{\omega(\beta)},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\phi\in\mathscr{P}^0_N,\ 0<t\leqslant T,\\ u_N(0)=u_{N,0}=P_N^{(\beta)}U_0.\end{cases}\tag{46}$$

为了估计格式(46)的误差, 需要下列引理:

引理 2.1 对任意 $v\in H^1_{0,\omega(\beta)}(\Lambda)$,

$$\int_\Lambda \mathrm{e}^{-2\beta\cdot x}v^4(x)\mathrm{d}x\leqslant 2\|v\|^2_{\omega(\beta)}|v|^2_{1,\omega(\beta)}.$$

证明 设 $\omega_q^{(\beta)}(x_q)=\mathrm{e}^{-\beta_q x_q}$. 可以验证对于任意的 $w\in H^1_{0,\omega_q^{(\beta)}}(\Lambda_q)$,

$$\|\partial_{x_q}(\mathrm{e}^{-\beta_q x_q/2}w)\|^2=\int_{\Lambda_q}\mathrm{e}^{-\beta_q x_q}(\partial_{x_q}w(x_q))^2\mathrm{d}x_q-$$
$$\frac{\beta_q^2}{4}\int_{\Lambda_q}\mathrm{e}^{-\beta_q x_q}w^2(x_q)\mathrm{d}x_q\leqslant\int_{\Lambda_q}\mathrm{e}^{-\beta_q x_q}(\partial_{x_q}w(x_q))^2\mathrm{d}x_q.\tag{47}$$

下面, 对任意的 $x\in\Lambda$,

$$\mathrm{e}^{-\beta\cdot x}v^2(x_1,x_2)=$$
$$2\int_0^{x_1}\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}v(\xi,x_2)\partial_\xi(\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}v(\xi,x_2))\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$2\int_{\Lambda_1}\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}|v(\xi,x_2)||\partial_\xi(\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}v(\xi,x_2))|\mathrm{d}\xi,$$
$$\mathrm{e}^{-\beta\cdot x}v^2(x_1,x_2)\leqslant 2\int_{\Lambda_2}\mathrm{e}^{-(\beta_1x_1+\beta_2\eta)/2}|v(x_1,\eta)||\partial_\eta(\mathrm{e}^{-(\beta_1x_1+\beta_2\eta)/2}v(x_1,\eta))|\mathrm{d}\eta.$$

因此

$$\mathrm{e}^{-2\beta\cdot x}v^4(x_1,x_2)\leqslant$$
$$4\int_{\Lambda_1}\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}|v(\xi,x_2)||\partial_\xi(\mathrm{e}^{-(\beta_1\xi+\beta_2x_2)/2}v(\xi,x_2))|\mathrm{d}\xi\times$$
$$\int_{\Lambda_2}\mathrm{e}^{-(\beta_1x_1+\beta_2\eta)/2}|v(x_1,\eta)||\partial_\eta(\mathrm{e}^{-(\beta_1x_1+\beta_2\eta)/2}v(x_1,\eta))|\mathrm{d}\eta.$$

在区域 Λ 上对以上不等式两边积分, 并利用(47)式, 我们可得

$$\int_\Lambda \mathrm{e}^{-2\beta\cdot x}v^4(x)\mathrm{d}x\leqslant 2\|v\|^2_{\omega(\beta)}|v|^2_{1,\omega(\beta)}.$$

下面我们考虑格式(46)的稳定性. 由于对非线性问题, 我们不可能得到通常意义下的稳定性结果. 然而有可能得到广义意义下的稳定性结果, 见文献[12]. 为证明这一结论, 我们假

定函数f 和$u_{N,0}$分别有误差f 和$u_{N,0}$．数值解u_N 由此产生的误差记为u_N，它满足下列方程:

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t u_N(t),\ \phi)_{\omega(\beta)} + (\nabla u_N(t),\ \nabla\phi)_{\omega(\beta)} = \\
&\quad ((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)u_N(t) - \mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}(u_N^{\,2}(t) + \\
&\quad 2u_N(t)u_N(t)) + f(t),\ \phi)_{\omega(\beta)}, \qquad \forall\phi\in\mathscr{P}_N^0,\ 0<t\leqslant T
\end{aligned}
\tag{48}
$$

以及 $u_N(0) = u_{N,0}$.

在(48)式中取$\phi = 2u_N$，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)} + 2|u_N(t)|^2_{1,\omega(\beta)} \leqslant \\
&\quad (3+\beta_1^2/2+\beta_2^2/2)\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)} - 2(\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}u_N^2(t),u_N(t))_{\omega(\beta)} - \\
&\quad 4(\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}u_N(t)u_N(t),u_N(t))_{\omega(\beta)} + \|f(t)\|^2_{\omega(\beta)}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

依次利用Schwartz不等式、引理2.1和(2)式，即得

$$
\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}u_N^2(t),u_N(t))_{\omega(\beta)}| \leqslant \|\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}u_N^2(t)\|_{\omega(\beta)}\|u_N(t)\|_{\omega(\beta)} \leqslant \\
&\quad \sqrt{2}\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}|u_N(t)|_{1,\omega(\beta)} \leqslant \\
&\quad (2\sqrt{2}/\underline{\beta})\|u_N(t)\|_{\omega(\beta)}|u_N(t)|^2_{1,\omega(\beta)}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{-(\beta\cdot x)/2}u_N(t)u_N(t),u_N(t))_{\omega(\beta)}| \leqslant \\
&\quad |u_N(t)|^2_{1,\omega(\beta)}/4 + 2\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

