

带扩散的广义热弹性固体中移动荷载引起的二维相互作用*

S·德斯瓦尔¹, S·乔德哈瑞²

(1. 古鲁詹伯赫希瓦理工大学 数学系, 海沙 125001, 哈里亚纳邦, 印度;

2. 戈维特学院 数学系, 纳尔瓦(海沙) 125037, 哈里亚纳邦, 印度)

(程昌钧推荐)

摘要: 当一个移动荷载沿着一个坐标轴作用在介质边界上时, 研究了该具有广义热弹性扩散的均匀各向同性介质中的扰动. 应用特征值逼近方法, 研究了 Laplace-Fourier 变换域中的二维扰动问题. 在 Fourier 扩展技术的基础上, 利用 Laplace 数值逆变换技术, 求解了位移分量、应力、温度场、浓度和化学势的解析表达式. 数值计算了铜类材料的这些表达式, 并给出有关图形. 作为特殊情况, 给出了广义热弹性介质和弹性介质中, 扩散和热效应的理论结果和数值结果.

关键词: 特征值逼近; 矢量矩阵微分方程; 热弹性扩散; 广义热弹性; 移动荷载; Laplace 和 Fourier 变换

中图分类号: O343.6; O347.1 文献标识码: A

符 号

λ, μ	Lam 常数	D	热扩散常数
ρ	介质密度	τ_0	热松弛时间
σ_{ij}	应力张量分量	τ	扩散松弛时间
e_{ij}	应变张量分量	a	热扩散效应度量
u_i	位移矢量分量	b	扩散效应度量
C_E	常应变时比热	$\beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$	
t	时间	$\beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$	
T	绝对温度	α_t	线性热膨胀系数
T_0	参考温度, $ T - T_0 /T_0 \ll 1$	α_c	线性扩散膨胀系数
$\Theta = T - T_0$		F_0	作用机械荷载强度
K	导热率	\mathbf{u}	位移矢量
e_{ik}	膨胀系数	ϕ	标量势
δ_{ij}	Kronecker δ 符号	ψ	矢量势
P	每单位质量的化学势	$\delta(\bullet)$	Dirac δ 函数

* 收稿日期: 2007-06-04; 修订日期: 2007-11-09

作者简介: Sunita Deswal, 博士(联系人, E-mail: spannu_gju@yahoo.com);

Suman Choudhary(E-mail: sahuksv@rediffmail.com).

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校.

引 言

Biot^[1]引入了线性热弹性动力学理论,给出了位移场和温度场的控制方程组,该方程组包括了两个耦合的偏微分方程.位移场由波动型方程控制,温度场由扩散型方程控制.表明后者(扩散方程)有如下性质:其部分解可以延伸到无穷,即,对各向同性均匀弹性介质说来,受机械的或热的扰动作用后,离扰动源无限远处的扰动结果瞬间可以得到.由于控制方程是耦合的,因此,温度场和位移场均可获得.从物理观点看来,这意味着扰动部分传播的速度是无限的.这在物理上说来是不可能的,与传热机制的理论也相矛盾.

Lord和Shulman^[2]利用修正的Fourier传热定律,并引入热松弛时间参数,导出了广义热弹性理论,也称为扩展的热弹性理论.该理论中,修正的传热方程是波动型的,从而保证了热和弹性波传播的速度是有限的.Dhaliwal和Sherief^[3]将该理论推广到有热源作用的一般各向异性介质.由于这些方程本质上的复杂性,仅给出了数个求解尝试.Sherief^[4]求解了点热源作用的球对称问题,Sherief和Anwar^[5]求解了线热源作用的柱对称问题.Sherief和Ezzat^[6]利用势函数方法,研究了在无限球对称空间中热弹性的基础问题.所有这些问题都是一维的.Sherief和Anwar^[7]研究了带一个松弛时间的广义热弹性二维问题,给出了状态空间中的公式表达式.在文献[8-10]中,详细地研究了热弹性平面波问题.

扩散可定义为物质微粒从高浓度区域向较低浓度区域运动,直到达到平衡的过程.按照热力学第二定律,任何系统在扩散状态时的熵或紊乱必然总是随时间而增加的.扩散在众多生命过程中非常重要.由于扩散在地球物理学和工业中的广泛应用,目前对这一现象已有大量的研究.在集成电路制作中,扩散应用于向半导体基片中掺入“杂质”量的控制.特别是在双极晶体管中,扩散形成基极和发射极,构成集成阻尼器,在MOS晶体管中,形成源/漏极区域,在MOS晶体管中,还可以在多晶硅栅上得到应用.在大多数应用中,浓度计算都采用了熟知的Fick定律.这是一个简化定律,它不考虑掺入的杂质和介质间的相互作用,只考虑介质中掺入杂质的影响或温度的影响.扩散现象还用来改善石油的萃取条件(探索从油田回收石油的更有效的方法).近来,石油公司对利用热弹性扩散过程,更有效地从油田提取石油非常感兴趣.热扩散过程也有助于半导体设备和微电子学相关领域的研究.

固体中的热扩散是一个迁移过程,在实践中有很重要的意义.大多数浓度和温度梯度的研究,与金属和合金的生产有关.最早的评论发表在Oriani^[11]的工作中.随着核动力学的发展,对金属氧化物热扩散研究兴趣的回归,不均匀温度场研究^[12]的升温,都是和科技发展水平相适应的.

弹性固体中的热扩散过程是和温度场、物质扩散和应变场耦合的.在弹性固体热扩散过程中,热和质量也会随环境而变化.热扩散概念用来描述金属材料热-机械加工过程(碳化、氮化钢,等).这是一个热激活的过程,扩散是在实际材料间进行,例如氮、碳等,并且伴随固体的变形.Nowacki^[13-16]发展了热弹性扩散理论,在该理论中,应用了耦合热弹性模型,这意味着热弹性波的传播速度是无限的.Sherief等人^[17]发展了广义热弹性扩散理论,其热弹性波和扩散波的传播速度是有限的.Singh^[18]研究了具有热扩散弹性固体自由表面上,P波和SV波的反射现象.Sherief等人^[19]利用带一个松弛时间的广义热弹性扩散理论,研究了热弹性半空间问题,该半空间与有界平面接触面上有物质渗透.最近,Aouadi^[20-21]利用广义热弹性扩散理论,

研究了可变导电率和可变导热率问题, 并且, 当沿无限长固体圆柱表面作用热冲击时, 讨论了热扩散和物质渗透间的相互影响.

本研究的目的是推动热弹性扩散过程的广泛应用. 热扩散理论还用来描述金属粉末烧结的多孔材料的热-机械加工. 近年, 热扩散方法已成功地应用于粉末冶金生产, 用于改进材料的机械性质.

