文章编号: 1000-0887(2008) 03-0272-09

局部 FG-一致空间内的广义约束多目标对策*

丁协平[1], 黎进三[2,3], 姚任之[2]

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066;
2. 国立中山大学 应用数学系, 台湾 高雄 82424;
3. 树德科技大学 休闲事业管理系, 台湾 高雄 82445)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在没有任何凸性结构的局部 FG-一致空间内引入和研究了一类新的广义约束多目标对策, 其中局中人数可以是有限或无限的和所有的支付函数可以取值于无限维空间. 利用在局部 FG-一致空间内得到的一个 Himmelberg 型不动点定理, 在局部 FG-一致空间内对广义约束多目标对策建立了某些弱 Pareto 平衡存在性定理. 这些定理改进, 统一和推广了最近文献中相应结果.

关 键 词: 局部 FG-一致空间; 不动点; 广义约束多目标对策; 弱 Pareto 平衡
中图分类号: 221. 2; O177. 92 文献标识码: A

引 言

近年来, 很多注意力集中在对策论中的具有矢量支付函数的对策问题, 例如见文献[1-15]和其中的参考文献. 理由之一是多准则模型能被更好的应用于真实世界. Pareto 平衡的存在性是多目标对策的基本问题之一. 我们注意到在已存在的大多数多目标对策和约束多目标对策的模型中, 所有的支付函数被假设为是单值的和限制局中人数是有限的. 最近, Yu[16], Lin 和 Yu[17] 引入和研究了一类约束多目标对策模型, 其中局中人数是有限或无限的并且所有的支付函数是单值的和取值于无限维空间. 但是, 在某些情况下, 对每一局中人和每一策略, 其支付函数可以是一集合. 因此, 对具有多值矢量支付函数的约束多目标对策研究矢量平衡问题在真实世界中是有用的. Lin 和 Cheng[18] 在局部凸拓扑矢量空间内引入和研究了一类新的具有多值矢量支付函数的广义约束多目标对策. Ding[19] 在没有任何凸性结构的局部 FG-空间中研究了这类具有多值矢量支付函数的广义约束多目标对策.

设 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, X_i 是一拓扑空间. 我们使用下面记号:

$$X = \prod_{i \in I} X_i \quad 和 \quad X^i = \prod_{j \in I, j \neq i} X_j .$$

---

* 收稿日期: 2007-01-06; 修订日期: 2008-01-16
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(07ZA092); 台湾科学委员会基金项目
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授(联系人. Tel: + 86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com);
黎进三(1950—), 男, 高雄人, 教授;
姚任之(1959—), 男, 高雄人, 教授, 博士生导师.

对每一$x \in X$, x_i和x^i分别表x在X_i和X^i上的投影．写$x = (x^i, x_i)$.

跟随 Lin 和 Cheng[18], 我们引入下面的广义约束多目标对策.

设I是局中人的任何集合, 每一个局中人$i \in I$有一策略集X_i, 一约束对应$A_i: X^i \to 2^{X_i}$, 一支付函数$F_i: X^i \times X_i \to 2^{Z_i}$, 其中$Z_i$是一Hausdorff拓扑矢量空间, 最优判别准则是$C_i: X^i \to 2^{Z_i}$使得对每一个$i \in I$, $C_i(x^i)$是Z_i内的一闭凸尖锥具有$\mathrm{int}(C_i(x^i)) \neq \emptyset$和$C_i(x) \neq Z_i$. 一个广义约束多目标对策(GCMOG) $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)_{i \in I}$是有序四元组$(X_i, A_i, F_i, C_i)$的族. 称$\hat{x} = (\hat{x}^i, \hat{x}_i) \in X$是$\Gamma$的一弱Pareto平衡点, 如果对每一$i \in I$, 存在一点$\hat{z}_i \in F_i(\hat{x}^i, \hat{x}_i)$使得

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}^i),\quad z_i - \hat{z}_i \notin -\mathrm{int}\, C_i(x^i),\quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}^i, u_i),\quad u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

在一真实市场中, 由于消费者行为和市场状况的不确定性, 局中人的任何支付函数是不稳定的. 所以我们也考虑下面的广义模糊约束多目标对策.

除上述假设外, 我们还假设每一局中人$i \in I$有一模糊策略集Y_i, 一模糊约束对应$T_i: X^i \to 2^{Y_i}$和一支付函数$G_i: X^i \times Y_i \times X_i \to 2^{Z_i}$. 一个广义模糊约束多目标对策(GFCMOG) $\Gamma = (X_i, Y_i, A_i, T_i, G_i, C_i)_{i \in I}$是有序组$(X_i, Y_i, A_i, T_i, G_i, C_i)$的族. 称$(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$是GFCMOG的一弱Pareto平衡点, 如果对每一$i \in I$, 存在一点$\hat{z}_i \in G_i(\hat{x}^i, \hat{y}_i, \hat{x}_i)$使得

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}^i),\ \hat{y}_i \in T_i(\hat{x}^i),\ z_i - \hat{z}_i \notin -\mathrm{int}\, C_i(x^i),\ \forall z_i \in G_i(\hat{x}^i, \hat{y}_i, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

如果对每一$i \in I$和$x^i \in X^i$, 令$C_i(x^i) = C_i$, 其中C_i是Z_i内的一闭凸尖锥具有$\mathrm{int}(C_i) \neq \emptyset$和$C_i \neq Z_i$, 则我们的GCMOG和GFCMOG退化为由Lin和Cheng[18]及Ding[19]引入和研究的广义约束多目标对策. 如果对每一$i \in I$, 支付函数$F_i = f_i$是一单值映射, 则这里的GCMOG包含了由Yu[16], Lin和Yu[17]引入的约束多目标对策$\Gamma = (X_i, A_i, f_i)_{i \in I}$作为特殊情形.