将(50)式和(51)式代入(49)式，并对t积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)} + \int_0^t\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{\underline{\beta}}\|u_N(\eta)\|_{\omega(\beta)}\right)|u_N(\eta)|^2_{1,\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta \leqslant \\
&\quad \rho(u_{N,0},f,t) + c_1(u_N,t)\int_0^t\|u_N(\eta)\|^2_{\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\rho(u_{N,0},f,t) = \|u_{N,0}\|^2_{\omega(\beta)} + \int_0^t\|f(\eta)\|^2_{\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta, \\
&c_1(u_N,t) = 3+\beta_1^2/2+\beta_2^2/2+8\|u_N\|^2_{L^\infty(0,t;L^2_{\omega(\beta)}(\Lambda))}.
\end{aligned}
$$

引理2.2(见文献[13]中的引理3.1)　假定

(ⅰ) 常数$b_1>0$, $b_2\geqslant 0$, $b_3\geqslant 0$, $d\geqslant 0$，并且对于某个$t_1>0$，满足$d\leqslant(b_1^2/b_2^2)\mathrm{e}^{-b_3t_1}$;

(ⅱ) $Z(t)$和$A(t)$为变量t的非负函数，且对任何$t\leqslant t_1$，满足:

$$
Z(t) + \int_0^t(b_1 - b_2Z^{1/2}(\eta))A(\eta)\mathrm{d}\eta \leqslant d + b_3\int_0^t Z(\eta)\mathrm{d}\eta.
$$

则有对任意$t\leqslant t_1$, $Z(t)\leqslant d\,\mathrm{e}^{b_3t}$.

将以上的引理应用到(52)式，便得下列结果:

定理2.1　设常数$0\leqslant a<1$, $u_N(t)$为(46)式的解．如果对某个$t_1>0$，满足

$$
\rho(u_{N,0},f_0,t_1) \leqslant ((1-a)^2/32)\underline{\beta}^2\mathrm{e}^{-c_1(u_N,t_1)t_1},
$$

则对任何$t\leqslant t_1$,

$$
\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)} + a\int_0^t|u_N(\eta)|^2_{1,\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta \leqslant \rho(u_{N,0},f_0,t)\mathrm{e}^{c_1(u_N,t_1)t}.
$$

我们现在讨论格式(46)的收敛性．令$U_N = P_N^{(1,0,\beta)}U$．则由(43)式可得

$$
(\partial_t U_N(t),\ \phi)_{\omega(\beta)} + (\nabla U_N(t),\ \nabla\phi)_{\omega(\beta)} =
$$

$$((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)U_N(t)-\mathrm{e}^{-(\beta\cdot x)/2}U_N^2(t)+f(t),\phi)_{\omega(\beta)}+\sum_{q=1}^{3}G_q(t,\phi),\qquad \forall\,\phi\in\mathscr{P}_N^0,\ 0<t\leqslant T,\tag{53}$$

其中

$$G_1(t,\phi)=(\partial_t U_N(t)-\partial_t U(t),\phi)_{\omega(\beta)},$$
$$G_2(t,\phi)=(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)(U(t)-U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)},$$
$$G_3(t,\phi)=(\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}(U_N^2(t)-U^2(t)),\phi)_{\omega(\beta)}$$

以及 $U_N(0)=P_N^{(1,0,\beta)}U_0$.

进一步, 令 $U_N(t)=u_N(t)-U_N(t)$. (46)式减去(53)式得

$$(\partial_t U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla U_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=$$
$$((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)U_N(t)-\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}(U_N^2(t)+2U_N(t)U_N(t)),\phi)_{\omega(\beta)}-\sum_{q=1}^{3}G_q(t,\phi),\qquad \forall\,\phi\in\mathscr{P}_N^0,\ 0<t\leqslant T.\tag{54}$$

另外, $U_N(0)=P_N^{(\beta)}U_0-P_N^{(1,0,\beta)}U_0$.

比较(54)式和(48)式, 我们发现只要估计 $\|U_N(0)\|_{\omega(\beta)}$ 以及 $|G_q(t,U_N(t))|\ (q=1,2,3)$ 的上界, 便可得数值解的误差估计. 实际上, 利用(2)式以及定理1.3, 我们可得对于任意整数 $r\geqslant 2$,

$$|G_1(t,U_N(t))|\leqslant\|U_N(t)\|_{\omega(\beta)}^2+c\underline{\beta}^{-2r}\beta^{r-2}N^{2-r}|\partial_t U(t)|_{A_{2,\beta}^r}^2,\tag{55}$$

$$|G_2(t,U_N(t))|\leqslant\|U_N(t)\|_{\omega(\beta)}^2+c\underline{\beta}^{-2r}\beta^{r-2}(1+\beta^4)N^{2-r}|U(t)|_{A_{2,\beta}^r}^2.\tag{56}$$

更进一步, 利用(2)式、引理2.1、定理1.3以及Schwartz不等式可得

$$|G_3(t,U_N(t))|\leqslant c\beta^{-3/2}|U_N(t)+U(t)|_{1,\omega(\beta)}|U_N(t)|_{\omega(\beta)}^{(1/2)}|U_N(t)|_{1,\omega(\beta)}^{(1/2)}|U_N(t)-U(t)|_{1,\omega(\beta)}\leqslant$$
$$\|U_N(t)\|_{\omega(\beta)}^2+|U_N(t)|_{1,\omega(\beta)}^2/4+c\beta^{-3}(|U_N(t)|_{1,\omega(\beta)}+|U(t)|_{1,\omega(\beta)})^2|U_N(t)-U(t)|_{1,\omega(\beta)}^2\leqslant$$
$$\|U_N(t)\|_{\omega(\beta)}^2+|U_N(t)|_{1,\omega(\beta)}^2/4+c\underline{\beta}^{-2r}\beta^{r-3}N^{2-r}(\underline{\beta}^{-4}\beta^2|U(t)|_{A_{2,\beta}^2}^2+|U(t)|_{1,\omega(\beta)}^2)|U(t)|_{A_{2,\beta}^r}^2.\tag{57}$$

