

三维四向编织复合材料刚度和强度的理论预测*

李典森, 卢子兴, 卢文书

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

(岳珠峰推荐)

摘要: 以单胞模型为基础, 将三维四向编织复合材料中相同走向的纤维束视为单向复合材料, 利用桥联模型确定了单向复合材料的柔度矩阵, 再将具有不同材料主向的单向复合材料的刚度矩阵通过体积平均, 得到了三维四向编织复合材料的总体刚度矩阵, 从而得到其工程弹性常数. 然后, 以单向复合材料为基础, 基于等应变假设和桥联模型, 确定出材料内各组分(纤维束和基体)的细观应力分布, 且对纤维束采用 Hoffman 失效准则, 对基体采用 Mises 失效准则, 预报了三维四向编织复合材料的拉伸强度.

关键词: 三维编织; 强度; 刚度; 力学性能; 复合材料

中图分类号: TB332; V258 **文献标识码:** A

引 言

三维编织复合材料作为一种高性能结构材料, 克服了传统层合复合材料沿厚度方向的力学性能差、层间剪切强度低、易分层等致命缺点, 因此, 在航天、航空等领域具有广泛的应用前景.

近年来, 国内外发表了不少关于三维编织复合材料力学性能理论预测的文章, 但主要集中于材料的刚度方面^[1-3], 对于强度方面的研究仍处于探索阶段. 孙慧玉等人^[4]曾以修正的经典层合板模型为基础, 采用蔡-胡多项式失效准则, 讨论了三维编织复合材料的强度. 卢子兴等人^[5]在实验研究和有限元分析基础上, 提出了一种经验性强度失效判据, 从而数值预报了三维编织复合材料的强度. Gu^[6]则基于对三维编织物纱线轨迹及预制件细观结构的数学描述, 预测了三维编织预制件在拉伸变形下的应力-应变曲线. 最近, 左惟炜等人^[7]以 Tsai-Wu 强度准则的二阶表现形式为基础, 提出了一种计算三维编织复合材料纵向拉伸强度的方法. 董纪伟等人^[8]则从均匀化理论出发, 给出了求解三维编织复合材料细观应力的数学表达式, 通过有限

* 收稿日期: 2007-08-29; 修订日期: 2008-01-07

基金项目: 航空科学基金资助项目(04B51045); 北京市教育委员会共建项目建设计划资助项目(XK10006052)

作者简介: 李典森(1978—), 男, 博士生(Tel: + 86 10-82317507; Fax: + 86 10-82328501;

E-mail: lidiansen@163.com);

卢子兴(联系人, E-mail: luzixing@263.net).

元方法对三维编织复合材料的细观应力场进行了数值模拟。

考虑到黄争鸣提出的桥联模型^[9-10]不仅可用于预测单向、层合等纺织复合材料的弹性性能,而且对于材料的强度问题也有较好的预测结果,所以受此启发,本文将三维四向编织复合材料中相同走向的纤维束视为单向复合材料,对具有不同材料主向的单向复合材料,采用细观力学的分析方法并结合桥联模型,理论预报了三维四向编织复合材料的刚度和强度。

1 单胞模型

三维四向编织复合材料的内部由4个内部单胞组合而成,表面由两个表面单胞组合而成,棱角处为角单胞。图1所示为三维四向编织复合材料的单胞模型图。

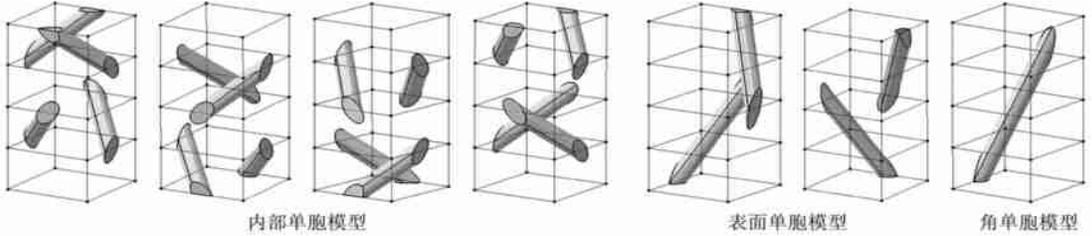


图1 单胞模型

为推导有关编织工艺参数之间的关系,提出如下假设:1)所有纱线的横截面均为椭圆形,短轴为 d ,横截面变形因子为 k ,沿长度方向均匀。2)编织过程稳定,编织结构均匀,纱线处于挤紧状态。3)所有纱线具有相同的纱线填充因子 ε 。

三维四向编织复合材料的内部编织角 γ 、表面编织角 β 、棱角编织角 θ 以及编织角 α 之间的关系为:

$$\tan \gamma = \frac{1}{\sin \varphi} \tan \alpha = \frac{4}{\sin 2\varphi \sqrt{\sec^2 \varphi + 1}} \tan \beta = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 2\varphi} \tan \theta, \quad (1)$$

