

基于同伦分析方法的一种改进的试位法^{*}

S·阿巴斯班迪¹, 廖世俊²

(1. 伊曼霍梅尼国际大学 数学系, 加兹温 34149-16818, 伊朗;

2. 海洋工程国家重点实验室; 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200030)

(周哲玮推荐)

摘要: 应用同伦分析方法, 提出了一种求解非线性方程改进的试位法. 给出的一些数值例证显示了该运算法则的有效性.

关键词: 试位法; 同伦分析方法; 非线性方程

中图分类号: O241.7 文献标识码: A

引言

在数值分析中, 试位法(false position method 或 regula falsi method) 是一种结合二分法和切割法^[1]特点的发现根的运算法则. 试位法是一种数千年来解决非线性方程的老方法. 最近, Wu^[2]提出了基于同伦开拓技术的修正公式. 在这篇文章中, 实例问题采用了试位法解决包含高阶代数方程的非线性方程.

与二分法相似, 试位法以 a, b 两点开始且 $f(a), f(b)$ 是相反符号的, 则根据介值定理可知, 在区间 $[a, b]$ 内连续函数 f 有一个根. 该方法通过一序列的缩小区间, 找到全部包含 f 一个根区间, 例如计算

$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a), \quad (1)$$

其中 x_0 是割线 $y(x)$ 的根, 且经过 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$. 如果 $f(a)$ 和 $f(x_0)$ 符号相同, 则令 $a_{\text{new}} = x_0, b_{\text{new}} = b$, 反之, 令 $a_{\text{new}} = a, b_{\text{new}} = x_0$. 反复重复这一过程, 直到根充分近似. 很明显, $y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0)$.

在 1992 年, Liao^[3]应用同伦拓扑的基本思想建立一个求解非线性问题的一般解析方法, 即同伦分析方法(HAM)^[4-9]. 该方法已经成功应用于解决许多类型的非线性问题^[10-13].

1 同伦分析方法

在这一部分, 应用了同伦分析方法的基本思想^[7]. 考虑非线性代数方程

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

其中 α 是该方程的一个简单根, f 在区间内是连续函数, 而且我们假定 $\alpha \in [a, b], f(a)f(b) < 0$. 令割线 $y(x)$ 经过 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$.

* 收稿日期: 2007-08-16; 修订日期: 2008-01-14

作者简介: S. Abbasbandy, 副教授, 博士(联系人, E-mail: abbasbandy@yahoo.com).

令 $q \in [0, 1]$ 表示一个嵌入参数, $\bar{h} \neq 0$ 是一个辅助参数, $H(q) \neq 0$ 是一个辅助函数. 我们构造零阶形变方程^[7]

$$(1-q)[y(x(q)) - y(x_0)] - q\bar{h}H(q)f(x(q)) = 0, \quad (3)$$

其中 x_0 由方程(1) 获得. 值得强调的是, 对于辅助参数 \bar{h} 和辅助函数 $H(q)$ 有很大的选择自由. 显然, 当 $q = 0$ 和 $q = 1$ 时, 分别得到

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = \alpha.$$

当 q 从 0 到 1 逐渐增加时, $x(q)$ 从 x_0 逐渐变化到方程(2) 的解 α . 这种连续变化叫做同伦形变, 因此我们叫方程(3) 是零阶形变方程. 定义

$$x_m = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m x(q)}{dq^m} \right|_{q=0},$$

同时 $x(q)$ 对嵌入参数 q 进行 Taylor 级数展开, 我们得到

$$x(q) = x(0) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m q^m. \quad (4)$$

如果对辅助参数 \bar{h} 和辅助函数 $H(q)$ 进行适当选择, 则在 $q = 1$ 时级数(4) 收敛. 则

$$\alpha = x_0 + \sum_{m=0}^{\infty} x_m \quad (5)$$

一定是方程(2) 的解, 正如 Liao^[7] 所证明的那样. 确定级数(4) 在 $q = 1$ 时的收敛性是非常重要的, 否则, 级数(5) 没有意义. 为了简单, 我们令 $H(\delta) \equiv 1$, $\alpha_M = x_0 + \dots + x_M$ 表示 $(M+1)$ 项 α 的近似. 因此, 通过把式(4) 代入式(3) 且使用 Taylor 级数展开, 我们可以得到以下关于变量 M 的迭代关系.