另一方面, 由(2)式、定理1.1以及定理1.3, 可推出

$$\|U_N(0)\|_{\omega(\beta)}^2\leqslant 2(\|P_N^{(\beta)}U_0-U_0\|_{\omega(\beta)}^2+\|P_N^{(1,0,\beta)}U_0-U_0\|_{\omega(\beta)}^2)\leqslant$$
$$c(\beta^{2-r}+\underline{\beta}^{-2r}\beta^{r-2})N^{2-r}(|U_0|_{A_{0,\beta}^{r-2}}^2+|U_0|_{A_{2,\beta}^r}^2).\tag{58}$$

若记

$$\mathscr{B}(U,T,r)=\int_0^T(|U(t)|_{A_{1,\beta}^1}^4+|U(t)|_{A_{2,\beta}^2}^4+|U(t)|_{A_{2,\beta}^r}^4+|\partial_t U(t)|_{A_{2,\beta}^r}^2)\mathrm{d}t+|U_0|_{A_{0,\beta}^{r-2}}^2+|U_0|_{A_{2,\beta}^r}^2.$$

则由上面的分析, (22)式以及(55)~(58)式, 我们得到以下结论:

定理2.2 如果对某个整数 $r\geqslant 2$, 表达式 $\mathscr{B}(U,T,r)$ 有界, 则对任何的 $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\|u_N(t)-U(t)\|_{\omega(\beta)}^2+\int_0^t\|u_N(\eta)-U(\eta)\|_{1,\omega(\beta)}^2\mathrm{d}\eta\leqslant$$
$$c\underline{\beta}^{-2r}\beta^{r-3}(\beta^{-4}\beta^{-2}+\beta^5+1)\mathscr{B}(U,T,r)N^{2-r}.$$

注记 2.1 在实际计算中,我们可以取 $u_{N,0}=P_N^{(1,0,\beta)}U_0$ 以取得更好的误差估计.

3 二维无界区域中 Logistic 方程的拟谱方法

本节,我们将提出问题(45)的修正 Laguerre 拟谱方法:寻找 $u_N(t)\in\mathscr{P}_N^0$,使得对任何 $0\leqslant t\leqslant T$,满足

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla u_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=\\ \qquad(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)(u_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}-(e^{-\beta\cdot x/2}u_N^2(t),\phi)_{\omega(\beta),N}+\\ \qquad(f(t),\phi)_{\omega(\beta),N},\qquad\forall\phi\in\mathscr{P}_N^0,0\leqslant t\leqslant T,\\ u_N(0)=u_{N,0}=I_N^{(\beta)}U_0.\end{cases}\tag{59}$$

由(31)式、格式(59)等价于下列非线性方程组:

$$\begin{cases}\partial_t u_N(\boldsymbol{x},t)-\partial_{x_1}^2u_N(\boldsymbol{x},t)-\partial_{x_2}^2u_N(\boldsymbol{x},t)+\beta_1\partial_{x_1}u_N(\boldsymbol{x},t)+\beta_2\partial_{x_2}u_N(\boldsymbol{x},t)=\\ \qquad u_N(\boldsymbol{x},t)(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4-e^{-\beta\cdot x/2}u_N(\boldsymbol{x},t))+f(\boldsymbol{x},t),\\ \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{x}\in\Lambda_{N,\beta},0<t\leqslant T,\\ u_N(x_1,0,t)=u_N(0,x_2,t)=0,\\ u_N(\boldsymbol{x},0)=I_N^{(\beta)}U_0.\end{cases}\tag{60}$$

很明显,格式(60)比格式(59)在实际计算中更容易处理. 然而格式(59)的误差估计更简单.

设 $\boldsymbol{j}=(j_1,j_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\sigma_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)}=(\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)},\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)})$ 以及 $\omega_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)}=\omega_{N,j_1}^{(\beta_1)}\omega_{N,j_2}^{(\beta_2)}$. 我们给出下列引理.

引理 3.1 对任意 $v\in\mathscr{P}_N^0$,

$$\sum_{0\leqslant j_1,j_2\leqslant N}e^{-\beta\cdot\sigma_{N,j}^{(\beta)}}\omega_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)}v^4(\sigma_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)})\leqslant 2\|v\|_{\omega(\beta)}^2|v|_{1,\omega(\beta)}^2.$$

证明 显然,我们有

$$e^{-\beta_1\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)}}v^2(\sigma_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)})\leqslant 2\int_{\Lambda_1}e^{-\beta_1x_1/2}|v(x_1,\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)})||\partial_{x_1}(e^{-\beta_1x_1/2}v(x_1,\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)}))|dx_1,$$

$$e^{-\beta_2\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)}}v^2(\sigma_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)})\leqslant 2\int_{\Lambda_2}e^{-\beta_2x_2/2}|v(\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)},x_2)||\partial_{x_2}(e^{-\beta_2x_2/2}v(\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)},x_2))|dx_2.$$