在不同的科技条件和地球物理环境下, 移动荷载作用时的动力响应是一个令人感兴趣的课题. 例如, 固体动力学中的地表运动, 冲击波(爆炸产生的表面压力波)产生的应力, 以及超音速飞机产生的应力. 这类研究出现了很多工程学分支, 例如在桥梁和铁路中, 受压力波作用的梁, 以及两相流作用下的管道系统. 其它应用还有, 比如接触力学中, 高速火箭车在钢轨上的滑行问题. Verrujit 和 Cordova^[22]研究了弹性半空间平面上, 具有磁阻尼的移动荷载问题.

1 问题的数学描述和基本方程

按照 Sherief 等人^[17]的做法, 在无扰动状态下, 不计体力和热荷载作用, 在恒温 T_0 下, 带广义热扩散的各向同性均匀弹性固体的控制方程为:

(i) 运动方程

$$\rho \dot{u}_i = \mu u_{i,j} + (\lambda + \mu) u_{j,i} - \beta_1 \Theta_{,i} - \beta_2 C_{,i}; \quad (1)$$

(ii) 广义能量方程

$$K \Theta_{,ii} = \rho C_E (\dot{\Theta} + \tau_0 \ddot{\Theta}) + \beta_1 T_0 (e_{kk} + \tau_0 \dot{e}_{kk}) + a T_0 (C + \tau_0 \dot{C}); \quad (2)$$

(iii) 广义扩散方程

$$D \beta_2 e_{kk,ii} + D a \Theta_{,ii} + C + \tau_0 \dot{C} - D b C_{,ii} = 0; \quad (3)$$

(iv) 本构方程

$$\sigma_j = 2 \mu e_j + \delta_{ij} (\lambda e_{kk} - \beta_1 \Theta - \beta_2 C), \quad (4)$$

$$P = -\beta_2 e_{kk} + b C - a \Theta. \quad (5)$$

其中 τ_0 为热松弛时间, 以保证温度 Θ 满足热传导方程, 预期的传热速度是有限的. τ 为扩散松弛时间, 以保证浓度 C 满足方程, 预期的物质从一种介质到另一种介质的迁移速度也是有限的. 顶上带点的字母表示对时间的导数.

采用固定直角坐标系 (x, y, z) , 原点在 $z = 0$ 平面上, 平面上无应力, 并且 z -轴方向垂直于介质. 带广义热扩散的弹性固体位于 $z > 0$ 的区域. 假设移动荷载的大小为 F_0 , 方向为法向或切向, 作用在 $z = 0$ 的介质表面上.

我们的分析限于平行于 xz -平面, 介质的边界设为绝热. 化学势也假设为时间的已知函数.

本文采用如下的无量纲变量

$$\begin{cases} x^* = \frac{\omega}{c_1} x, \quad z^* = \frac{\omega}{c_1} z, \quad t^* = \omega t, \quad \tau^* = \omega \tau, \quad \tau_0^* = \omega \tau_0, \\ u_x^* = \frac{\rho \omega c_1}{\beta_1 T_0} u_x, \quad u_z^* = \frac{\rho \omega c_1}{\beta_1 T_0} u_z, \quad \sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{\beta_1 T_0}, \\ C^* = \frac{C}{\rho}, \quad P^* = \frac{P}{\beta_2}, \quad \Theta^* = \frac{\Theta}{T_0} \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \omega = \frac{\rho C_E c_1^2}{K}. \quad (7)$$

将式(6)中的量代入方程(1)~(3),得到无量纲方程(为方便计,略去了右上角的星号“*”)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + a_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} - a_3 \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

$$a_2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial z} - a_3 \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

$$\tau_m \frac{\partial \Theta}{\partial t} + b_1 \tau_m \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + b_2 \tau_m \frac{\partial C}{\partial t} - b_3 \cdot^2 \Theta = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\cdot^2 u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\cdot^2 u_z) + b_4 \cdot^2 \Theta + b_5 \tau_n \frac{\partial C}{\partial t} - b_6 \cdot^2 C = 0, \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, & a_2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, & a_3 = \frac{\beta_2 \rho}{\beta_1 T_0}, & b_1 = \frac{\beta_1^2 T_0}{\rho^2 c_1^2 C_E}, \\ b_2 = \frac{a}{C_E}, & b_3 = \frac{K\omega}{\rho c_1^2 C_E}, & b_4 = \frac{a \rho c_1^2}{\beta_1 \beta_2}, & b_5 = \frac{\rho^2 c_1^4}{D \beta_1 \beta_2 T_0 \omega}, \\ b_6 = \frac{b \rho^2 c_1^2}{\beta_1 \beta_2 T_0}, & \tau_m = \left[1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right], & \tau_n = \left[1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right], \\ \cdot^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (12)$$

借助于位移分量 u_x 、 u_z 和标量势 ϕ 、矢量势 ψ 的关系,给出其无量纲表达式为

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (13)$$

由方程(8)~(11),得

$$\left[\cdot^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi - \Theta - a_3 C = 0, \quad (14)$$

$$\cdot^2 \psi - \frac{1}{a_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

$$\left[\cdot^2 - \frac{1}{b_3} \tau_m \frac{\partial}{\partial t} \right] \Theta - \frac{b_1}{b_3} \tau_m \frac{\partial}{\partial t} \cdot^2 \phi - \frac{b_2}{b_3} \tau_m \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

$$\cdot^2 \phi + b_4 \cdot^2 \Theta + \left[b_5 \tau_n \frac{\partial}{\partial t} - b_6 \cdot^2 \right] C = 0. \quad (17)$$

2 问题的解

2.1 变换域中的矢量-矩阵微分方程式

定义 Laplace 变换和 Fourier 变换为

$$f(x, z, p) = \int_0^\infty f(x, z, t) e^{-pt} dt, \quad (18)$$

$$f(\xi, z, p) = \int_{-\infty}^\infty f(x, z, p) e^{i\xi x} dx, \quad (19)$$

其中 p 和 ξ 分别为 Laplace 变换和 Fourier 变换参数,则方程(14)~(17)简化为

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = R_{11} \phi + R_{12} \Theta + R_{13} C, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dz^2} = R_{21} \phi + R_{22} \Theta + R_{23} C, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 C}{dz^2} = R_{31} \phi + R_{32} \Theta + R_{33} C, \quad (22)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\xi^2 + \frac{p^2}{a_2} \right) \right] \phi = 0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} R_{11} = (p^2 + \xi^3), R_{12} = 1, R_{13} = a_3, \\ R_{21} = f_1, R_{22} = f_2, R_{23} = f_3, \\ R_{31} = \frac{g_1}{b_6 - a_3}, R_{32} = \frac{g_2}{b_6 - a_3}, R_{33} = \frac{g_3}{b_6 - a_3}, \\ g_1 = p^4 + f_1(1 + b_4), g_2 = p^2 + (f_2 - \xi^2)(1 + b_4), \\ g_3 = a_3(p^2 - \xi^2) + f_3(1 + b_4) + b_5 \tau_n^* p + b_6 \xi^2, \\ f_1 = \frac{b_1}{b_3} \tau_{mp}^3, f_2 = \frac{1 + b_1}{b_3} \tau_{mp}^* + \xi^2, f_3 = \frac{b_1 a_3 + b_2}{b_3} \tau_{mp}^*, \\ \tau_m^* = 1 + \tau_0 p, \tau_n^* = 1 + \tau_p. \end{cases} \quad (24)$$