当 $M = 0$ 时,

$$\alpha \approx \alpha_0 = x_0,$$

这是试位法.

当 $M = 1$ 时,

$$\begin{cases} x_1 = \bar{h} \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_0), \\ \alpha \approx \alpha_1 = x_0 + \bar{h} \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_0), \end{cases} \quad (6)$$

这是当 $\bar{h} = 0$ 时的试位法.

当 $M = 2$ 时,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \left[1 + \bar{h} \frac{(b-a)f'(x_0)}{f(b)-f(a)} \right], \\ \alpha \approx \alpha_2 = x_0 + 2\bar{h} \frac{(b-a)f(x_0)}{f(b)-f(a)} + \bar{h}^2 \frac{(b-a)^2 f(x_0) f'(x_0)}{(f(b)-f(a))^2}, \end{cases} \quad (7)$$

这是当 $\bar{h} = 0$ 时的试位法.

因此, 我们对试位法进行了如下改进: 假定 $\alpha_M \in [a, b]$, 否则我们选择其它 \bar{h} , 例如, 不断的二分 \bar{h} 直到计算得到的 α_M 符合我们的假定, 反之, 在我们的计算实例中可以忽略这个 \bar{h} , 选择其它值进行计算.

如果 $f(a)$ 和 $f(\alpha_M)$ 同号, 则我们令 $a_{\text{new}} = \alpha_M$, $b_{\text{new}} = b$, 反之, 令 $a_{\text{new}} = a$, $b_{\text{new}} = \alpha_M$. 反复重复这一过程, 直到根被充分近似. 正如被提到的, 当 $\bar{h} = 0$ 时是传统的试位法.

2 实 例

在这里我们考虑一些实例,对于传统试位法所需要的迭代次数 N_f 和改进后的试位法关于变量 M 的迭代次数 $N(M)$ 进行比较,同时我们也画出了 \bar{h} 曲线^[7]. 在所有的实例中,计算精度都是 10^{-7} .

例 2.1^[14,15] 考虑方程

$$x^2 - (1 - x)^5 = 0,$$

有解 $\alpha = 0.345955$, 其中 $[a, b] = [0, 2]$. 这里 $N_f = 18$ 和 $\bar{h} = -1.84$, $N(1) = 2$, 如图 1 所示. 当 $\bar{h} \in [-1.92, -1.84]$, $N(2) = 2$, 如图 2 所示.

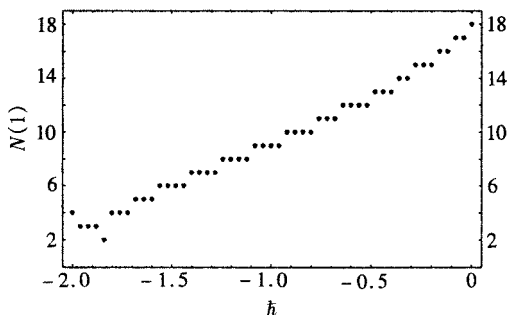


图 1 例 2.1 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 18$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} = -1.84$ 时, $N(1) = 2$)

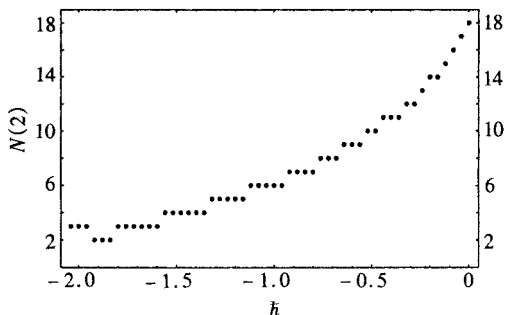


图 2 例 2.1 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 18$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} \in [-1.92, -1.84]$ 时, $N(2) = 2$)

例 2.2 考虑方程

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0,$$

有解 $\alpha = 1.36523$, 其中 $[a, b] = [0, 3]$. 这里 $N_f = 28$ 和 $\bar{h} \in [-2.04, -1.92]$, $N(1) = 5$, 如图 3 所示. 当 $\bar{h} = -1.24$, $N(2) = 4$, 如图 4 所示.