因此,利用 Hölder 不等式,(31)式以及(47)式,可以推得

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant j_1,j_2\leqslant N}e^{-\beta\cdot\sigma_{N,j}^{(\beta)}}\omega_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)}v^4(\sigma_{N,\boldsymbol{j}}^{(\beta)})\leqslant\\ &\quad 4\left(\int_{\Lambda_1}\sum_{0\leqslant j_2\leqslant N}e^{-\beta_1x_1}\omega_{N,j_2}^{(\beta_2)}v^2(x_1,\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)})dx_1\right)^{1/2}\times\\ &\quad\left(\int_{\Lambda_1}\sum_{0\leqslant j_2\leqslant N}\omega_{N,j_2}^{(\beta_2)}(\partial_{x_1}(e^{-\beta_1x_1/2}v(x_1,\sigma_{N,j_2}^{(\beta_2)})))^2dx_1\right)^{1/2}\times\\ &\quad\left(\int_{\Lambda_2}\sum_{0\leqslant j_1\leqslant N}e^{-\beta_2x_2}\omega_{N,j_1}^{(\beta_1)}v^2(\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)},x_2)dx_2\right)^{1/2}\times\\ &\quad\left(\int_{\Lambda_2}\sum_{0\leqslant j_1\leqslant N}\omega_{N,j_1}^{(\beta_1)}(\partial_{x_2}(e^{-\beta_2x_2/2}v(\sigma_{N,j_1}^{(\beta_1)},x_2)))^2dx_2\right)^{1/2}\leqslant\end{aligned}$$

$$4\int_{\Lambda}\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}}v^2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\left(\int_{\Lambda}\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}}(\partial_{x_1}v(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2}\times$$
$$\left(\int_{\Lambda}\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}}(\partial_{x_2}v(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2}\leqslant 2\,\|v\|^2_{\omega(\beta)}\,|v|^2_{1,\,\omega(\beta)}.$$

下面我们分析格式(59)的稳定性. 假定函数f和$u_{N,0}$有一扰动误差, 分别用f和$u_{N,0}$表示. 它们由此对解u_N产生的误差用u_N表示, 易得u_N满足下列方程:

$$\begin{aligned}&(\partial_t u_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla u_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=\\&\quad((1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)u_N(t)-\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}(u_N^2(t)+2u_N(t)u_N(t))+\\&\quad f(t),\phi)_{\omega(\beta),N},\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{R}_N^0,\ 0<t\leqslant T.\end{aligned}\tag{61}$$

另外, $u_N(0)=u_{N,0}$. 比较(61)式和(48)式, 我们要分析稳定性, 只要估计(61)式中的最后一项$\phi=u_N$时的值即可. 依次利用Schwartz不等式, 引理3.1、(31)式以及(2)式, 我们得

$$|(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}u_N^2(t),u_N(t))_{\omega(\beta),N}|\leqslant(2\sqrt{2}/\beta)\,\|u_N(t)\|_{\omega(\beta)}\,|u_N(t)|^2_{1,\,\omega(\beta)}.\tag{62}$$

类似地

$$\begin{aligned}&|(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}u_N(t)u_N(t),u_N(t))_{\omega(\beta),N}|\leqslant\\&\quad|u_N(t)|^2_{1,\,\omega(\beta)}/4+2\,\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}\,\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)},\end{aligned}\tag{63}$$

$$\begin{aligned}&|(f(t),u_N(t))_{\omega(\beta),N}|\leqslant\|f(t)\|^2_{\omega(\beta),N}\,\|u_N(t)\|_{\omega(\beta)}\leqslant\\&\quad\|f(t)\|^2_{\omega(\beta),N}/2+\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}/2.\end{aligned}\tag{64}$$

在(61)式中取$\phi=2u_N$, 并将(62)~(64)式代入(61)式, 然后再对t积分. 利用与证明定理2.1类似的方法, 我们得到下列结果:

定理3.1 设$0\leqslant a<1$, u_N是问题(59)的解. 如果对某个$t_1>0$, $\rho(u_{N,0},f,t_1)\leqslant((1-a)^2/32)\beta^2\mathrm{e}^{-c_1(u_N,t_1)t_1}$成立, 则对任意$t\leqslant t_1$,

$$\|u_N(t)\|^2_{\omega(\beta)}+a\int_0^t\|u_N(\eta)\|^2_{1,\,\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta\leqslant\rho(u_{N,0},f_0,t)\mathrm{e}^{c_1(u_N,t_1)t},$$

其中$c_1(u_N,t_1)$的意义与定理2.1中相同,

$$\rho(u_{N,0},f,t)=\|u_{N,0}\|^2_{\omega(\beta)}+\int_0^t\|f(\eta)\|^2_{\omega(\beta),N}\mathrm{d}\eta.$$

下面我们讨论格式(59)的收敛性. 设$U_N=P_N^{(1,0,\beta)}U$. 则由(43)式,

$$\begin{aligned}&(\partial_t U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla U_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=\\&\quad(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)(U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}-(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}U_N^2(t),\phi)_{\omega(\beta),N}+\\&\quad(f(t),\phi)_{\omega(\beta),N}+\sum_{q=1}^{2}G_q(t,\phi)+\sum_{q=1}^{2}E_q(t,\phi),\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{R}_N^0,\ 0<t\leqslant T,\end{aligned}\tag{65}$$

其中$G_1(t,\phi)$和$G_2(t,\phi)$的意义与(53)式中相同,

$$\begin{aligned}&E_1(t,\phi)=(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}U_N^2(t),\phi)_{\omega(\beta),N}-(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}U^2(t),\phi)_{\omega(\beta)},\\&E_2(t,\phi)=(f(t),\phi)_{\omega(\beta)}-(f(t),\phi)_{\omega(\beta),N}.\end{aligned}$$

另外, $U_N(0)=P_N^{(1,0,\beta)}U_0$.