本文在没有任何凸性结构的局部FC-一致空间内继续研究GCMOG和GFCMOG其中局中人数目可以是有限或无限的并且所有的支付函数可以是多值的和取值于无限维空间. 由使用作者[20]在局部FC-一致空间内得到的一个Himmelberg型不动点定理, 在局部FC-一致空间内对GCMOG和GFCMOG建立了几个弱Pareto平衡存在性定理. 这些定理改进, 统一和推广了最近文献中对多目标对策和约束多目标对策弱Pareto平衡的已知存在结果.

1　预备知识

对一集X, 我们将分别用2^X和$\langle X \rangle$表X的一切子集的族和一切非空有限子集的族. 令Δ_n是R^{n+1}中的具有顶点$e_0, e_1, \dots, e_n$的标准n-维单型. 对$\{0, 1, \dots, n\}$的任何非空子集J, 令$\Delta_J = \mathrm{co}(\{e_j : j \in J\})$.

定义 1.1　设Z是一实拓扑矢量空间, $C \subset Z$是一闭凸尖锥具有$\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, A是Z的一非空子集.

(i) 对$z_1, z_2 \in Z$, 我们表$z_1 \leqslant z_2$当且仅当$z_2 - z_1 \in C$, 和$z_1 < z_2$当且仅当$z_2 - z_1 \in \mathrm{int}(C)$;

(ii) 称$z \in A$是A的矢量极小点(或, 弱矢量极小点)如果对任何$z \in A$, $z - z \notin -C \setminus \{0\}$ (或, $z - z \notin -\mathrm{int}(C)$). 此外, 用$\min_C(A)$ (或, $_w\min_C(A)$)表A的矢量极小点集(或, 弱矢量极小点集).

引理 1.1[21]　设A是一实拓扑矢量空间Z的非空紧子集和$C \subset Z$是一闭凸锥具有$C \neq Z$, 则$\min_C(A) \neq \emptyset$.

由利用与 Lin 和 Yu 的文献[22] 定理 4 的证明中完全类似的论证方法, 我们能容易地证明下面结果. 我们省去它的证明.

引理 1.2 设 X 和 Y 是拓扑空间, Z 是一拓扑矢量空间, $C: X \to 2^Z$ 使得对每一 $x \in X$, $C(x)$ 是 Z 内的一闭凸尖锥具有 $\mathrm{int}(C(x)) \neq \emptyset$ 和 $C(x) \neq Z$. 设 $A: X \to 2^Y$ 和 $F: X \times Y \to 2^Z$ 是两个具有闭值的紧连续集值映射. 则由下式定义的映射 $M: X \to 2^Y$:

$$M(x) = \left\{ y \in A(x): F(x, y) \cap \mathrm{wmin}_{C(x)}(F(x, A(x))) \neq \emptyset \right\}$$

是一紧, 闭上半连续集值映射.

下面概念由 Ding[23] 引入.

定义 1.2 称 $(X, \{\varphi_N\})$ 是一有限连续拓扑空间(简称, FC-空间), 如果 X 是一拓扑空间使得对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$, 其中 N 内的某些元素可以相同, 存在一连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to X$. 称 $(X, \{\varphi_N\})$ 的一子集 D 是 X 的一 FC-子空间, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$ 和对任何 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subset D \cap N$, $\varphi_N(\Delta_k) \subset D$.

由 FC-子空间的定义, 容易看出 $(X, \{\varphi_N\})$ 的每一 FC-子空间也是一 FC-空间. 如果 $\{B_i\}_{i \in I}$ 是 $(X, \{\varphi_N\})$ 的一族 FC-子空间且 $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in I} B_i$ 也是 $(X, \{\varphi_N\})$ 的一 FC-子空间, 其中 I 可以是任何指标集.

定义 1.3 集 X 的一个一致结构是 $X \times X$ 的满足下面条件的一非空子集族 $\mathscr{U}$:

(i) $\mathscr{U}$ 的每一成员包含对角线 Δ;

(ii) 对每一 $U \in \mathscr{U}$, $U^{-1} = \{(y, x) \in X \times X: (x, y) \in U\} \in \mathscr{U}$;

(iii) 对每一 $U \in \mathscr{U}$, 存在 $V \in \mathscr{U}$ 使得 $V \circ V \subset U$;

(iv) 如果 $U \in \mathscr{U}$ 和 $U \subset V \subset X \times X$, 则有 $V \in \mathscr{U}$.