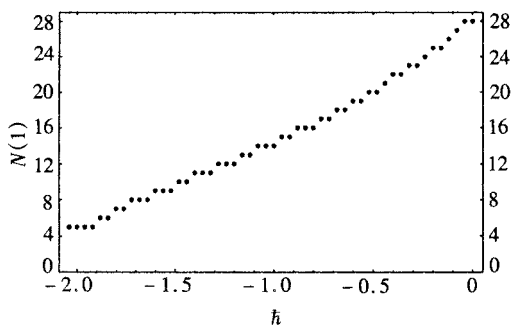


图 3 例 2.2 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 28$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} \in [-2.04, -1.92]$ 时, $N(1) = 5$)

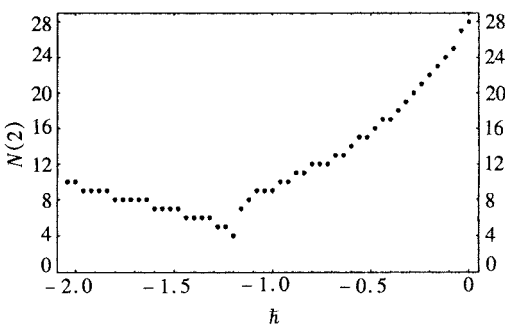


图 4 例 2.2 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 28$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} = -1.24$ 时, $N(2) = 4$)

例 2.3 考虑方程

$$\sin^2 x - x^2 + 1 = 0,$$

有解 $\alpha = 1.40449$, 其中 $[a, b] = [1, 2]$. 这里 $N_f = 15$ 和 $\bar{h} = -1.32$, $N(1) = 4$, 如图 5 所示. 当 $\bar{h} \in [-1.08, -1.0]$, $N(2) = 3$, 如图 6 所示.

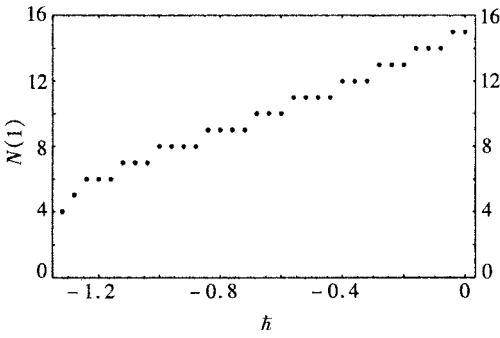


图5 例 2.3 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 15$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} = -1.32$ 时, $N(1) = 4$)

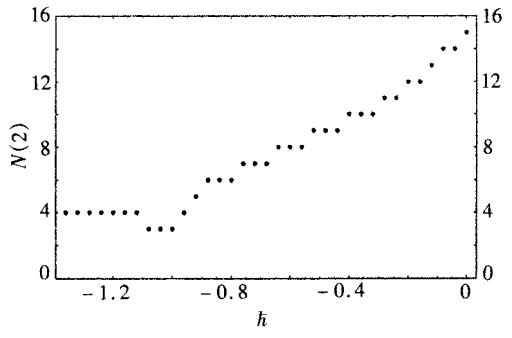


图6 例 2.3 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 15$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} \in [-1.08, -1.0]$ 时, $N(2) = 3$)

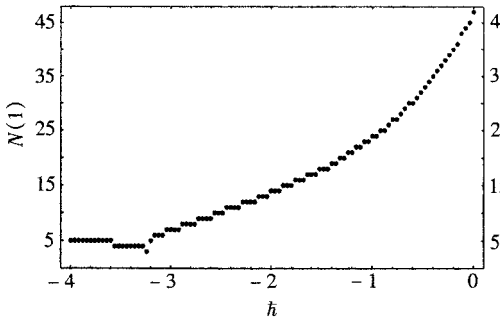


图7 例 2.4 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 47$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} = -3.24$ 时, $N(1) = 3$)