进一步, 记$U_N(t)=u_N(t)-U_N(t)$. 从(59)式中减去(65)式, 即得

$$\begin{aligned}&(\partial_t U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}+(\nabla U_N(t),\nabla\phi)_{\omega(\beta)}=\\&\quad(1+\beta_1^2/4+\beta_2^2/4)(U_N(t),\phi)_{\omega(\beta)}-\\&\quad(\mathrm{e}^{-\beta\cdot\boldsymbol{x}/2}(U_N^2(t)+2U_N(t)U_N(t)),\phi)_{\omega(\beta),N}-\end{aligned}$$

$$\sum_{q=1}^{2} G_q(t,\phi) - \sum_{q=1}^{2} E_q(t,\phi), \qquad \forall \phi \in \mathscr{P}_N^0,\ 0 < t \leqslant T. \tag{66}$$

另外，$U_N(0) = I_N^{(\beta)} U_0 - P_N^{(1,0,\beta)} U_0$.

比较(66)式与(54)式，我们只要估计表达式 $|G_q(t, U_N(t))|$, $|E_q(t, U_N(t))|$ 和 $\| U_N(0) \|_{\omega(\beta)}$ 即可． 表达式 $|G_q(t, U_N(t))|$ $(q = 1, 2)$ 在上节中已估计． 而

$$|E_1(t, U_N(t))| \leqslant H_1(t, U_N(t)) + H_2(t, U_N(t)), \tag{67}$$

其中

$$H_1(t, U_N(t)) = |(e^{-\beta \cdot x/2}(U_N^2(t) - U^2(t)), U_N(t))_{\omega(\beta),N}|,$$

$$H_2(t, U_N(t)) = |(e^{-\beta \cdot x/2} U^2(t), U_N(t))_{\omega(\beta),N} - (e^{-\beta \cdot x/2} U^2(t), U_N(t))_{\omega(\beta)}|.$$

利用 Hölder 不等式以及引理 3.1, 我们推得

$$\begin{aligned} H_1(t, U_N(t)) \leqslant{}& \| e^{-\beta \cdot x/2}(U_N^2(t) - U^2(t)) \|_{\omega(\beta),N} \| U_N(t) \|_{\omega(\beta),N} \leqslant \\ & c \| U_N(t) - I_N^{(\beta)} U(t) \|_{\omega(\beta)}^{1/2} | U_N(t) - \\ & I_N^{(\beta)} U(t) |_{1,\omega(\beta)}^{1/2} \| U_N(t) + I_N^{(\beta)} U(t) \|_{\omega(\beta)}^{1/2} \times \\ & | U_N(t) + I_N^{(\beta)} U(t) |_{1,\omega(\beta)}^{1/2} \| U_N(t) \|_{\omega(\beta)}. \end{aligned}$$

进一步, 由(2)式、定理 1.3 和定理 1.4, 我们得到对任何整数 $r \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \| U_N(t) - I_N^{(\beta)} U(t) \|_{\omega(\beta)} \leqslant{}& \beta^{-1} | U_N(t) - U(t) |_{1,\omega(\beta)} + \| I_N^{(\beta)} U(t) - U(t) \|_{\omega(\beta)} \leqslant \\ & c \underline{\beta}^{-r} \beta^{r/2} (1 + \beta^{-1}) N^{1-r/2} \ln N \sum_{\xi=0,1,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^r}. \end{aligned}$$

类似地

$$| U_N(t) - I_N^{(\beta)} U(t) |_{1,\omega(\beta)} \leqslant c \underline{\beta}^{-r} \beta^{r/2} (1 + \beta) N^{2-r/2} \ln N \sum_{\xi=0,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^r}.$$

另一方面, 利用(2)式, 情形 $r = n = 2$ 时的定理 1.3, 以及情形 $r = n = 2$, $\mu = 0$ 的定理 1.4, 我们推得

$$\begin{aligned} \| U_N(t) + I_N^{(\beta)} U(t) \|_{\omega(\beta)} \leqslant{}& \beta^{-1} | U_N(t) |_{1,\omega(\beta)} + \| I_N^{(\beta)} U(t) \|_{\omega(\beta)} \leqslant \\ & c(\underline{\beta}^{-2} + \underline{\beta}^{-2}\beta + 1) \ln N \left(\sum_{\xi=0,1,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^2} + \sum_{\xi=0,1} | U(t) |_{\{A_{\xi,\beta}^{\xi}} \right). \end{aligned}$$

类似地, 利用 $r = n = 2$ 时的定理 1.3, $r = 4$, $n = 2$, $\mu = 1$ 时的定理 1.4, 即得

$$\begin{aligned} | U_N(t) + I_N^{(\beta)} U(t) |_{1,\omega(\beta)} \leqslant{}& \\ & c(\underline{\beta}^{-4}\beta^3 + \underline{\beta}^{-4}\beta^2 + 1) \ln N \left(\sum_{\xi=0,2} | U(t) |_{A_{\xi,\beta}^4} + | U(t) |_{A_{2\beta}^2} + | U(t) |_{A_{1,\beta}^1} \right). \end{aligned}$$

因此, 对任意整数 $r \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} H_1(t, U_N(t)) \leqslant{}& c \| U_N(t) \|_{\omega(\beta)}^2 + c \underline{\beta}^{-2r} \beta^{r+1} (\underline{\beta}^{-6} + \underline{\beta}^{-6}\beta^4 + \underline{\beta}^{-4}\beta + \underline{\beta}^{-4}\beta^3 + 1) \times \\ & N^{3-r} (\ln N)^4 \left(\sum_{\xi=0,1,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^2}^2 + \sum_{\xi=0,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^4}^2 + \right. \\ & \left. \sum_{\xi=0,1} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^{\xi}}^2 \right) \left(\sum_{\xi=0,1,2} | U(t) |_{A_{\xi\beta}^r}^2 \right), \end{aligned} \tag{68}$$