方程组(20)~(22)可以写成矢量-矩阵微分方程形式如下:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{W}(\xi, z, p) = \mathbf{A}(\xi, p) \mathbf{W}(\xi, z, p), \quad (25)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} U \\ D^* U \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \phi \\ \Theta \\ C \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (26)$$

其中 D^* 表示对 z 的微分, 即 d/dz .

2.2 矢量-矩阵微分方程的解

利用特征值逼近方法解方程(25). 我们取

$$\mathbf{W}(\xi, z, p) = \mathbf{X}(\xi, p) e^{qz}, \quad (27)$$

则

$$\mathbf{A}(\xi, p) \mathbf{W}(\xi, z, p) = q \mathbf{W}(\xi, z, p), \quad (28)$$

它导致特征值问题. 对应于矩阵 \mathbf{A} 的特征方程为

$$\det[\mathbf{A} - q\mathbf{I}] = 0, \quad (29)$$

$$\text{展开为 } q^6 - \lambda_1 q^4 + \lambda_2 q^2 - \lambda_3 = 0, \quad (30)$$

其中

$$\begin{cases} \lambda_1 = R_{11} + R_{22} + R_{33}, \\ \lambda_2 = R_{11}R_{22} + R_{22}R_{33} + R_{33}R_{11} - R_{12}R_{21} - R_{23}R_{32} - R_{31}R_{13}, \\ \lambda_3 = R_{11}(R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32}) + R_{12}(R_{23}R_{31} - R_{21}R_{33}) + \\ R_{13}(R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}). \end{cases} \quad (31)$$

方程(30)的根 $\pm q_i (i = 1, 2, 3)$ 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值. 设 q_i 的实部为正. 对应于特征值 q_i 的特征矢量 $\mathbf{X}(\xi, p)$, 可由求解齐次方程

$$[\mathbf{A} - q\mathbf{I}] \mathbf{X}(\xi, p) = 0 \quad (32)$$

确定.

得到特征矢量组 $X_i(\xi, p)$ ($i = 1, 2, 3, 5, 6, 7$) 为

$$X_i(\xi, p) = \begin{bmatrix} X_{i1}(\xi, p) \\ X_{i2}(\xi, p) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{i1}(\xi, p) = \begin{bmatrix} s_i \\ r_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{i2}(\xi, p) = \begin{bmatrix} s_i q_i \\ r_i q_i \\ q_i \end{bmatrix}, \\ q = q_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ X_{j1}(\xi, p) = \begin{bmatrix} s_i \\ r_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{j2}(\xi, p) = \begin{bmatrix} -s_i q_i \\ -r_i q_i \\ -q_i \end{bmatrix}, \\ j = i + 4, \quad q = -q_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ s_i = \frac{s_{i1} - s_{i2} - R_{23}s_{i3}}{R_{21}s_{i3}}, \\ r_i = \frac{R_{31}R_{13} - (R_{33} - q_i^2)(R_{11} - q_i^2)}{R_{32}(R_{11} - q_i^2) - R_{12}R_{31}}, \\ s_{i1} = (R_{11} - q_i^2)(R_{22} - q_i^2)(R_{33} - q_i^2), \\ s_{i2} = R_{31}R_{13}(R_{22} - q_i^2), \\ s_{i3} = R_{32}(R_{11} - q_i^2) - R_{12}R_{31} \quad (i = 1, 2, 3). \end{array} \right. \quad (34)$$

方程(25)的解为

$$W(\xi, z, p) = \sum_{i=1}^3 [B_i X_i(\xi, p) e^{q_i z} + B_{i+4} X_{i+4}(\xi, p) e^{-q_i z}]. \quad (35)$$

方程(23)的解为

$$\phi = B_4 e^{q_4 z} + B_8 e^{-q_4 z}, \quad (36)$$

其中 B_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 为任意常数. 且

$$q_4 = \sqrt{\xi^2 + \frac{p^2}{a^2}}. \quad (37)$$

方程(35)和(36)即为应用特征值逼近方法求得的广义热扩散弹性问题的一般解, 因此对 Laplace 和 Fourier 变换领域中的问题, 具有广泛的应用价值.

3 应用: 移动荷载引起的相互作用

本节中, 将给出方程(35)、(36)中的位移、应力、温度场、浓度和化学势的一般解, 导出以速度 V 匀速移动荷载作用下的半空间的响应. 常数 B_i 由施加适当的边界条件确定. 将这些常数 B_i 代入到方程(35)和(36), 即可得到 Fourier 和 Laplace 变换域 (ξ, z, p) 中所要求的物理量. 通过两个变换的数值逆变换, 就可以得到原域 (x, z, t) 中的最终解答.

情况 1 法向荷载

荷载 $F(x)$ 在半空间中作法向移动. 设 $z = 0$ 平面是绝热的, 温度和浓度不发生变化. 此时的边界条件为

$$\alpha_{zz} = -F(x)H(t), \quad \alpha_{zx} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = 0, \quad (38)$$

其中 $F(x) = F_0 \delta(x - Vt)$.

情况 2 切向荷载

荷载 $F(x)$ 在半空间作切向移动. 边界条件为

$$\alpha_{zz} = 0, \quad \alpha_{zx} = -F(x)H(t), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = 0. \quad (39)$$

可以看出, 每种情况中的 8 个未知数由方程(35)、(36)和仅有的 4 个边界条件确定. 这意味着, 半空间的辐射条件是从 z 正向减幅的输出波. 因此辐射条件要求 $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$.

