文章编号: 1000-0887(2008) 02-0247-06

关于多胞形一个新仿射不变量的应用*

杨 柳, 何斌吾

(上海大学 数学系, 上海 200444)

(郭兴明推荐)

摘要: 用组合极值方法导出了 n 维欧氏空间中关于原点对称的一个凸多胞形子类上一个新的仿射不变量(最近由 Lutwak, Yang 和 Zhang 引入) 的解析表达式, 并给出了其在凸多胞形 Minkowski 问题的一个应用.

关 键 词: 凸子胞形; 仿射不变量; Minkowski 问题; 体积

中图分类号: O186.5 文献标识码: A

引 言

为了研究 Schneider 投射问题, Lutwak, Yang 和 Zhang 最近在文献[1] 中, 对凸多胞形引入了一个与体积函数 V 有紧密联系的新仿射泛函 $U(P)$, 如下:

定义 1 若 P 是 $R^n(n \geqslant 2)$ 中一个内部包含原点的凸多胞形, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 为 P 各面的单位外法向量, 且 $h_1, \cdots, h_N$ 为原点到这些对应面的距离, $a_1, \cdots, a_N$ 为各对应面相应的面积, 则 $U(P)$ 由下式定义:

$$U(P)^n = \frac{1}{n^n} \sum_{\boldsymbol{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_{i_n} \neq \boldsymbol{0}} h_{i_1} \cdots h_{i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n}. \tag{1}$$

显然, 泛函 U 是中心仿射不变量, 即

$$U(\phi P) = U(P), \qquad \text{对所有的 } \phi \in \mathrm{SL}(n).$$

由 $V(P) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} a_i h_i$ 不难推得

$$U(P) < V(P).$$

此外, 我们注意到只有 P 高度对称且有较少的面时, $U(P)$ 才会比 $V(P)$ 小很多. 对于一个有许多面的随机多胞形, $U(P)$ 和 $V(P)$ 十分接近.

基于以上的定义, Lutwak, Yang 和 Zhang 在文献[1] 中提出了下面的猜想:

猜想 1 若 P 是 R^n 中一个关于原点对称的凸多边形, 则是否有

$$U(P) \geqslant \frac{(n!)^{1/n}}{n} V(P)?$$

* 收稿日期: 2007-03-12; 修订日期: 2007-11-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671119)

作者简介: 杨柳(1963—), 女, 湖南桃源人, 讲师, 博士生;

何斌吾(联系人. Tel: +86-21-66132511; E-mail: hebinwu@shu.edu.cn).

这里等号成立当且仅当 P 是一个超平行体.

我们得到了定义在 R^n 中关于原点对称的凸多胞形一个特殊子类上的仿射不变量 $U(P)$ 的解析表达式, 并给出了 $U(P)$ 在 L_p-Minkowski 问题的一个应用.

1 关于 $\mathscr{H}_n$ 多胞形 $U(P)$ 的解析表达式

现在我们引入 $\mathscr{H}_n$ 多胞形的定义.

定义 1.1 令 P 为 $R^n(n\geqslant 2)$ 中的凸多胞形, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N\}$ 为 P 各面对应的 N 个单位外法向量. 一个凸多胞形被称为 $\mathscr{H}_n$ 型多胞形, 是指对任意的 $\{\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_n}\}\subset\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N\}$, 若对所有的 $i_s\neq i_t$, $\boldsymbol{u}_{i_s}\wedge\boldsymbol{u}_{i_t}\neq\mathbf{0}$, 则有 $\boldsymbol{u}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{i_n}\neq\mathbf{0}$.

显然, R^2 中任意多边形都是 $\mathscr{H}_2$ 多胞形, 所有 R^n 中的 n-维超平行体也都是 $\mathscr{H}_n$ 型多胞形.