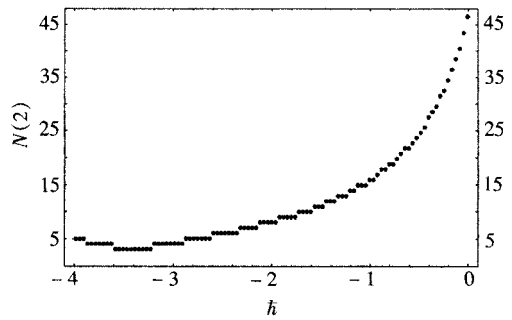


图8 例 2.4 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 47$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} \in [-3.6, -3.24]$ 时, $N(2) = 3$)

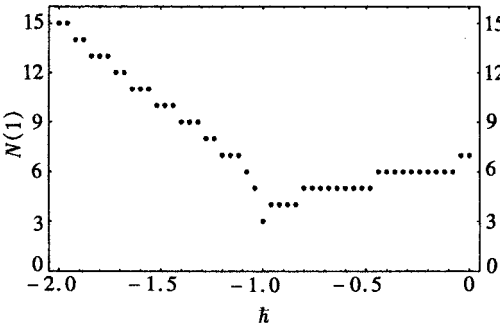


图9 例 2.5 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 7$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} = -1.0$ 时, $N(1) = 3$)

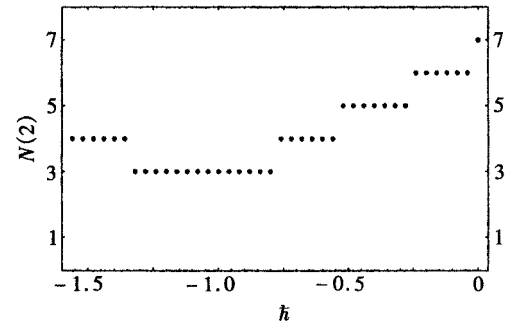


图10 例 2.5 的 \bar{h} 曲线(应用试位法得到 $N_f = 7$, 而应用 HAM 得到当 $\bar{h} \in [-1.32, -0.8]$ 时, $N(2) = 3$)

例 2.4 考虑方程

$$x^2 - e^x - 3x + 2 = 0,$$

有解 $\alpha = 0.25753$, 其中 $[a, b] = [0, 4]$. 这里 $N_f = 47$ 和 $\bar{h} = -3.42$, $N(1) = 3$, 如图7所示. 当 $\bar{h} \in [-3.6, -3.24]$, $N(2) = 3$, 如图8所示.

例 2.5 考虑方程

$$\cos(x) - x = 0,$$

有解 $\alpha = 0.739085$, 其中 $[a, b] = [0, 3]$. 这里 $N_f = 7$ 和 $\bar{h} = -1$, $N(1) = 3$, 如图 9 所示. 当 $\bar{h} \in [-1.32, -0.8]$, $N(2) = 3$, 如图 10 所示.

正如图 1 到图 10 所显示的, 通过传统试位法计算得到的迭代次数是最大的, 即 $\bar{h} = 0$. 如果适当选择 \bar{h} 的数值, 则所需要的迭代次数较少.

注 2.1 假定我们通过同伦分析方法, 获得方程(6)和(7)的关于辅助参数 \bar{h} 的解, 则怎样选择 \bar{h} 数值以确定足够快得到该解, 这个问题摆在了我们面前. 在这个实例中, 我们可以通过同伦 Padé 技术^[7]获得收敛的解.

3 同伦 Padé 方法

正如早先出版的一些文章^[6-7, 16]所检验的那样, 应用同伦分析方法, 可以通过辅助参数 \bar{h} 简单调整或控制迭代次数 $N(M)$. 传统的 $[1, 1]$ Padé 近似应用于 $\alpha_2(q) = x_0 + x_1q + x_2q^2$, 我们可以得到

$$\alpha_2(q) |_{q=1} \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (8)$$

且不依赖于辅助参数 \bar{h} . 因此, 通过同伦 Padé 方法获得的结果不依赖于辅助参数 \bar{h} . 表 1 显示了在计算实例中计算方程(8)所需要的迭代次数 N_p , 并注意 N_p 远小于 N_f .