我们得到位移分量、应力、温度场、浓度和势函数的表达式为:

$$\alpha_{zz} = e_1 B_5 e^{-q_1 z} + e_2 B_6 e^{-q_2 z} + e_3 B_7 e^{-q_3 z} + e_4 B_8 e^{-q_4 z}, \quad (40)$$

$$\alpha_{zx} = k_1 B_5 e^{-q_1 z} + k_2 B_6 e^{-q_2 z} + k_3 B_7 e^{-q_3 z} - k_4 B_8 e^{-q_4 z}, \quad (41)$$

$$u_x = -i \xi [s_1 B_5 e^{-q_1 z} + s_2 B_6 e^{-q_2 z} + s_3 B_7 e^{-q_3 z}] + q_4 B_8 e^{-q_4 z}, \quad (42)$$

$$u_z = -[s_1 q_1 B_5 e^{-q_1 z} + s_2 q_2 B_6 e^{-q_2 z} + s_3 q_3 B_7 e^{-q_3 z}] - i \xi B_8 e^{-q_4 z}, \quad (43)$$

$$\Theta = r_1 B_5 e^{-q_1 z} + r_2 B_6 e^{-q_2 z} + r_3 B_7 e^{-q_3 z}, \quad (44)$$

$$C = B_5 e^{-q_1 z} + B_6 e^{-q_2 z} + B_7 e^{-q_3 z}, \quad (45)$$

$$P = M_1 B_5 e^{-q_1 z} + M_2 B_6 e^{-q_2 z} + M_3 B_7 e^{-q_3 z}, \quad (46)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i+4} = \frac{\Delta_i}{(p - i \xi \gamma) \Delta} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ M_i = -e^* (q_i^2 - \xi^2) s_i + \frac{b \rho}{\beta_2} - \frac{a T_0 r_i}{\beta_2} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \Delta = (r_3 - r_2) q_2 q_3 (e_1 k_4 + e_4 k_1) + (r_1 - r_3) q_1 q_3 (e_2 k_4 + e_4 k_2) + \\ \quad (r_2 - r_1) q_1 q_2 (e_3 k_4 + e_4 k_3), \\ e_i = q_i^2 s_i - a^* s_i - r_i - b^* \quad (i = 1, 2, 3), \quad e_4 = i \xi \gamma \left[1 - \frac{\lambda}{\rho c_1} \right], \\ k_i = \frac{2i \xi s_i q_i \mu}{\rho c_1^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad k_4 = \frac{\mu}{\rho c_1^2} (\xi^2 + q_4^2), \\ e^* = \frac{\beta_1 T_0}{\rho c_1^2}, \quad a^* = \frac{\lambda \xi^2}{\rho c_1^2}, \quad b^* = \frac{\beta_2 \rho}{\beta_1 T_0}. \end{array} \right. \quad (47)$$

当移动荷载沿法向作用时(情况 1), $\Delta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的值为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = F_0 k_4 (r_2 - r_3) q_2 q_3, \quad \Delta_2 = F_0 k_4 (r_3 - r_1) q_3 q_1, \quad \Delta_3 = F_0 k_4 (r_1 - r_2) q_1 q_2, \\ \Delta_4 = F_0 [k_1 (r_2 - r_3) q_2 q_3 + k_2 (r_3 - r_1) q_1 q_3 + k_3 (r_1 - r_2) q_1 q_2]. \end{array} \right. \quad (48)$$

当移动荷载沿切向作用时(情况 2), 在方程(40)~(46)的解中, 只需将 $\Delta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 替换为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = F_0 e_4 (r_2 - r_3) q_2 q_3, \quad \Delta_2 = F_0 e_4 (r_3 - r_1) q_3 q_1, \quad \Delta_3 = F_0 e_4 (r_1 - r_2) q_1 q_2, \\ \Delta_4 = -F_0 [e_1 (r_2 - r_3) q_2 q_3 + e_2 (r_3 - r_1) q_1 q_3 + e_3 (r_1 - r_2) q_1 q_2]. \end{array} \right. \quad (49)$$

特殊情况 I

取 $C = D = a = b = \beta_2 = 0$, 可得广义热弹性介质中, 位移分量、应力和温度场的表达式:

$$\alpha_{zz} = e_1^* B_4^* e^{-q_1 z} + e_2^* B_5^* e^{-q_2 z} + e_3^* B_6^* e^{-q_3 z}, \quad (50)$$

$$\alpha_{zx} = k_1^* B_4^* e^{-q_1 z} + k_2^* B_5^* e^{-q_2 z} - k_3^* B_6^* e^{-q_3 z}, \quad (51)$$

$$u_x = -i\xi s_1^* B_4^* e^{-q_1^* z} + s_2^* B_5^* e^{-q_2^* z} + q_3^* B_6^* e^{-q_3^* z}, \quad (52)$$

$$u_z = -[s_1^* q_1^* B_4^* e^{-q_1^* z} + s_2^* q_2^* B_5^* e^{-q_2^* z}] - i\xi B_6^* e^{-q_3^* z}, \quad (53)$$

$$\Theta = B_4^* e^{-q_1^* z} + B_5^* e^{-q_2^* z}, \quad (54)$$

其中

$$q_i^* = \frac{\lambda_i^* + (-1)^{i+1} \sqrt{\lambda_i^{*2} - 4\lambda_2^*}}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (55)$$

为方程

$$q^4 - \lambda_1^* q^2 + \lambda_2^* = 0 \quad (56)$$

的根, 其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^* = R_{11} + R_{22}, \quad \lambda_2^* = R_{11}R_{22} - R_{21}R_{12}, \\ q_3^* = q_4^*, \quad B_{i+3}^* = \Delta_i^* / (p - i\xi Y) \Delta^* \quad (i = 1, 2, 3), \\ \Delta^* = q_1^* (e_2^* k_3^* + e_3^* k_2^*) - q_2^* (e_3^* k_1^* + e_1^* k_3^*), \\ e_i^* = q_i^{*2} s_i^* - a^* s_i^* - 1 \quad (i = 1, 2), \quad e_3^* = i\xi q_3^* \left[1 - \frac{\lambda}{\rho_1^2} \right], \\ k_i^* = \frac{2\mu}{\rho_1^2} (i\xi q_i^* s_i^*) \quad (i = 1, 2), \quad k_3^* = \frac{\mu}{\rho_1^2} (q_3^{*2} + \xi^2), \\ s_i^* = -\frac{R_{22} - q_i^{*2}}{R_{21}} \quad (i = 1, 2). \end{array} \right. \quad (57)$$

当移动荷载沿法向作用时(情况1), Δ_i^* ($i = 1, 2, 3$) 的值为

$$\Delta_1^* = F_0 q_2^* k_3^*, \quad \Delta_2^* = -F_0 q_1^* k_3^*, \quad \Delta_3^* = F_0 [q_2^* k_1^* - q_1^* k_2^*]. \quad (58)$$

当移动荷载沿切向作用时(情况2), 在方程(50)~(54)的解中, 只需将 Δ_i^* ($i = 1, 2, 3$) 替换为

$$\Delta_1^* = F_0 q_2^* e_3^*, \quad \Delta_2^* = -F_0 q_1^* e_3^*, \quad \Delta_3^* = F_0 [q_1^* e_2^* - q_2^* e_1^*]. \quad (59)$$