对于 R^n 中关于原点对称的 $\mathscr{H}_n$ 多胞形 P, 令 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{2m}$ 为 P 各面对应的单位外法向量, $h_1, \cdots, h_{2m}$ 为原点到各面相应的距离, 且 $a_1, \cdots, a_{2m}$ 为各面相应的面积. 简便起见, 记 $V=V(P)$, $V_i = a_ih_i/n$,

$$f_n(P)=\left(\frac{U(P)}{V(P)}\right)^n,$$

且

$$x_i=\frac{V_i}{V},\qquad i=1, \cdots, 2m,$$

则

$$x_i=x_{m+i},\quad \sum_{i=1}^{2m}x_i=1.$$

此外, 令

$$f_0(P)=f_1(P)=1,\ f_2(P)=1-2\sum_{i=1}^{2m}x_i^2,$$

我们有:

假设 P 是 R^n 中关于原点对称的一个 $\mathscr{H}_n$ 多胞形, 并且记

$$f_n(P)=\left(\frac{U(P)}{V(P)}\right)^n,$$

则

$$\begin{aligned}
f_n(P) = f_{n-1}(P) &+ \\
&(-2)^1(n-1)\sum_{i=1}^{2m}x_i^2f_{n-2}(P)+\\
&(-2)^2(n-1)(n-2)\sum_{i=1}^{2m}x_i^3f_{n-3}(P)+\\
&(-2)^3(n-1)(n-2)(n-3)\sum_{i=1}^{2m}x_i^4f_{n-4}(P)+\\
&\cdots\cdots\\
&(-2)^{n-3}(n-1)(n-2)\cdots 3\sum_{i=1}^{2m}x_i^{n-2}f_2(P)+\\
&(-2)^{n-2}(n-1)(n-2)\cdots 2\sum_{i=1}^{2m}x_i^{n-1}f_1(P)+
\end{aligned}$$

$$(-2)^{n-1}(n-1)(n-2)\cdots 1\sum_{i=1}^{2m} x_i^n f_0(P).$$

这是$f_n(P)$ 的一个 n 阶递推公式.

下面我们对 R^n 中关于原点对称的 $\mathscr{H}_n$ 多胞形的情形, 给出猜想 1 的证明.

首先我们给出下面的引理:

引理 1.1 设 P 为R^n 中一个超平行体, $F_i(i=1,\cdots,2n)$ 表示 P 的$(n-1)$– 维面, x_0为 P 的对称中心. 若 $P_i(i=1,\cdots,2n)$ 是下面形式的棱锥, 称为 P 的中心棱锥,

$$P_i=\operatorname{conv}(F_i\cup\{x_0\}),$$

则所有 P_i 有相同的体积$(1/2n)V(P)$, 这里 $\operatorname{conv}(A)$ 表示集合 $A\subset R^n$ 的凸包.

引理 1.2 设 $P\subset R^n$ 为一个关于原点对称的多胞形.

(i) 若 F 是P 的面, 则

$$V(\operatorname{conv}(F\cup\{\mathbf{0}\}))\leqslant\frac{1}{2n}V(P).\tag{2}$$

(ii) 对任意给定的 P 的面F, 在式(2) 中等号成立当且仅当 P 是一个质心在原点的超平行体, 这里 $\operatorname{conv}(A)$ 表示集合 $A\subset R^n$ 的凸包.

证明 (i) 对任意给定的 P 的面F, 存在 $\boldsymbol{v}\in S^{n-1}$ 及 $t>0$, 使得

$$F\subset H_{\boldsymbol{v},t},$$

这里 $H_{\boldsymbol{v},t}=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}=t\}$. 记 $\varphi(s)=\operatorname{vol}_{n-1}(P\cap H_{\boldsymbol{v},s})$. 由 Brunn-Minkowski 不等式 $\varphi^{1/(n-1)}$ 在它的支集上是凹的偶函数, 因此 φ沿着任何始自原点的射线都是递减的, 且对任意的 $s\in[-t,t]$,

$$\operatorname{vol}_{n-1}(P\cap H_{\boldsymbol{v},s})\geqslant\operatorname{vol}_{n-1}(P\cap H_{\boldsymbol{v},t})=\operatorname{vol}_{n-1}(F).$$