称 $\mathscr{U}$ 的每一成员是一个环境(entourage). 一个环境 V 被说成是对称的, 如果每当 $(y, x) \in V$ 有 $(x, y) \in V$. 称 $(X, \mathscr{U})$ 是一致空间, 如果 X 有由一致结构 $\mathscr{U}$ 导出的拓扑 τ. 该拓扑 τ 取集族 $\{V[x]: V \in \mathscr{U}, x \in X\}$ 作为一子基, 其中 $V[x] = \{y \in X: (x, y) \in V\}$. 称一致结构 $\mathscr{U}$ 是分离的, 如果 $\bigcap\{U \in X \times X: U \in \mathscr{U}\} = \Delta$. 一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 是 Hausdorff 当且仅当 $\mathscr{U}$ 是分离的. 对一致空间的详情, 我们参考 Kelly[24] 和 Köthe[25].

下面, 我们假设所有的一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 都是 Hausdorff.

定义 1.4 称 $(X, \mathscr{U}, \{\varphi_N\})$ 是局部 FC-一致空间, 如果 $(X, \mathscr{U})$ 是一致空间和 $(X, \{\varphi_N\})$ 是 FC-空间使得 $\mathscr{U}$ 有一个满足下面条件的环境基 $\mathscr{B}$: 对每一 $V \in \mathscr{B}$, 每当 $M \subset X$ 是 X 的一 FC-子空间时, 集 $\{x \in X: M \cap V[x] \neq \emptyset\}$ 也是 X 的一 FC-子空间.

我们观察到在定义 1.4 内定义的局部 FC-一致空间类包含了局部凸拓扑矢量空间, Horvath[26] 的 LC-空间, Tarafdar[27] 的局部 H-凸一致空间和 Park[28] 的局部 G-凸空间作为真子类. 我们强调局部 FC-一致空间类不同于由 Ding[19,29] 引入的局部 FC-空间.

称拓扑空间 X 的非空子集 M 在 X 内是紧闭(或, 紧开) 的, 如果对 X 的每一紧子集 K, $M \cap K$ 在 K 内是闭(或, 开) 的. 显然, X 的每一闭(或, 开) 子集在 X 内是紧闭(或, 紧开) 的.

定义 1.5 设 $(X, \{\varphi_N\})$ 是一 FC-空间. 称 $G: X \to 2^X$ 是一 KKM 型映射, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$ 和对每一 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subset N$, $\varphi_N(\Delta_k) \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}: j = 0, \cdots, k\})$.

下面结果是 Ding 等的文献[30] 具有 $Y = X$ 的定理 2.2.

引理 1.3　设 $(X,\{\varphi_N\})$ 是一 FC- 空间．如果 $G:X\to 2^X$ 是一具有紧开值的 KKM 型映射, 则对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,

$$\varphi_N(\Delta_n)\cap(\cap_{i=0}^n G(x_i))\neq\emptyset.$$

下面的 Himmelberg 型不动点定理是 Ding 的文献[20]定理 2.1．为完备起见, 我们给出它的证明.

定理 1.1　设 $(X,\mathscr{U},\{\varphi_N\})$ 是一局部FC- 一致空间, $F:X\to 2^X$ 是一紧上半连续集值映射具有非空闭值使得对每一 $x\in X$, $F(x)$ 是 X 的一FC- 子空间．则 F 有一不动点 $x_0\in X$, 即 $x_0\in F(x_0)$．

证明　我们能假设 $\mathscr{U}$ 有一由对称闭环境组成的基 $\mathscr{B}$, 见文献[25]．因为 $\mathscr{U}$ 的所有开成员也组成 $\mathscr{U}$ 的基, 对每一 $V\in\mathscr{B}$, 存在 $\mathscr{U}$ 的一开成员 W 使得 $W\subset V$．注意到对每一 $x\in X$, $W[x]$ 是 x 的一开邻域．因为 $K=\overline{F(X)}$ 是紧的, 存在 $N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle X\rangle$ 使得 $K=\overline{F(X)}\subset\cup_{i=0}^n W[y_i]\subset\cup_{i=0}^n V[y_i]$．对每一 $y\in X$, 令 $G(y)=\{x\in X:F(x)\cap V[y]=\emptyset\}=\{x\in X:F(x)\subset X\setminus V[y]\}$．因为 F 是上半连续的和 $X\setminus V[y]$ 在 X 内是开的, 每一 $G(y)$ 是开的且因此它在 X 内是紧开的．因为 $F(X)\subset K\subset\cup_{i=0}^n V[y_i]$, 我们有

$$\bigcap_{i=0}^n G(y_i)\subset\left\{x\in X:F(x)\cap\left(\bigcup_{i=0}^n V[y_i]\right)=\emptyset\right\}=\emptyset.$$