特殊情况II

如果忽略了介质的热扩散影响, 则弹性介质中相应的位移分量和应力的表达式为

$$\alpha_{zz} = e_1 B_3 e^{-q_1 z} + e_2 B_4 e^{-q_2 z}, \quad (60)$$

$$\alpha_{zx} = k_1 B_3 e^{-q_1 z} - k_2 B_4 e^{-q_2 z}, \quad (61)$$

$$u_x = - (i\xi) B_3 e^{-q_1 z} + q_2 B_4 e^{-q_2 z}, \quad (62)$$

$$u_z = - q_1 B_3 e^{-q_1 z} + i\xi B_4 e^{-q_2 z}, \quad (63)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \sqrt{p^2 + \xi^2}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{p^2}{a_2} + \xi^2}, \\ B_{i+2} = \Delta' / (p - i\xi Y) \Delta' \quad (i = 1, 2), \quad \Delta' = - (e_1' k_2 + e_2' k_1), \\ e_1 = q_1'^2 - a^*, \quad e_2 = i\xi q_2' \left[1 - \frac{\lambda}{\rho_1^2} \right], \\ k_1 = \frac{2\mu}{\rho_1^2} (i\xi q_1'), \quad k_2 = \frac{\mu}{\rho_1^2} (\xi^2 + q_2'^2). \end{array} \right. \quad (64)$$

当荷载沿法向移动时(情况1), Δ_i' ($i = 1, 2$) 的值为

$$\Delta_1 = F_0 k_2, \quad \Delta_2 = F_0 k_1. \quad (65)$$

当荷载沿切向移动时(情况2),在方程(60)~(63)的解中,仅需将 $\Delta_i (i = 1, 2)$ 替换为

$$\Delta_1 = F_0 e_2, \quad \Delta_2 = -F_0 e_1. \quad (66)$$

4 逆变换

方程(40)~(46)、(50)~(54)和(60)~(63)定义了变换后的位移、应力、温度场、浓度和化学势,是 z 、Laplace 变换参数 p 、Fourier 变换参数 ξ 的函数,记为 $f(\xi, z, p)$. 为了得到物理域中的函数 $f(x, z, t)$, 首先利用 Fourier 逆变换

$$f(x, z, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(\xi, z, p) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos(\xi x) f_e - i \sin(\xi x) f_o \right\} d\xi \quad (67)$$

其中 f_e 和 f_o 分别为函数 $f(\xi, z, p)$ 的偶部和奇部.

因此,表达式(67)给出了函数 $f(x, z, t)$ 的 Laplace 变换 $f(x, z, p)$.

若在表达式(67)中固定 ξ, x 和 z 的值,则 $f(x, z, p)$ 相当于函数 $g(t)$ 的 Laplace 变换 $g(p)$. 根据 Honig 和 Hirdes^[23] 的做法, Laplace 变换函数 $g(p)$ 可以如下进行逆变换.

函数 $g(t)$ 如下得到

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} g(p) dp, \quad (68)$$

其中 C 是一个任意实数,它大于 $g(p)$ 所有奇点的实部. 取 $p = C + iz$, 有

$$g(t) = \frac{e^{Ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} g(C + iz) dz. \quad (69)$$

令 $e^{-Ct} g(t)$ 为 $h(t)$, 并在 $[0, 2L]$ 中展开为 Fourier 级数,得到近似公式

$$g(t) = g_{\infty}(t) + E_D, \quad (70)$$

其中

$$\begin{cases} g_{\infty}(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k, & 0 \leq t \leq 2L, \\ C_k = \frac{e^{-Ct}}{L} \operatorname{R} \left[e^{(ik\pi t)/L} g \left(C + \frac{ik\pi}{L} \right) \right]. \end{cases} \quad (71)$$

E_D 为离散误差,可通过取充分大的 C , 使其达到任意小. C 和 L 的值,可根据 Honig 和 Hirdes 在文献[23]中提出的判别要求确定.

因方程(71)中的无限级数,可以仅对有限的 N 项作和,得到 $g(t)$ 的近似值为

$$g_N(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^N C_k, \quad 0 \leq t \leq 2L. \quad (72)$$

我们引入截断误差 E_T , 还必须加入离散误差,利用上述公式,形成估计 $g(t)$ 的总近似误差. 我们用两种方法来减少总误差:利用‘Korrektur’-方法来减少离散误差^[23], 然后用‘ ϵ 算法’来减少截断误差,并加速收敛.

用以估计函数 $g(t)$ 误差的‘Korrektur’-方法公式为

$$g(t) = g_{\infty}(t) - e^{-2CL} g_{\infty}(2L + t) + E'_D, \quad (73)$$

其中

$$|E'_D| \ll |E_D|. \quad (74)$$

则 $g(t)$ 的近似值为

$$g_{N_k}(t) = g_N(t) - e^{-2CL} g_N(2L + t), \quad (75)$$

其中 N' 为整数, 且 $N' < N$.

我们现在讨论 ϵ 算法, 可以加速方程(72)中级数的收敛. 设 N 为自然数, $S_m = \sum_{k=1}^m C_k$ 是方程(72)的部分和序列. 定义 ϵ 序列为

$$\epsilon_{0,m} = 0, \epsilon_{1,m} = S_m,$$

$$\epsilon_{n+1,m} = \epsilon_{n-1,m+1} + \frac{1}{\epsilon_{n,m+1} - \epsilon_{n,m}} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots).$$

Honig 和 Hirdes 在文献[23]中表明, 序列 $\epsilon_{1,1}, \epsilon_{3,1}, \dots, \epsilon_{N,1}$ 收敛于 $g(t) + ED - C\theta/2$, 较部分和序列 $S_m (m = 1, 2, 3, \dots)$ 收敛更快. 方程(75)的 Laplace 逆变换的实际步骤, 和 ϵ 算法联合进行.

逆变换的最后一步是估计积分(67). 可利用带自适应步长的 Romberg 积分来进行. 该方法利用了扩展梯形法则, 当步长趋于 0 时极限结果的外推, 使结果得到了连续的精炼. 详细过程请见参考文献[24].