因此,

$$\operatorname{vol}(P)=\int_{-t}^{t}\operatorname{vol}_{n-1}(P\cap H_{\boldsymbol{v},s})\,\mathrm{d}s\geqslant 2t\operatorname{vol}_{n-1}(F),$$

而 $\operatorname{vol}(\operatorname{conv}(F\cup\{\mathbf{0}\}))=(t/n)\operatorname{vol}_{n-1}(F)$.

(ii) 当 P 是超平行体时, 由引理 1.1, 结论显然成立.

不等式(2) 中的等号成立意味着 P 恰好有$2n$ 个面, 并且 $\pm\boldsymbol{u}_1,\cdots,\pm\boldsymbol{u}_n$ 为这些面上的单位法向量, 这说明 P 是一个原点对称的超平行体. □

定理 1.1 设 $P\subset R^n$ 为一个关于原点对称的 $\mathscr{H}_n$ 多胞形, 则

$$U(P)\geqslant\frac{(n!)^{1/n}}{n}V(P),\tag{3}$$

等号成立当且仅当 P 是一个超平行体.

证明 不失一般性, 可以把体积标准化使得 $\operatorname{vol}(P)=1$, 令$2m$ 为P 的面的数量. 记 P 的面为 $F_1,\cdots,F_m,-F_1,\cdots,-F_m$, 且令 $x_i=\operatorname{vol}(\operatorname{conv}(F_i\cup\{\mathbf{0}\}))$. 则 $\sum_{i=1}^m x_i=1/2$, 并且由引理 1.2 我们有 $0\leqslant x_i\leqslant 1/(2n)$.

注意到和式

$$U(P)^n=\sum_{\boldsymbol{u}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{i_n}\neq\mathbf{0}}x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

是 $\pm\boldsymbol{u}_{i_1},\cdots,\pm\boldsymbol{u}_{i_n}$ 的排列, 因此我们可写为

$$U(P)^n = 2^n n! \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant m} \prod_{j=1}^{n} x_{i_j} = 2^n n!\, \sigma_n(x_1, \cdots, x_m),$$

这里 $\sigma_n(x_1, \cdots, x_m)$ 是 $x_1, \cdots, x_m$ 的 n 次初等对称函数. 由经典结果知 $\sigma_n^{1/n}$ 是 $x_1, \cdots, x_m$ 的一个凹函数(参见文献[2]). 我们需要通过对所有具有给定体积的原点对称多胞形来最小化 $U(P)$. 通过

$$\mathscr{F} = \left\{ (x_1, \cdots, x_m) \mid \forall i,\ 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2n},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{2} \right\},$$

我们足以最小化 σ_n. 集合 $\mathscr{F} \subset R^m$ 是凸的, 且它的极值点是向量 $(1/(2n), \cdots, 1/(2n), 0, \cdots, 0)$ 的所有排列. 由于凹函数在它的极值点上达到最小值, 我们得到

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathscr{F}} \sigma_n^{1/n}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2n}.$$

因此

$$U(P)^n \geqslant 2^n n! \frac{1}{(2n)^n} = \frac{n!}{n^n}.$$

等号情形仅当我们恰有 $2n$ 个面且 $\pm \boldsymbol{u}_1, \cdots, \pm \boldsymbol{u}_n$ 为它们的单位法向量, 因此它是超平行体.