因此引理 1.3 的结论不成立．由引理 1.3, $G:X\to 2^X$ 不是一 KKM 型映射, 故存在 $N=\{z_0,\cdots,z_n\}\in\langle X\rangle$ 和 $\{z_{i_0},\cdots,z_{i_k}\}\subset N$ 使得

$$\varphi_N(\Delta_k)\subset\bigcup_{j=0}^k G(z_{i_j}).$$

因此存在 $x_V\in\varphi_N(\Delta_k)$ 使得 $x_V\notin G(z_{i_j})$ 对一切 $j=0,\cdots,k$ 成立．所以我们有 $F(x_V)\cap V[z_{i_j}]\neq\emptyset$ 对一切 $j=0,\cdots,k$ 成立, 和

$$\{z_{i_j}:j=0,\cdots,k\}\subset\{z\in X:F(x_V)\cap V[z]\neq\emptyset\}.$$

因为 $F(x_V)$ 是局部FC- 一致空间 $(X,\mathscr{U},\{\varphi_N\})$ 的 FC- 子空间, 集 $\{z\in X:F(x_V)\cap V[z]\neq\emptyset\}$ 也是 $(X,\mathscr{U},\{\varphi_N\})$ 的 FC- 子空间．由此推得 $x_V\in\varphi_N(\Delta_k)\subset\{z\in X:F(x_V)\cap V[z]\neq\emptyset\}$ 且因此 $F(x_V)\cap V[x_V]\neq\emptyset$．所以对每一 $V\in\mathscr{B}$, 存在 $(x_V,y_V)\in X\times X$ 使得 $y_V\in F(x_V)$ 和 $y_V\in V[x_V]$．因为 $K=\overline{F(X)}$ 是紧的, 我们能假设 $y_V\to x_0\in K$ 且因此 $x_V\to x_0$．因为 F 是上半连续的具有闭值, F 的图在 $X\times\overline{F(X)}$ 内是闭的．我们得到 $x_0\in F(x_0)$．证毕.

注 1.1　定理 1.1 推广了 Park 的文献[28]定理 2 从局部 G- 凸空间到没有任何凸性结构的局部 FC- 一致空间.

下面结果是 Ding 的文献[23]引理 1.1.

引理 1.4　设 I 是任何指标集．对每一 $i\in I$, 设 $(X_i,\{\varphi_{N_i}\})$ 是一 FC- 空间．设 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 和对任何 $N\in\langle X\rangle$, $\varphi_N=\prod_{i\in I}\varphi_{N_i}$ 其中 $N_i=\pi_i(N)$ 是 N 在 X_i 上的投影．则 $(X,\{\varphi_N\})$ 也是一FC- 空间.

下面结果是 Ding 的文献[31]系 2.1 的一个特殊情形.

引理 1.5　设 X 是一紧拓扑空间和 (Y,φ_N) 是一FC- 空间．设 $F:X\to 2^Y$ 是满足下列条件的集值映射:

(i) 对每一 $x \in X$, $F(x)$ 是 Y 的一 FC-子空间;

(ii) $X = \bigcup_{y \in Y} \operatorname{int} F^{-1}(y)$.

则存在 F 的一连续选择 $f: X \to Y$ 使得 $f = \varphi \circ \psi$, 其中 $\varphi: \Delta_n \to Y$ 和 $\psi: X \to \Delta_n$ 都是连续的和 n 是某正整数.

下面结果是 Ding 的文献[20]定理 3.1. 为完毕起见, 我们将给出它的证明.

引理 1.6 设 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 令 $(X_i, \mathscr{U}_i, \{\varphi_{N_i}\})$ 是一局部 FC-一致空间, 其中 $(X_i, \mathscr{U}_i)$ 有由对称环境组成的基 $\mathscr{B}_i$. 设 $X = \prod_{i \in I} X_i$, $\mathscr{U} = \prod_{i \in I} \mathscr{U}_i$ 和对任何 $N \in \langle X \rangle$, $\varphi_N = \prod_{i \in I} \varphi_{N_i}$, 则 $(X, \mathscr{U}, \{\varphi_N\})$ 也是一局部 FC-一致空间.

证明 由引理 1.4, $(X, \{\varphi_N\})$ 是一 FC-空间. 对每一 $i \in I$ 和 $V_i \in \mathscr{B}_i$, 令 $\mathscr{S}$ 是形如 $\{(x, y) \in X \times X: (x_i, y_i) \in V_i\}$ 的集族. 容易检验 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一子基. 令 $\mathscr{B}$ 是由子基 $\mathscr{S}$ 生成的基, 既是

$$\mathscr{B} = \left\{V = \bigcap_{i=1}^{n} V^i: V^i \in \mathscr{S}; i = 1, \cdots, n; n \in \mathbf{N}\right\}.$$

则族 $\mathscr{B}$ 是由乘积一致结构 $\mathscr{U}$ 的对称环境组成的和 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 上的乘积拓扑相联系的一个基. 因为每一 $V^j \in \mathscr{S}$ 有形式 $V^j = \{(x, y) \in X \times X: (x_{i_j}, y_{i_j}) \in V_{i_j}\}$, 其中 $i_j \in I$ 和 $V_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}$, 我们有对 X 的每一 FC-子空间 M,

$$\begin{cases} V^j[M] = \prod_{i \in I \setminus \{i_j\}} X_i \times V_{i_j}[\pi_{i_j}(M)], \\ V[M] = \prod_{i \in I \setminus \{i_j: j = 1, \cdots, n\}} X_i \times \prod_{j=1}^{n} V_{i_j}[\pi_{i_j}(M)]. \end{cases} \tag{1}$$