5 数值结果和讨论

为了画出问题的图形, 我们给出某些数值结果. 选用铜作为数值计算的材料, 采用 Thomas 在文献[25]中提供的国际单位制表示的物理参数

$$T_0 = 293 \text{ K}, \rho = 8954 \text{ kg/m}^3, \tau_0 = 0.02 \text{ s}, \tau = 0.2 \text{ s},$$

$$C_E = 383.1 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}, \alpha_t = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, K = 386 \text{ W/(m}\cdot\text{K)},$$

$$\lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ kg/(m}\cdot\text{s}^2), \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ kg/(m}\cdot\text{s}^2),$$

$$\alpha_c = 1.98 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}, D = 0.85 \times 10^{-8} \text{ kg}\cdot\text{s/m}^3,$$

$$a = 1.2 \times 10^4 \text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K}), b = 0.9 \times 10^6 \text{ m}^5/(\text{kg}\cdot\text{s}^2).$$

在 $0 \leq x \leq 10$ 中, $z = 1.0$ 时, 计算了无量纲速度 $V (= V/c_1) = 10, 20$ 两种情况. 对于热弹性扩散固体 (THED)、热弹性固体 (THE) 和弹性固体 3 种不同情况, 在法向和切向移动荷载作用下, 给出了物理域中, 无量纲法向位移 $u_z (= u_z/F_0)$ 、法向应力 $\sigma_z (= \sigma_z/F_0)$ 、温度 $\Theta (= \Theta/F_0)$ 和浓度 $C (= C/F_0)$ 的准确解. 场变量随距离 x 的变化绘于图 1~ 图 8 中, 计算针对无量纲时间 $t = 1.0$ 进行 (此处无量纲场变量略去了上角星号).

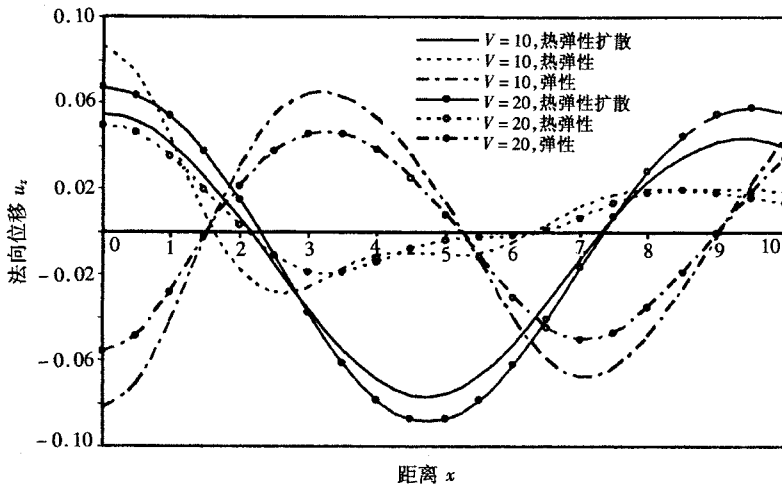


图 1 法向位移 u_z 随距离 x 的变化(法向荷载)

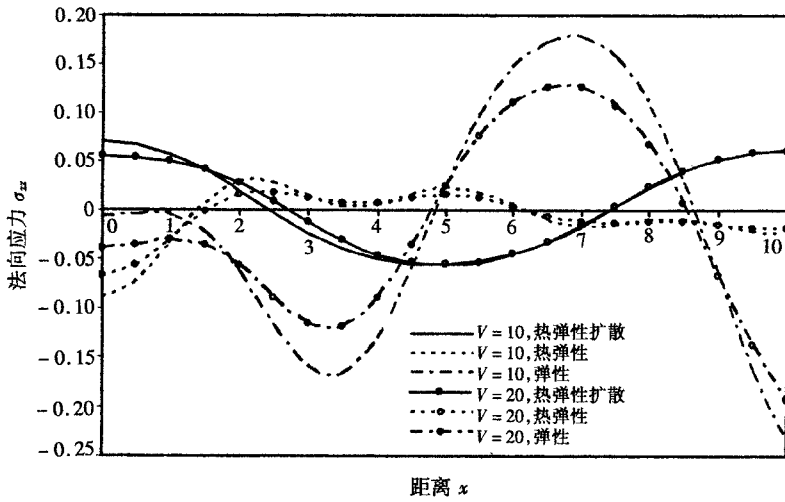


图2 法向应力 σ_x 随距离 x 的变化(法向荷载)

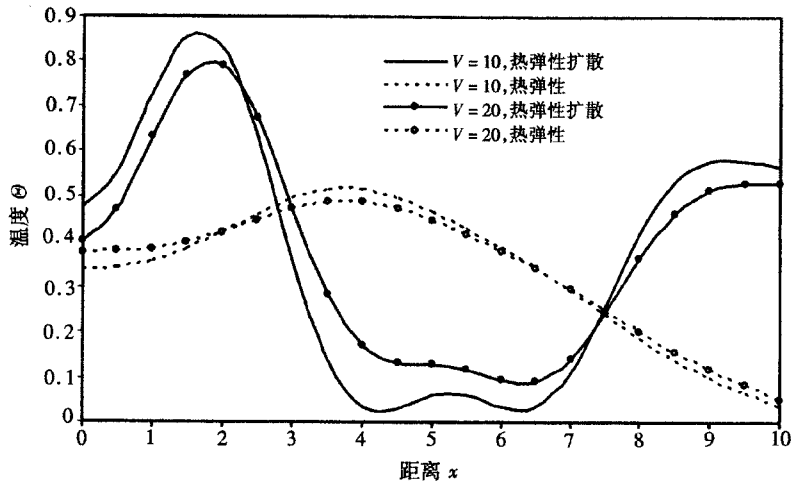


图3 温度 θ 随距离 x 的变化(法向荷载)