表 1 应用 $[1, 1]$ 同伦 Padé 方法的计算结果

实例	$[a, b]$	N_f	N_p
2.1	$[0, 2]$	18	2
2.2	$[0, 3]$	28	7
2.2	$[1, 2]$	14	3
2.3	$[1, 2]$	15	3
2.4	$[0, 4]$	47	3
2.4	$[0, 3]$	19	2
2.5	$[0, 3]$	7	3

注 3.1 令 $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. 应用同伦 Padé 方法计算方程(8), 如果 $g(x_0) \notin [a, b]$, 则我们必须选择其它区间 $[a, b]$. 根据引理, 我们确定存在好的区间.

引理 3.1^[11] 令 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中只有一个简单根, 且 $f \in C^2[a, b]$. 存在包含简单根 $f(x)$ 的区间 $[c, d] \subset [a, b]$, 我们可以使用同伦 Padé 方法, 例如, g 映射到区间 $[c, d]$.

4 结 论

在这篇文章中, 通过同伦分析方法得到了一个简单易用的、改进的试位法. 此外, 同伦分析方法提供我们自由选择辅助参数 \bar{h} 和辅助函数 $H(q)$. 同时, 通过 \bar{h} 曲线, 我们可以控制收敛速度. 计算实例显示了同伦分析方法解决科学和工程问题中非线性问题的有效性和潜力.

致谢 感谢来自于伊朗伊曼霍梅尼国际大学和中国上海交通大学的资金支持. 感谢尤翔程小姐将其翻译成中文.

[参 考 文 献]

[1] Burden R L, Faires J D. Numerical Analysis [M]. 7th Ed. Pacific Grove, California: Brooks/ Cole, 2000.

[2] Wu T M. A modified formula of ancient Chinese algorithm by the homotopy continuation technique [J]. Appl Math Comput, 2005, 165(1): 31-35.

[3] LIAO Shi-jun. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems[D]. Ph D Thesis. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 1992.

[4] Liao S J. An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special

- example[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1995, **30**(3): 371-380.
- [5] Liao S J. An approximate solution technique which does not depend upon small parameters (Part 2): an application in fluid mechanics[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(5): 815-822.
- [6] Liao S J. An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(4): 759-778.
- [7] Liao S J. *Beyond Perturbation. Introduction to the Homotopy Analysis Method* [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC Press, 2003.
- [8] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **147**(2): 499-513.
- [9] Liao S J. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method [J]. *Appl Math Comput*, 2005, **169**(2): 1186-1194.
- [10] Ayub M, Rasheed A, Hayat T. Exact flow of a third grade fluid past a porous plate using homotopy analysis method[J]. *Internat J Engng Sci*, 2003, **41**(18): 2091-2103.
- [11] Hayat T, Khan M, Ayub M. On the explicit analytic solutions of an Oldroyd 6-constant fluid[J]. *Internat J Engng Sci*, 2004, **42**(2): 123-135.
- [12] Liao S J. A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate[J]. *Internat J Heat Mass Transfer*, 2005, **48**(12): 2529-2539.
- [13] Liao S J, Pop I. Explicit analytic solution for similarity boundary layer equations[J]. *Internat J Heat Mass Transfer*, 2004, **47**(1): 75-85.
- [14] Abbasbandy S. Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method[J]. *Appl Math Comput*, 2003, **145**(2/3): 887-893.
- [15] Abbasbandy S. Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **172**(1): 431-438.
- [16] Liao S J. An explicit analytic solution to the Thomas-Fermi equation[J]. *Appl Math Comput*, 2003, **144**(2/3): 495-506.

A New Modification of False Position Method Based on the Homotopy Analysis Method

S. Abbasbandy¹, LIAO Shi-jun²

(1. Department of Mathematics, Imam Khomeini International University,
Ghazvin, 34149-16818, Iran;

2. School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong
University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: A new modification of false position method for solving nonlinear equations is presented by applying homotopy analysis method (HAM). Some numerical illustrations are given to show the efficiency of algorithm.

Key words: false position method; regula falsi method; homotopy analysis method; nonlinear equation