由定理 1.4, 我们得到当 $r \geqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned} H_2(t, U_N(t)) \leqslant{}& \| U_N(t) \|_{\omega(\beta)}^2 + \\ & c \underline{\beta}^{-2r+2} \beta^{r-1} (1 + \beta^{-1}) N^{3-r} (\ln N)^2 \sum_{\xi=0,1} | e^{-\beta \cdot x/2} U^2(t) |_{A_{\xi\beta}^{r-1}}^2. \end{aligned} \tag{69}$$

进一步, 由定理 1.4 可推得

$$| E_2(t, U_N(t)) | \leqslant \| U_N(t) \|_{\omega(\beta)}^2 +$$

$$c\underline{\beta}^{-2r+2}\beta^{r-1}(1+\beta^{-1})N^{3-r}(\ln N)^2\sum_{\xi=0,1}|f(t)|^2_{A^{r-1}_{\xi,\beta}}. \tag{70}$$

最后,利用(2)式、定理 1.3 以及定理 1.4 得到

$$\|U_N(0)\|^2_{\omega(\beta)}\leqslant 2(\|I_N^{(\beta)}U_0-U_0\|^2_{\omega(\beta)}+\|P_N^{(1,0,\beta)}U_0-U_0\|^2_{\omega(\beta)})\leqslant$$
$$c\underline{\beta}^{-2r+2}\beta^{r-1}(1+\beta^{-2})N^{3-r}(\ln N)^2\sum_{\xi=0,1,2}|U_0|^2_{A^{r-1}_{\xi,\beta}}. \tag{71}$$

令

$$\mathscr{B}(U,T,r)=\sum_{\xi=0,1,2}\int_0^T(|U(t)|^4_{A^r_{\xi,\beta}}+|U(t)|^4_{A^2_{\xi,\beta}})\mathrm{d}t+\sum_{\xi=0,2}\int_0^T|U(t)|^4_{A^4_{\xi,\beta}}\mathrm{d}t+$$
$$\sum_{\xi=0,1}\int_0^T|U(t)|^4_{A^{\xi}_{\xi,\beta}}\mathrm{d}t+\int_0^T|\partial_tU(t)|^2_{A^{r-1}_{2,\beta}}\mathrm{d}t+$$
$$\sum_{\xi=0,1}\int_0^T(|\mathrm{e}^{-\beta\cdot x/2}U^2(t)|^4_{A^{r-1}_{\xi,\beta}}+|f(t)|^2_{A^{r-1}_{\xi,\beta}})\mathrm{d}t+\sum_{\xi=0,1,2}|U_0|^2_{A^{r-1}_{\xi,\beta}}.$$

利用 r 用 $r-1$ 代替时的(55)式~(56)式,(68)式~(71)式,嵌入不等式,用与定理 3.1 类似的方法可证明以下结论.

定理 3.2 如果对于某个整数 $r\geqslant 3$, $\mathscr{B}(U,T,r)$ 有界,则对所有的 $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\|u_N(t)-U(t)\|^2_{\omega(\beta)}+\int_0^t|u_N(\eta)-U(\eta)|^2_{1,\omega(\beta)}\mathrm{d}\eta\leqslant$$
$$c\underline{\beta}^{-2r+2}\beta^{r+1}(\underline{\beta}^{-8}+\underline{\beta}^{-8}\beta^4+\underline{\beta}^{-6}\beta+\underline{\beta}^{-6}\beta^3+\beta^{-2}+\beta^{-4})\mathscr{B}(U,T,r)N^{3-r}(\ln N)^4.$$

4 数值结果

在本节中我们将举几个实例. 首先取试验函数

$$V(x_1,x_2,t)=\mathrm{e}^{-x_1-x_2}\sin\left(\frac{1}{5}x_1t\right)\sin\left(\frac{1}{5}x_2t\right). \tag{72}$$

用格式(46)以及格式(60)数值求解问题(45). 时间 t 方向的计算步长取 τ, 在实际计算中使用标准的四阶 Runge-Kutta 方法. 数值解 $u_N(\boldsymbol{x},t)$ 的误差分别用整体加权误差 $E_{N,\beta}(t)=\|U(t)-u_N(t)\|_{\omega(\beta),N}$ 表示,最大误差 $E_{\max,N,\beta}(t)=\max_{\boldsymbol{x}\in\Lambda_{N,\beta}}|U(\boldsymbol{x},t)-u_N(\boldsymbol{x},t)|$ 来表示.

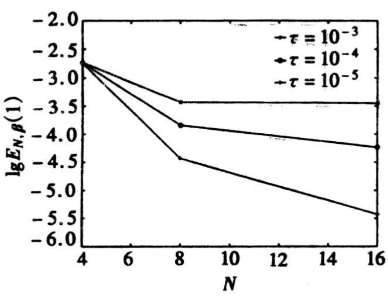

图 1 格式(46)