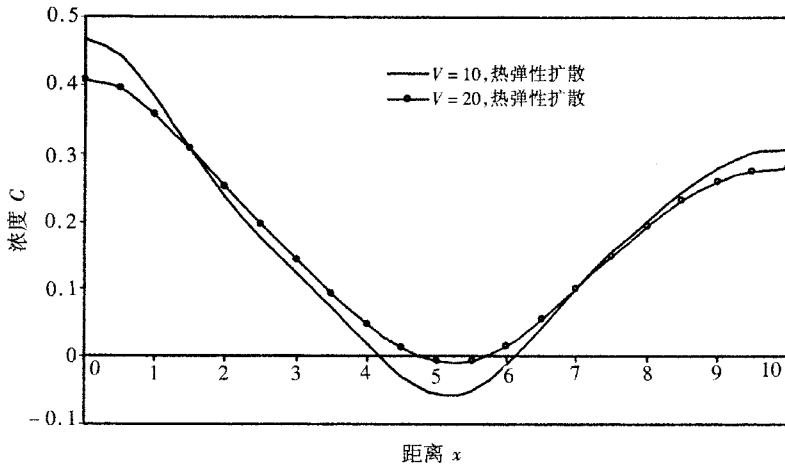
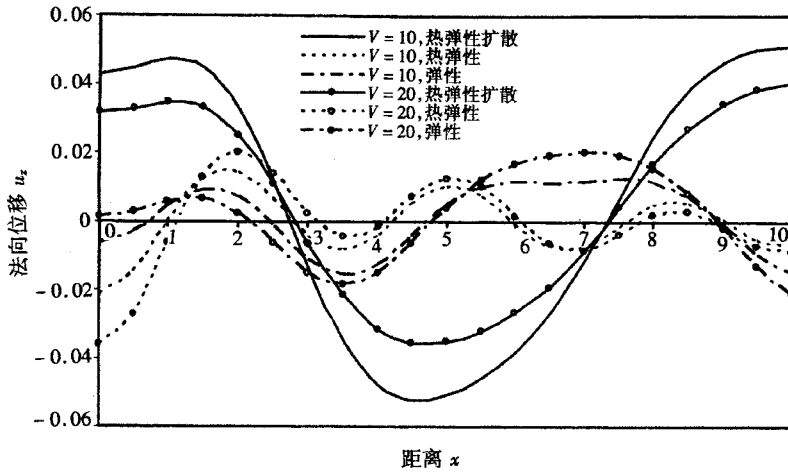
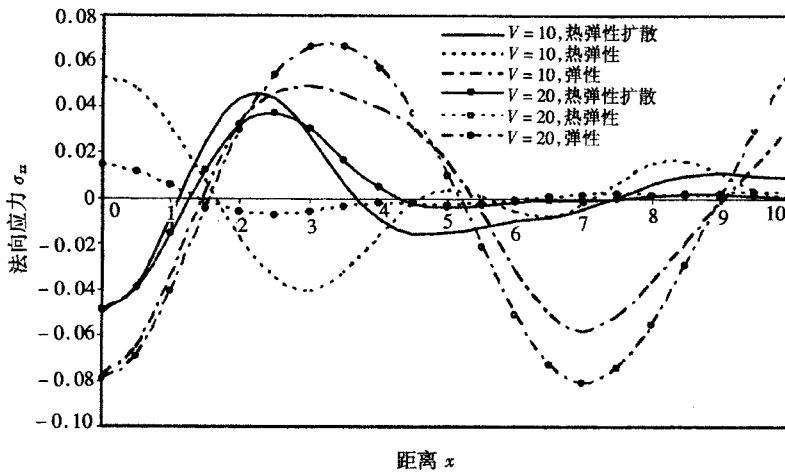


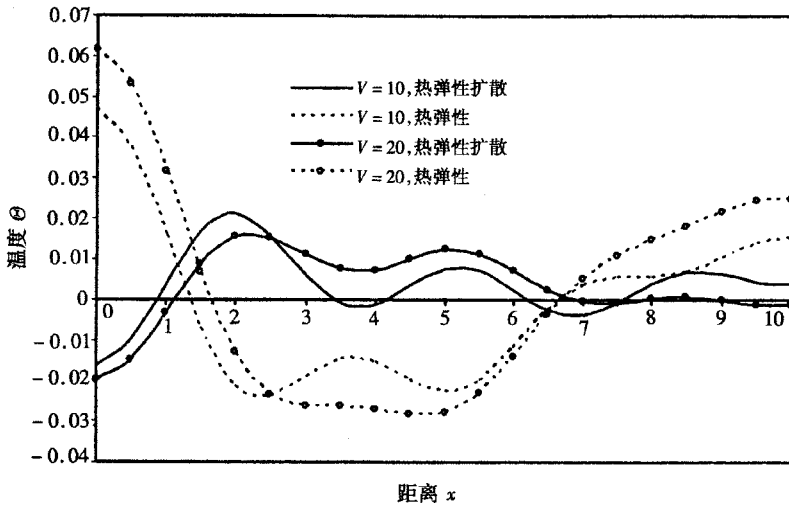
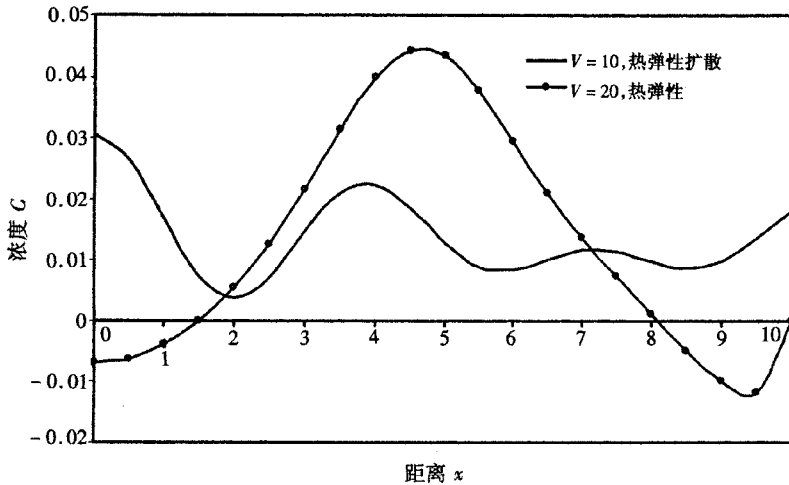
图4 浓度 C 随距离 x 的变化(法向荷载)

情况I 法向荷载作用

无量纲法向位移 u_z 、法向应力 σ_z 、温度 Θ 和浓度 C ，在 3 种不同情况下的比较示于图 1~图 4。在两种速度下，法向位移 u_z 随距离 x 的变化，对 THED 和 THE 理论，实质上是相似的。而弹性理论情况却与此两种理论是对立的，见图 1。在非常靠近荷载作用点处，THED 和 THE 理论的法向位移值大于弹性理论情况。由于扩散效应，THED 理论的变化范围大于 THE 理论情况。图 2 示出两种速度下，3 种理论的法向应力 σ_z 的变化，在相同的取值范围内进行了比较，其中 THE 理论中的数值已除以了 10。这表明，介质中的扩散效应是显著的。由图 2 还可看出，对任意的确定点和确定速度，3 组曲线间的差别是明显的。

图 5 法向位移 u_z 随距离 x 的变化(切向荷载)图 6 法向应力 σ_z 随距离 x 的变化(切向荷载)

在 2 种速度下，对于 THED 和 THE 两种理论的温度分布，示于图 3。两种速度下，THED 理论的温度变化值与 THE 理论相比非常小，因此将原计算值乘上了 10^2 。显然，热弹性介质中的扩散，对介质中的温度分布有着非常重要的影响。无扩散的热弹性介质中， Θ 的变化非常平滑，而在有扩散的热弹性介质中， Θ 的变化更为振荡，THED 理论的浓度分布示于图 4。为了更好地显示出浓度分布，对两种速度情况的浓度值都乘上了 10^4 。在特定点上，两种不同速度时的浓度 C 的差别，从图上可以一目了然。

图7 温度 Θ 随距离 x 的变化(切向荷载)图8 浓度 C 随距离 x 的变化(切向荷载)