我们主张对每一 $i \in I$ 和 $V_i \in \mathscr{B}_i$, $V_i[\pi_i(M)]$ 是 X_i 的一 FC-子空间. 对每一 $i \in I$, $N_i = \{x_{i,0}, \cdots, x_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, 和 $\{x_{i,i_0}, \cdots, x_{i,i_k}\} \subset N_i \cap \pi_i(M)$, 任取 $x_{i,j} \in \pi_i^{-1}(x_{i,j}) \cap M$, $j = 0, \cdots, n$, 则我们有 $N = \{x_{i,0}, \cdots, x_{i,n}\} \in \langle X \rangle$ 和 $\{x_{i,i_0}, \cdots, x_{i,i_k}\} \subset N \cap M$. 因为 M 是 X 的 FC-子空间, 我们有

$$\varphi_N(\Delta_k) = \prod_{i \in I} \varphi_{N_i}(\Delta_k) \subset M.$$

由此推得对每一 $i \in I$, $\varphi_{N_i}(\Delta_k) \subset \pi_i(M)$. 这就证明了对 X 每一 FC-子空间 M 和每一 $i \in I$, $\pi_i(M)$ 是 X_i 的一 FC-子空间. 因为对每一 $i \in I$ 和 $V_i \in \mathscr{B}_i$,

$$V_i[\pi_i(M)] = \bigcup_{x_i \in \pi_i(M)} V_i[x_i] = \{x_i \in X_i: \pi_i(M) \cap V_i[x_i] \neq \emptyset\},$$

所以 $V_i[\pi_i(M)]$ 也是 X_i 的一 FC-子空间. 从(1)式和引理 1.4 推得 $V[M] = \{x \in X: M \cap V[x] \neq \emptyset\}$ 是 X 的一 FC-子空间. 所以 $(X, \mathscr{U}, \{\varphi_N\})$ 是一局部 FC-一致空间.

注 1.2 引理 1.6 是不同于 Ding 的文献[29]引理 2.2 的结果.

2 弱 Pareto 平衡的存在性

在本节中, 我们将在没有任何凸性结构的局部 FC-一致空间内对 GCMOG 和 GFCMOG 证明弱 Pareto 平衡点的某些新的存在性定理.

定理 2.1 设 I 是局中人的任何集和 $\Gamma = (X_i, A_i, F_i, C_i)_{i \in I}$ 是一 GCMOG, 其中对每一 i

$\in I$, $(X_i, \mathscr{U}_i, \{\varphi_{N_i}\})$ 是一局部FC-一致空间, $A_i: X^i \to 2^{X_i}$ 和 $F_i: X^i \times X_i \to 2^{Z_i}$ 都是连续紧映射具有非空闭值, 使得对每一 $x^i \in X^i$, $M_i(x^i)$ 是 X_i 的一FC-子空间, 其中映射 $M_i: X^i \to 2^{X_i}$ 由下式定义:

$$M_i(x^i) = \left\{y_i \in A_i(x^i): F_i(x^i, y_i) \cap \mathrm{wmin}_{C_i(x^i)} F_i(x^i, A_i(x^i)) \neq \emptyset\right\}, \qquad \forall x^i \in X^i.$$

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}^i, \hat{x}_i) \in X$ 使得对每一 $i \in I$, 存在 $\hat{z}_i \in F_i(\hat{x}^i, \hat{x}_i)$ 满足

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}^i), \quad z_i - \hat{z}_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i), \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}^i, u_i), \quad u_i \in A_i(\hat{x}^i),$$

即 $\hat{x}$ 是 Γ 的一弱Pareto平衡点. 特别, 如果对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, $F_i(x^i, x_i) \subset C_i(x^i)$, 则我们有对每一 $i \in I$,

$$z_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i), \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}^i, u_i), \quad u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

证明　由引理1.6, $(X, \mathscr{U}, \{\varphi_N\})$ 和 $(X^i, \mathscr{U}^i, \{\varphi_{N^i}\})$ 都是局部FC-一致空间其中 $X^i = \prod_{j \in I, j \neq i} X_j$, $\mathscr{U}^i = \prod_{j \in I, j \neq i} \mathscr{U}_j$ 和 $\varphi_{N^i} = \prod_{j \in I, j \neq i} \varphi_{N_j}$. 因为对每一 $i \in I$, A_i 是连续紧映射具有非空闭值, 对每一 $x^i \in X^i$, $A_i(x^i)$ 是 X_i 的一紧子集. 因为对每一给定的 $x^i \in X^i$, 映射 $y_i \mapsto F_i(x^i, y_i)$ 是连续的具有紧值和 $A_i(x^i)$ 是紧的, 由 Aubin 和 Ekeland 的文献[32]的命题3.1.11, $F_i(x^i, A_i(x^i))$ 是 Z_i 的紧子集. 从引理1.1推得 $\emptyset \neq \min_{C_i(x^i)} F(x^i, A_i(x^i)) \subset \mathrm{wmin}_{C_i(x^i)} F_i(x^i, A_i(x^i))$. 所以 $M(x^i) \neq \emptyset$. 由引理1.2, M_i 是上半连续紧映射具有非空紧值. 由假设, 对每一 $x^i \in X^i$, $M_i(x^i)$ 是 X_i 的FC-子空间. 定义一集值映射 $M: X \to 2^X$ 如下:

$$M(x) = \prod_{i \in I} M_i(x^i), \quad \forall x \in X.$$

从Fan的文献[33]引理3推得 $M: X \to 2^X$ 也是上半连续紧映射具有非空闭值. 从引理1.4推得对每一 $x \in X$, $M(x)$ 也是 X 的FC-子空间. 由定理1.1, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in M(\hat{x})$, 既是, 对每一 $i \in I$, $\hat{x}_i \in M_i(\hat{x}^i)$. 换句话说, 对每一 $i \in I$,

$$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x}^i), \quad F_i(\hat{x}^i, \hat{x}_i) \cap \mathrm{wmin}_{C_i(\hat{x}^i)} F_i(\hat{x}^i, A_i(\hat{x}^i)) \neq \emptyset.$$