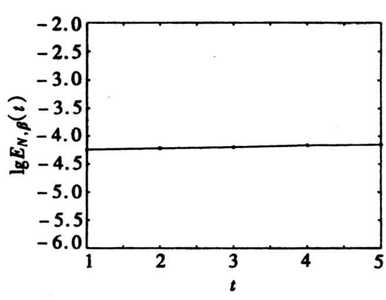

图 2 $N=16$, $\tau=10^{-4}$

我们首先使用格式(46)来求解问题(45). 其中 Laguerre 系数用 $N+1$ 个节点的 Laguerre 积分公式来计算. 对 $t=1$, $\beta_1=\beta_2=1$, 不同 N 的计算误差 $\lg E_{N,\beta}(t)$ 的结果见图 1. 从中可见计算格式(46)的高精度性以及收敛性. 特别地,对于适当小的时间步长 τ, 整体误差取决于空间方向的误差. 显然,图 1 指出了空间方向的谱精度. 对于 $\beta_1=\beta_2=1$, $N=16$ 以及

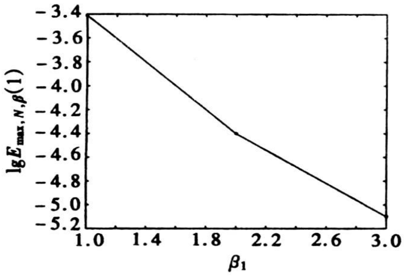

图 3 $N = 16, \tau = 10^{-4}$

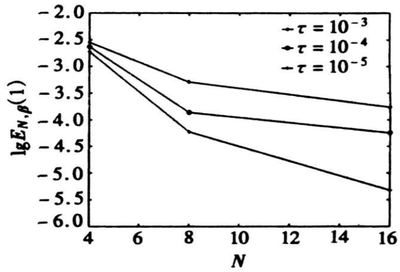

图 4 格式(60)

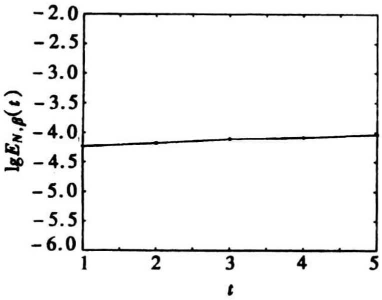

图 5 $N = 16, \tau = 10^{-4}$

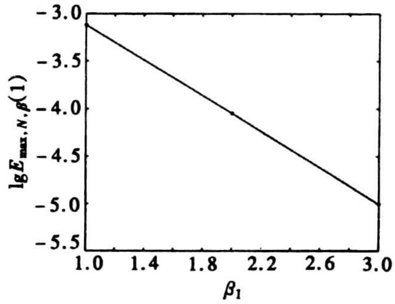

图 6 $N = 16, \tau = 10^{-4}$

$\tau = 0.000\ 1$ 时的误差 $\lg E_{N,\beta}(t)$ 见图2． 从而可看出格式的数值稳定性． $t = 1, N = 16, \tau = 0.000\ 1$ 以及 $\beta_1 = \beta_2 = 1, 2, 3$ 时的误差 $\lg E_{\max,N,\beta}(t)$ 见图3． 从中可见格式(46) 对于合适选取的 β 值能提供更好的计算精度.

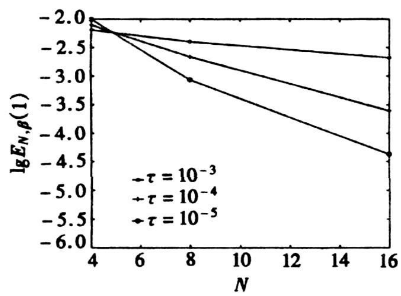

图 7 格式(46)

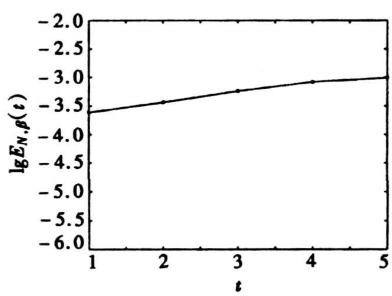

图 8 $N = 16, \tau = 10^{-4}$

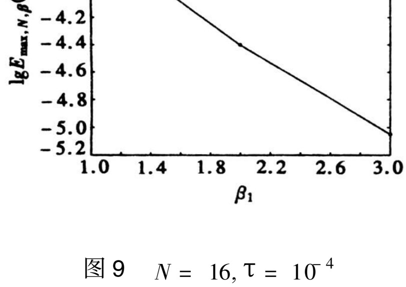

图 9 $N = 16, \tau = 10^{-4}$

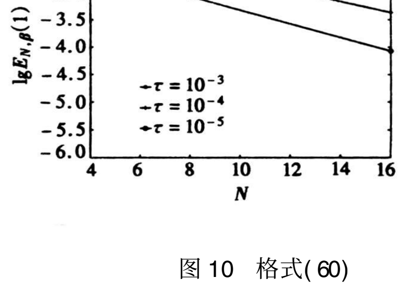

图 10 格式(60)

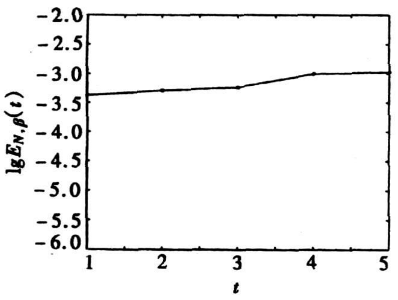

图 11　$N=16, \tau=10^{-4}$

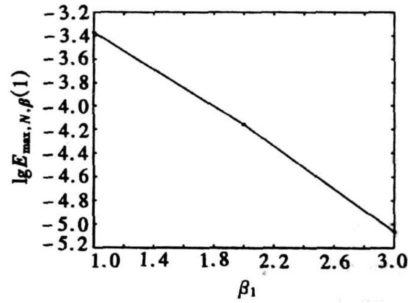

图 12　$N=16, \tau=10^{-4}$

下面我们用格式(60)来求解问题(45)．$t=1, \beta_1=\beta_2=1$时的误差值lg$E_{N,\beta}(t)$与不同的N以及步长τ的关系见图4．显然格式(60)的计算精度与格式(46)相同．但可以减少计算时间．$\beta_1=\beta_2=1, N=16, \tau=0.000\,1$时的误差lg$E_{N,\beta}(t)$见图5,从中可看出计算的稳定性．$t=1, N=16, \tau=0.000\,1, \beta_1=\beta_2=1,2,3$时的误差lg$E_{\max,N,\beta}(t)$见图6．可看出通过选取合适的参数$\beta$,可以提高格式(60)的计算精度.