情况 II 切向荷载作用

3种不同理论和两种速度下,无量纲法向位移 u_z 、法向应力 α_z 、温度 Θ 和浓度 C 的比较示于图5~图8. 两种速度下, THED 理论下法向位移的变化与 THE 理论和弹性理论情况正好相反(见图5). 所有理论的数值结果位于 -0.06 到 0.06 的范围内, 并具有振荡性质. THED 理论的变化范围较 THE 理论的更大, 这证明了扩散质量的作用. α_z 的变化情况示于图6. 速度 $V=20$ 时, THE 理论下的原值除了以10. 变化初期, THE 理论的法向应力与 THED 理论和弹性理论情况相反. 图7示出两种理论下温度 Θ 的性态. 由于 THED 理论中的扩散作用, 温度值非常小. 因此, 图中对两种速度下, THED 理论的温度变化, 在原值上乘了10. 可以看出, 在两种速度下, 两种理论的温度变化趋势正好相反. 为便于图中显示, THED 理论下浓度 C 的变化, 也在原值上乘了 10^4 . 可以看出, 速度 $V=10$ 时, 浓度随距离的变化曲线处于正数区域, 而当 $V=20$ 时, 其变化曲线在正数区域和负数区域间变化.

结论 移动荷载(法向和切向)作用的物体内部, 其法向位移、法向应力分量、温度和浓度的发展情况分析, 是令人感兴趣的力学问题. 该问题可以应用于确定介质的稳定性. 可以看出,

荷载速度的变化,对法向位移、法向应力、温度和浓度有明显影响. 扩散和热力学参数也会显著影响这些物理量. 特征值逼近法,在求解耦合形式的矩阵方程上占有优势,而势函数逼近法要求方程是解耦的. 本文方法可以在宽广的热力学问题中得到广泛的应用. 本文的理论结果,为实验科学家、研究人员及地震物理工作者,在研究这方面的课题时,提供了重要的信息.

[参 考 文 献]

- [1] Biot M. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. Journal of Applied Physics, 1956, **27**: 240-253.
- [2] Lord H, Shulman Y. A Generalized thermodynamical theory of thermoelasticity[J]. J Mech Phys Solids, 1967, **15**: 299-309.
- [3] Dhaliwal R, Sherief H. Generalized thermoelasticity for an isotropic media[J]. Quart Appl Math, 1980, **33**: 1-8.
- [4] Sherief H. Fundamental solution of the generalized thermoelastic problem for small time[J]. J Thermal Stresses, 1986, **9**: 151-164.
- [5] Sherief H, Anwar M. Problem in generalized thermoelasticity[J]. J Thermal Stresses, 1986, **9**: 165-181.
- [6] Sherief H, Ezzat M. Solution of the generalized problem of thermoelasticity in the form of series of functions[J]. J Thermal Stresses, 1994, **17**: 75-95.
- [7] Sherief H, Anwar M. State space approach to two-dimensional generalized thermoelasticity problems[J]. J Thermal Stresses, 1994, **17**: 567-590.
- [8] Sinha A N, Sinha S B. Reflection of thermoelastic waves at a solid half-space with thermal relaxation[J]. J Phys Earth, 1974, **22**: 237-244.
- [9] Abd-Alla A N, Al-Dawry A A. The reflection phenomena of SV waves in a generalized thermoelastic medium[J]. Internat J Math Sci, 2000, **23**: 529-546.
- [10] Sharma J N, Kumar V, Chand D. Reflection of generalized thermoelastic waves from the boundary of a half-space[J]. J Thermal Stresses, 2003, **26**: 925-942.
- [11] Oriani R A. Thermomigration in solid metals[J]. J Phys Chem Solids, 1969, **30**: 339-351.
- [12] Fryxel R E, Aitken E A. High temperature studies of uranium in a thermal gradient[J]. J Nucl Mater, 1969, **30**: 50-56.
- [13] Nowacki W. Dynamic problems of thermoelastic diffusion in solids- I [J]. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences Serie des Sciences Techniques, 1974, **22**: 55-64.
- [14] Nowacki W. Dynamic problems of thermoelastic diffusion in solids- II [J]. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences Serie des Sciences Techniques, 1974, **22**: 129-135.
- [15] Nowacki W. Dynamic problems of thermoelastic diffusion in solids- III [J]. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences Serie des Sciences Techniques, 1974, **22**: 266-275.
- [16] Nowacki W. Dynamic problems of diffusion in solids[J]. Eng Frac Mech, 1976, **8**: 261-266.
- [17] Sherief H, Hamza F, Saleh H. The theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. Internat J Eng Sci, 2004, **42**: 591-608.
- [18] Singh B. Reflection of P and SV waves from free surface of an elastic solid with generalized thermodiffusion[J]. J Earth Syst Sci, 2005, **114**: 159-168.
- [19] Sherief H, Saleh H. A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. Internat J Solid Structures, 2005, **42**: 4484-4493.
- [20] Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 2006, **57**(2): 350-366.

- [21] Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder[J]. Internat J Mathematics and Mathematical Sci, 2006, **2006**: 123-137.
- [22] Verrujit A, Cordova C. Moving loads on an elastic half plane with hysteretic damping[J]. J Appl Mech, 2001, **68**: 915-922.
- [23] Honig G, Hirdes U. A method for the numerical inversion of the Laplace transform[J]. J Comp Appl Math, 1984, **10**: 113-132.
- [24] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes in FORTRAN [M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [25] Thomas L Fundamentals of Heat Transfer [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1980.

Two-Dimensional Interactions Due to Moving Load in Generalized Thermoelastic Solid With Diffusion

Sunita Deswal¹, Suman Choudhary²

(1. Department of Mathematics, Guru Jambheshwar University of Science and Technology, Hisar 125001, Haryana, India;

2. Department of Mathematics, Govt. College, Nalwa (Hisar) 125037, Haryana, India)

Abstract: Disturbances in a homogeneous, isotropic elastic medium with generalized thermoelastic diffusion, when a moving source is acting along one of the co-ordinate axis on the boundary of the medium, are investigated. Eigen value approach was applied to study the disturbance in Laplace-Fourier transform domain for a two dimensional problem. The analytical expressions for displacement components, stresses, temperature field, concentration and chemical potential were obtained in the physical domain by using a numerical technique for the inversion of Laplace transform based on Fourier expansion techniques. These expressions were calculated numerically for a copper like material and depicted graphically. As special cases, the results in generalized thermoelastic and elastic media were obtained to depict the diffusion and thermal effects in the medium theoretically and numerically.

Key words: eigen value approach; vector matrix differential equation; thermoelastic diffusion; generalized thermoelasticity; moving load; Laplace and Fourier transforms