这就蕴含对每一 $i \in I$, 存在 $\hat{z}_i \in F_i(\hat{x}^i, \hat{x}_i)$ 使得

$$z_i - \hat{z}_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i), \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}^i, u_i), \quad u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

特别, 如果对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, $F_i(x^i, x_i) \subset C_i(x^i)$, 我们有 $\hat{z}_i \in F_i(\hat{x}^i, \hat{x}_i) \subset C_i(\hat{x}^i)$. 由此推得对每一 $i \in I$,

$$z_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i), \quad \forall z_i \in F_i(\hat{x}^i, u_i), \quad u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

证毕.

注2.1　定理2.1是Ding的文献[19]定理3.1和定理3.2在局部FC-一致空间内的改进变形. 定理2.1从下列方面推广了Lin和Cheng的文献[18]定理3.1: 1) 局中人集可以是无限的; 2) 从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到没有任何凸性结构的非紧局部FC-一致空间; 3) 从零调集值映射类到取值为FC-子空间的集值映射类. 如果 I 是单点集, 则定理2.1也在几方面推广了Lin和Yu的文献[22]定理5. 如果在定理2.1中, 所有的支付函数 $F_i = \{f_i\}$ 都是单值的, 我们能得到下面结果.

系2.1　设 I 是局中人的任何集和 $\{Z_i\}_{i \in I}$ 是一族Hausdorff拓扑矢量空间. 对每一 $i \in I$, 令 $C_i: X^i \to 2^{Z_i}$ 使得对每一 $x^i \in X^i$, $C_i(x^i)$ 是一闭凸尖锥具有 $\operatorname{int}(C_i(x^i)) \neq \emptyset$ 和 $C_i(x^i) \neq Z_i$. 设 $\Gamma = (X_i, A_i, f_i)_{i \in I}$ 是一广义约束多目标对策, 其中 $(X_i, \mathscr{U}_i, \{\varphi_{N_i}\})$ 是一局部FC-一致

空间．假设对每一局中人 $i\in I$, $A_i: X^i\to 2^{X_i}$ 和 $f_i: X^i\times X_i\to Z_i$ 都是连续紧映射具有非空闭值使得对每一 $x^i\in X^i$, $M_i(x^i)$ 是 X_i 的一FC-子空间, 其中映射 $M_i: X^i\to 2^{X_i}$ 由下式定义:

$$M_i(x^i)=\left\{y_i\in A_i(x^i): f_i(x^i,y_i)\in \mathrm{wmin}_{C_i} f_i(x^i,A_i(x^i))\right\},\quad \forall x^i\in X^i.$$

则存在 $\hat{x}=(\hat{x}^i,\hat{x}_i)\in X$ 使得对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}^i),\ f_i(\hat{x}^i,u_i)-f_i(\hat{x}^i,\hat{x}_i)\notin -\mathrm{int}(C_i(\hat{x}^i)),\quad \forall u_i\in A_i(\hat{x}^i),$$

即 $\hat{x}$ 是 Γ 的一弱 Pareto 平衡点.

注 2.2　系 2.1 是 Ding 的文献[19] 系 3.1 和系 3.2 在局部 FC-一致空间内的改进变形．系 2.1 改进和推广了 Yu 的文献[16] 定理 2.1 及 Lin 和 Yu 的文献[17] 系 2 和系 4, 从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到非紧局部 FC-一致空间. 并且我们的模型比在文献[16-17] 中的模型更为一般, 我们的论证方法与文献[16-17] 中的论证方法是不同的.

定理 2.2　设 I 是局中人的任何集和 $\Gamma=(X_i, Y_i, A_i, T_i, G_i, C_i)_{i\in I}$ 是 GFCMOG 其中对每一 $i\in I$, $(X_i,\mathscr{U}_i,\{\varphi_{N_i}\})$ 是一紧局部 FC-一致空间, $(Y_i,\{\varphi'_{N_i}\})$ 是一 FC-空间, $A_i: X^i\to 2^{X_i}$ 和 $G_i: X^i\times Y_i\times X_i\to 2^{Z_i}$ 都是紧连续映射具有非空闭值．对每一 $i\in I$, $T_i: X^i\to 2^{Y_i}$ 满足: $X^i=\bigcup_{y_i\in Y_i}T_i^{-1}(y_i)$ 和对每一 $x^i\in X_i$, $T_i(x^i)$ 是 Y_i 的一 FC-子空间．对每一 $x^i\in X^i$, $M_i(x^i,y_i)$ 是 X_i 的一 FC-子空间其中映射 $M_i: X^i\times Y_i\to 2^{X_i}$ 由下式定义:

$$M_i(x^i,y_i)=\left\{u_i\in A_i(x^i): G_i(x^i,y_i,u_i)\cap \mathrm{wmin}_{C_i(x^i)} G_i(x^i,y_i,A_i(x^i))\neq\emptyset\right\},\qquad \forall x^i\in X^i.$$