□

2 $U(P)$ 对 L_p-Minkowski 问题的一个应用

Minkowski 问题的各种形式由 Gluck[3] 和 Singer[4] 给出. Gluck[5] 的综述文章是对这个问题极好的介绍. 在文献[6-7]中, 作者研究了 L_p-Minkowski 问题, 它是 Minkowski 问题的一个推广. 近期关于 L_p-Minkowski 问题的一些其他工作可参见 Lamberg 和 Kaasalainen 的文献[8], Stancu 的文献[9-10], 以及 Umanskiy 的文献[11]. 对于带有偶离散数据的 L_p-Minkowski 问题, Lutwak, Yang 和 Zhang 在文献[12]中证明了下面的定理:

假设 $p \geqslant 1$. 若 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 是不位于 S^{n-1} 大子球的不同的单位向量, $V_1, \cdots, V_N > 0$ 是给定的, 则存在 R^n 中关于原点对称的凸多胞形 P, 具有 $2N$ 个 $n-1$ 维面, 使得当 f_i 和 h_i 为具有单位外法向量 $\pm \boldsymbol{u}_i$ 的两个面的面积和支撑数, 则

$$h_i^{1-p} f_i / (V(P)) = V_i, \qquad \text{对所有的 } i. \tag{4}$$

此外, 多胞形 P 是唯一的(若 $p = 1$, 唯一性是在平移不变意义下).

根据上面的定理, 一个自然的问题是: 假设 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 是不位于 S^{n-1} 的大子球面的不同的单位向量, 并且 $V_1, \cdots, V_N > 0$ 是给定的, 是否存在 R^n 中关于原点对称的凸多胞形 P, 具有 $2N$ 个 $n-1$ 维面, 使得当 f_i 和 h_i 为具有单位外法向量 $\pm \boldsymbol{u}_i$ 的两个面的面积和支撑数, 则

$$hf_i / (nV(P)) = V_i, \qquad \text{对所有的 } i. \tag{5}$$

下面的定理(定理 2.1 和定理 2.2)给出了一些必要条件.

引理 2.1[13] 设 P 为 $R^n (n \geqslant 2)$ 中一个关于原点对称的凸多胞形, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 为对应于 P 各面 $F_1, \cdots, F_N$ 的单位外法向量, 对给定的任意 $\left\{\boldsymbol{u}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i_j}\right\} \subset \left\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_N\right\}$, 记 $V_i = V(\mathrm{conv}(F_i \cup \{\boldsymbol{0}\}))$.

(i) 若 $\boldsymbol{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_{i_j} \neq \boldsymbol{0}\ (1 \leqslant j \leqslant n)$, 则

$$\sum_{\boldsymbol{u}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{i_j}\wedge\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{0}} V_k \leqslant \frac{j}{n} V(P). \tag{6}$$

(ii) 若 P 是一个质点在原点的超平行体, 则对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\sum_{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_j} \wedge u_k = 0} V_k = \frac{j}{n} V(P).$$

(iii) 若对 $j = 1$ 或 $j = n - 1$, 不等式中的等号成立, 则 P 是一个质心在原点的超平行体.

由上面的引理我们有

定理 2.1 设单位向量 $u_1, \cdots, u_N$ 不位于 S^{n-1} 的大子球面上, 且对任意含 n 个单位向量的集合 $\left\{u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}\right\} \subset \left\{\pm u_1, \cdots, \pm u_N\right\}$, 满足若 $u_{i_k} \in \left\{u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}\right\}$ 则 $-u_{i_k} \notin \left\{u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}\right\}$, 为 R^n 中线性无关的. 假设存在 R^n 中一个原点对称的凸多胞形, 具有 $2N$ 个 $n-1$ 维面, 使得

$$\frac{h_i f_i}{nV(P)} = V_i, \qquad \text{对所有的 } i. \tag{7}$$

则

$$\max\left\{V_1, \cdots, V_N\right\} \leqslant \frac{1}{2n}, \tag{8}$$

且 $V_1, \cdots, V_N$ 满足不等式

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \leqslant 2(n!)^{1/n} \sigma_n(x_1, \cdots, x_N)^{1/n} < 1, \tag{9}$$

这里 f_i 和 h_i 为具有单位外法向量 $\pm u_i$ 的面的面积和支撑数, $\sigma_n(x_1, \cdots, x_N)$ 是 $x_1, \cdots, x_N$ 的 n 阶初等对称函数.