其次取试验函数为

$$V(x_1, x_2, t)=\frac{1}{(1+x_1+x_2+t)^3}. \tag{73}$$

首先用格式(46)求解问题(45)．$t=1, \beta_1=\beta_2=1$时,误差值lg$E_{N,\beta}(t)$与各种不同的N和步长τ的关系见图7．从中可看出格式(46)的收敛性与高精度性．$\beta_1=\beta_2=1, N=16, \tau=0.000\,1$时,对各种不同的$t$的误差值lg$E_{N,\beta}(t)$见图8,可见计算是稳定的．$t=1, N=16, \tau=0.000\,1, \beta_1=\beta_2=1,2,3$时的误差值lg$E_{\max,N,\beta}(t)$见图9,可见适当选取参数$\beta$可以提高精度.

下面我们用格式(60)来求解问题(45)．设$t=1, \beta_1=\beta_2=1$,误差值lg$E_{N,\beta}(t)$与不同的N及τ的关系见图10,从中可看出格式(46)的计算精度与格式(60)同阶．在图11中,我们画出了当$\beta_1=\beta_2=1, N=16, \tau=0.000\,1$时的误差值lg$E_{N,\beta}(t)$,它们显示了格式的计算稳定性．图12,我们画出了$t=1, N=16, \tau=0.000\,1, \beta_1=\beta_2=1,2,3$时的误差值lg$E_{\max,N,\beta}(t)$．它们表明了适当选取参数$\beta$可以提高计算精度.

从以上的计算结果可看出对试验函数(72)式的计算结果要比对试验函数(73)式的计算结果要好．即计算精度依赖于精确解的正则性,这个特性与我们的理论分析结果完全吻合.

[参　考　文　献]

[1] Maday Y, Bernaud-Thomas B, Vandeven H. Une rehabilitation des m thods spectrales de type Laguerre[J]. Rech A rospat, 1985, **6**(6): 353-379.

[2] Funaro D. Polynomial Approximation of Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] GUO Ben-yu, SHEN Jie. Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval[J]. Numer Math, 2000, **86**(4): 635-654.

[4] GUO Ben-yu, WANG Li-lian, WANG Zhong-qing. Generalized Laguerre interpolation and pseudospectral method for unbounded domains[J]. SIAM J Numer Anal, 2006, **43**(6): 2567-2589.

[5] GUO Ben-yu, ZHANG Xiao-yong. A new generalized Laguerre approximation and its applications[J]. J Comput Appl Math, 2005, **181**(2): 342-363.

[6] GUO Ben-yu, XU Cheng-long. Mixed Laguerre-Lagendre pseudospectral method for incompressible fluid flow in an infinite strip[J]. Math Comp, 2003, **73**(245): 95-125.

[7] Mastroianni G, Monegato G. Nyström interpolants based on zeros of Laguerre polynomials for some weiner-Hopf equations[J]. IMA J Numer Anal, 1997, **17**(4): 621-642.

[8] SHEN Jie. Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using Laguerre functions[J]. SIAM J Numer Anal, 2000, **38**(4): 1113-1133.

[9] XU Cheng-long, GUO Ben-yu. Laguerre pseudospectral method for nonlinear partial differential equations in unbounded domains[J]. J Comput Math, 2002, **20**(4): 413-428.

[10] Bergh J, Löfström J. Interpolation Spaces, An Introduction [M]. Berlin: Spring-Verlag, 1976.

[11] Bernardi C, Maday Y. Spectral Methods[A]. In: Ciarlet P G, Lions J L, Eds. Handbook of Numerical Analysis [C]. Amsterdam: Elsevier, 1997, 209-486.

[12] GUO Ben-yu. Generalized stability of discretization and its applications to numerical solutions of nonlinear differential equations[J]. Contemp Math, 1994, **163**: 33-54.

[13] GUO Ben-yu. Error estimation of Hermite spectral method for nonlinear partial differential equations [J]. Math Comp, 1999, **68**(227): 1067-1078.

Modified Laguerre Spectral and Pseudospectral Methods for Nonlinear Partial Differential Equations in Multiple Dimensions

XU Cheng-long[1,2], GUO Ben-yu[2,3,4]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;
2. Division of Computational Science of E-institute of Shanghai Universities, Shanghai 200234, P. R. China;
3. Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China;
4. Scientific Computing Key Laboratory of Shanghai Universities, Shanghai 200234, P. R. China)

Abstract: The Laguerre spectral and pseudospectral methods for multiple-dimensional nonlinear partial differential equations are investigated. Some results on the modified Laguerre orthogonal approximation and interpolation were established, which play important roles in the related numerical methods for unbounded domains. As an example, the modified Laguerre spectral and pseudospectral methods were proposed for two-dimensional Logistic equation. The stability and convergence of suggested schemes were proved. Numerical results demonstrate the high accuracy of these approaches.

Key words: multiple dimension; modified Laguerre orthogonal polynomials; interporlation and orthogonal approximation; spectral and pseudospectral method