则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得对每一 $i\in I$, 存在 $\hat{z}_i\in G_i(\hat{x}^i,\hat{y}_i,\hat{x}_i)$ 满足

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}^i),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x}^i),\ z_i-\hat{z}_i\notin -\mathrm{int}\,C_i(\hat{x}^i),\ \forall z_i\in G_i(\hat{x}^i,\hat{y}_i,u_i),\ u_i\in A_i(\hat{x}^i).$$

即 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 GFCMOG Γ 的一弱 Pareto 平衡点．特别, 如果对每一 $i\in I$ 和 $(x,y_i)\in X\times Y_i$, $G_i(x^i,y_i,x_i)\subset C_i(x^i)$, 则我们有对每一 $i\in I$,

$$z_i\notin -\mathrm{int}\,C_i(\hat{x}^i),\quad \forall z_i\in G_i(\hat{x}^i,\hat{y}_i,u_i),\ u_i\in A_i(\hat{x}^i).$$

证明　由引理 1.5, 对每一 $i\in I$, T_i 有一连续选择 $g_i: X^i\to Y_i$．对每一个 $i\in I$, 定义两个集值映射 $F_i: X^i\times X_i\to 2^{Z_i}$ 和 $H_i: X^i\to 2^{X_i}$ 如下:

$$F_i(x^i,u_i)=G_i(x^i,g_i(x^i),u_i),\qquad \forall (x^i,u_i)\in X^i\times X_i,$$

$$H_i(x^i)=M_i(x^i,g_i(x^i)),\qquad \forall x^i\in X^i.$$

则我们有

$$\begin{aligned}H_i(x^i)&=\\&\left\{u_i\in A_i(x^i): G_i(x^i,g_i(x^i),u_i)\cap \mathrm{wmin}_{C_i(x^i)} G_i(x^i,g_i(x^i),A_i(x^i))\neq\emptyset\right\}=\\&\left\{u_i\in A_i(x^i): F_i(x^i,u_i)\cap \mathrm{wmin}_{C_i(x^i)} F_i(x^i,A_i(x^i))\neq\emptyset\right\}.\end{aligned}$$

由假设, 对每一 $i\in I$, $H_i(x^i)$ 是 X_i 的一 FC-子空间．对每一 $i\in I$, 因为 G_i 是一连续映射具有紧值, F_i 也是一连续映射具有紧值．注意到每一 X_i 是紧的, 定理 2.1 的所有条件被满足．由定理 2.1, 存在 $\hat{x}\in X$ 使得对每一 $i\in I$, 存在 $\hat{z}_i\in F_i(\hat{x}^i,\hat{x}_i)$ 满足

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}^i),\ z_i-\hat{z}_i\notin -\mathrm{int}\,C_i(\hat{x}^i),\quad \forall z_i\in F_i(\hat{x}^i,u_i),\ u_i\in A_i(\hat{x}^i).$$

对每一 $i\in I$, 令 $\hat{y}_i=g_i(\hat{x}^i)$, 则我们得到对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}^i)$, $\hat{y}_i=g_i(\hat{x}^i)\in T_i(\hat{x}^i)$ 和 $\hat{z}_i\in G_i(\hat{x}^i,\hat{y}_i,\hat{x}_i)$ 使得

$$z_i - \hat{z}_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i),\quad \forall z_i \in G_i(\hat{x}^i, \hat{y}_i, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

所以 $(\hat{x}, \hat{y})$ 是 GFCMOG 的一弱 Pareto 平衡点. 特别,如果对每一 $i \in I$ 和 $(x, y_i) \in X \times Y_i$, $G_i(x^i, y_i, x_i) \subset C_i(x^i)$, 则我们有 $\hat{z}_i \in G_i(\hat{x}^i, \hat{y}_i, \hat{x}_i) \subset C_i(\hat{x}^i)$. 由此推得对每一 $i \in I$,

$$z_i \notin -\operatorname{int} C_i(\hat{x}^i),\quad \forall z_i \in G_i(\hat{x}^i, \hat{y}_i, u_i),\ u_i \in A_i(\hat{x}^i).$$

注 2.3　定理 2.2 在下列方面推广了 Lin 和 Cheng 的文献[18] 定理 3.2: 1) 局中人集可以是无限的; 2) 从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到没有任何凸性结构的紧局部 FC-一致空间; 3) 从零调集值映射类到取值为 FC-子空间的集值映射类. 如果 I 是单点集, 则定理 2.2 也在几方面推广了 Lin 和 Yu 的文献[22] 定理 6.

[参 考 文 献]

[1] Szidarovszky F, Gershon M E, Duckstein L. Techniques for Multiobjective Decision Marking in System Management[M]. Amsterdam, Holland: Elsevier, 1986.

[2] Zeleny M. Game with multiple payoffs[J]. International J Game Theory, 1976, **4**(1): 179-191.