定理 2.1(式(8)、(9)) 可以看作多胞形是由给定中心棱锥体积构造的必要条件.

由引理 2.1, 我们有

定理 2.2 假设单位向量 $u_1, \cdots, u_N$ 不位于 S^{n-1} 的大子球面上, 且对给定的任意 $1 \leqslant j \leqslant n$ 单位向量集 $\left\{u_{i_1}, \cdots, u_{i_j}\right\} \subset \left\{\pm u_1, \cdots, \pm u_N\right\}$, 满足 $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_j} \neq \mathbf{0}$. 假设存在 R^n 中原点对称的凸多胞形, 具有 $2N$ 个 $n-1$ 维面, 使得

$$\frac{h_k f_k}{nV(P)} = V_k, \qquad \text{对所有的 } k. \tag{10}$$

则

$$\sum_{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_j} \wedge u_k = 0} V_k \leqslant \frac{j}{n}, \tag{11}$$

并且

$$\sum_{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_j} \wedge u_k \neq 0} V_k \geqslant \frac{n-j}{n}, \tag{12}$$

这里 f_k 和 h_k 为具有单位外法向量 $\pm u_k$ 的面的面积和支撑数.

定理 2.2(式(11)、(12)) 可以看作多胞形是由给定中心棱锥体积构造的必要条件.

[参 考 文 献]

[1] Lutwak E, Yang D, Zhang G. A new affine invariant for polytopes and Schneider's projection problem [J]. Trans Amer Math Soc, 2001, **353**(5): 1767-1779.

[2] Marcus M, Lopes L. Inequalities for symmetric function and Hermitian matrices[J]. Canad J Math, 1957, **9**(2): 305-312.

[3] Gluck H. The generalized Minkowski poblem in differential geometry in the large[J]. Ann Math, 1972, **96**(2): 245-276.

[4] Singer D. Preassigning curvature of polyhedra homeomorphic to the two-sphere[J]. J Differential Geom, 1974, **9**(4): 633-638.

[5] Gluck H. Manifolds with preassigned curvature—a suvey[J]. Bull Amer Math Soc, 1975, **81**(2): 313-329.

[6] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory Ⅰ: Mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1993, **38**(1): 131-150.

[7] Lutwak E, Oliker V. On the regularity of solutions to a generalization of the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1995, **41**(1): 227-246.

[8] Lamberg L, Kaasalainen M. Numerical solution of the Minkowski problem[J]. J Comput Appl Math, 2001, **137**(2): 213-227.

[9] Stancu A. The discrete planar L_0-Minkowski problem[J]. Adv Math, 2002, **167**(1): 160-174.

[10] Stancu A. On the number of solutions to the discrete two-dimensional L_0-Minkowski problem[J]. Adv Math, 2003, **180**(1): 290-323.

[11] Umanskiy V. On solvability of two-dimensional L_p-Minkowski problem[J]. Adv Math, 2003, **180**(1): 176-186.

[12] Lutwak E, Yang D, Zhang G. On the L_p-Minkowski problem[J]. Trans Amer Soc, 2004, **356**(11): 4359-4370.

[13] He B W, Leng G S, Li K H. Projection problems for symmetric polytopes[J]. Adv Math, 2006, **207**(1): 73-90.

Applications of a New Affine Invariant for Polytopes

YANG Liu, HE Bin-wu

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, 200444, P.R.China)

Abstract: Using the technique of combination extremum, it was obtained that the analytic expression of the affineinvariant functional, by Lutwak, Yang and Zhang recently introduced, defined on a specific subclass of origin-symmetric convex polytopes in n-dimensional Euclidean space, and an application of it to Minkowski problem for origin-symmetric convex polytopes was given.

Key words: convex polytope; affine-invariant; Minkowski problem; volume