[3] Bergstresser K, Yu P L. Domination structures and multicriteria problem in N-person games[J]. Theory and Decision, 1977, **8**(1): 5-47.

[4] Borm P E M, Tijs S H, Van Den Aarssen J C M. Pareto equilibrium in multiobjective games[J]. Methods of Operations Research, 1990, **60**(1): 303-312.

[5] Yu P L. Second-order game problems: Decision dynamics in gaming phenomena[J]. J Optim Theory Appl, 1979, **27**(1): 147-166.

[6] Chose D, Prasad U R. Solution concepts in two-person multicriteria games[J]. J Optim Theory Appl, 1989, **63**(1): 167-189.

[7] Wang S Y. An existence theorem of a Parteo equilibrium[J]. Appl Math Lett, 1991, **4**(1): 61-63.

[8] Wang S Y. Existence of a Parteo equilibrium[J]. J Optim Theory Appl, 1993, **79**(2): 373-384.

[9] Wang S Y, Li Z. Pareto equilibria in multicriteria metagames[J]. Top, 1995, **3**(2): 247-263.

[10] DING Xie-ping. Parteo equilibria of multicriteria games without compactness, continuity and concavity[J]. Appl Math Mech, 1996, **17**(9): 847-854.

[11] Yuan X Z, Tarafdar E. Non-compact Pareto equilibria for multiobjective games[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(1): 156-163.

[12] Yu J, Yuan X Z. The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods[J]. Comput Math Appl, 1998, **35**(9): 17-24.

[13] DING Xie-ping. Constrained multiobjective games in general topological spaces[J]. Comput Math Appl, 2000, **39**(3/4): 23-30.

[14] DING Xie-ping. Existence of Pareto equilibria for constrained multiobjective games in H-spaces[J]. Comput Math Appl, 2000, **39**(9): 125-134.

[15] DIGN Xie-ping, Park J Y, Jung I H. Pareto equilibria for constrained multiobjective games in locally L-convex spaces[J]. Comput Math Appl, 2003, **46**(10/11): 1589-1599.

[16] Yu H. Weak Pareto equilibria for multiobjective constrained games[J]. Appl Math Lett, 2003, **16**(5): 773-776.

[17] Lin Z, Yu J. The existence of solutions for the system of generalized vector quasi-equilibrium problems[J]. Appl Math Lett, 2005, **18**(4): 415-422.

[18] Lin L J, Cheng S F. Nash-type equilibrium theorems and competitive Nash-type equilibrium theorems [J]. Comput Math Appl, 2002, **44**(10/11): 1369-1378.

[19] DING Xie-ping. Weak Pareto equilibria for generalized constrained multiobjective games in locally FC-spaces[J]. Nonlinear Anal, 2006, **65**(3): 538-545.

[20] DING Xie-ping. Collectively fixed point theorem in product locally FC-uniform spaces and applications[J]. Nonlinear Anal, 2007, **66**(11): 2604-2617.

[21] Luc D T. Theory of Vector Optimization[M]. Vol. **319**. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[22] Lin L J, Yu Z T. On some equilibrium problems for multimaps[J]. J Comput Appl Math, 2001, **129**(1/2): 171-183.

[23] DING Xie-ping. Maximal element theorems in product FC-spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29-42.

[24] Kelly J L. General Topology[M]. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1955.

[25] Köthe G. Topological Vector Spaces Ⅰ[M]. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1983, 30.

[26] Horvath C. Contractibility and general convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341-357.

[27] Tarafdar E. Fixed point theorems in locally H-convex uniform spaces[J]. Nonlinear Anal, 1997, **29**(9): 971-978.

[28] Park S. Fixed point theorems in locally G-convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2002, **48**(6): 869-879.

[29] DING Xie-ping. System of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-spaces[J]. Acta Math Sinica, 2006, **22**(5): 1528-1538.

[30] DING Xie-ping, Liou Y C, Yao J C. Generalized R-KKM type theorems in topological spaces with applications[J]. Appl Math Lett, 2005, **18**(12): 1345-1350.

[31] DING Xie-ping. Continuous selection, collectively fixed points and system of coincidence theorems in product topological spaces[J]. Acta Math Sinica, 2006, **22**(6): 1629-1638.

[32] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

[33] Fan Ky. Fixed points and minimax theorems in locally convex spaces[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1952, **38**(1): 121-126.

Generalized Constrained Multiobjective Games in Locally FC-Uniform Spaces

DING Xie-ping[1], Lee Chin-san[2,3], YAO Jen-chih[2]

(1. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China;

2. Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung 82424, Taiwan, China;

3. Department of Leisure, Recreation and Tourism Management, Shu-Te University, Kaohsiung 82445, Taiwan, China)

Abstract: A new class of generalized constrained multiobjective games is introduced and studied in locally FC-uniform spaces without convexity structure where the number of players may be finite or infinite and all payoff functions get their values in an infinite-dimensional space. By using a Himmelberg type fixed point theorem in locally FC-uniform spaces, some existence theorems of weak Pareto equilibria for the generalized constrained multiobjective games are established in locally FC-uniform spaces, which improve, unify and generalize the corresponding results in recent literatures.

Key words: locally FC-uniform space; fixed point; generalized constrained multiobjective game; weak Pareto equilibrium