φ 为编织纱线在横截面上的投影和预制件厚度方向的夹角。在理想状态下, φ 为 45° 。

三维四向编织复合材料的纤维体积含量为内部、表面和棱角区域的纤维体积含量与所占的百分比之积的和,即:

$$V_f = C_i V_i + C_s V_s + C_c V_c, \quad (2)$$

式中, V_i 、 V_s 和 V_c 分别为内部、表面和棱角区域的纤维体积含量。它们的具体计算公式如下:

$$V_i = \frac{\pi k \sin 2\varphi}{8 \cos \gamma} \varepsilon, \quad (3)$$

$$V_s = \frac{\pi k \cos \varphi}{4 \cos \beta} \varepsilon, \quad (4)$$

$$V_c = \frac{3\pi k}{16 \cos \theta} \varepsilon. \quad (5)$$

C_i 、 C_s 、 C_c 分别为内部、表面和棱角区域占整个结构的比例,具体计算公式如下:

$$C_i = \frac{2(P-1)(Q-1)/\sin 2\varphi}{[(P-1)/\sin \varphi + 2][(Q-1)/\cos \varphi + 2]}, \quad (6)$$

$$C_s = \frac{[2(P-1) + 2(Q-1)]/\cos \varphi}{[(P-1)/\sin \varphi + 2][(Q-1)/\cos \varphi + 2]}, \quad (7)$$

$$C_c = \frac{4}{[(P-1)/\sin \varphi + 2][(Q-1)/\cos \varphi + 2]}, \quad (8)$$

式中, P, Q 为主体纱线的行、列数. 在挤紧状态下, $k = \sqrt{3}\cos\gamma$, 因此, 若给定材料的纤维体积含量, 可确定出纱线填充因子 ε .

2 弹性性能

假设纤维束为横观各同性材料, 单根纤维束的刚度矩阵与柔度矩阵有如下关系: $C_f = S_f^{-1}$, 其中, 柔度矩阵的具体表达式参见文献[11].

在三维四向编织复合材料内, 相同走向的所有纤维束可视为一个单向复合材料, 根据单胞模型, 三维四向编织复合材料共有 12 种走向的单向复合材料. 根据黄争鸣^[10]的桥联模型, 在单向复合材料内纤维束和基体所承受的应力增量之间有如下关系:

$$d\sigma_i^m = A d\sigma_j^f, \tag{9}$$

其中, A 为桥联矩阵.

对于单向复合材料, 桥联矩阵的表达式可由文献[10]确定为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

式中, $a_{11} = E^m/E_1^f$, $a_{12} = a_{13} = (S_{12}^f - S_{12}^m)(a_{11} - a_{22})/(S_{11}^f - S_{11}^m)$, $a_{21} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 0$, $a_{22} = a_{33} = \alpha + (1 - \alpha)E^m/E_2^f$ ($0 < \alpha < 1$), $a_{44} = \beta + (1 - \beta)G^m/G_{23}^f$ ($0 < \beta < 1$), $a_{55} = a_{66} = \gamma + (1 - \gamma)G^m/G_{12}^f$ ($0 < \gamma < 1$), 其中, α, β, γ 为桥联参数, 可以根据试验测试得到的横向模量和剪切模量来调节桥联参数的取值.

图 2 给出了材料局部坐标和整体坐标间的关系. 根据三维应力状态下桥联矩阵与单向复合材料柔度矩阵的关系, 若给定桥联矩阵, 可以确定出单向复合材料在局部坐标系下的柔度矩阵为

$$S_n = (V_f^n S_f + V_m^n S_m A)(V_f^n I + V_m^n A)^{-1}, \tag{11}$$

式中, V_f^n 为不同单向复合材料内的纤维体积含量, V_m^n 为不同单向复合材料内基体的体积含量 ($V_m^n = 1 - V_f^n$), S_f, S_m 为纤维和基体的柔度矩阵, I 为单位矩阵. 不同走向单向复合材料内的纤维体积含量可由下式确定:

$$V_f^{11} = V_f^{12} = V_f^{13} = V_f^{14} = \sqrt{3}\pi\varepsilon/8, \tag{12}$$

$$V_f^{s1} = V_f^{s2} = V_f^{s3} = V_f^{s4} = \sqrt{6}\pi\varepsilon\cos\gamma/(8\cos\beta), \tag{13}$$

$$V_f^{c1} = V_f^{c2} = V_f^{c3} = V_f^{c4} = 3\sqrt{3}\pi\varepsilon\cos\gamma/(16\cos\theta). \tag{14}$$

因此, 在局部坐标系下, 单向复合材料的刚度矩阵为 $C_n = S_n^{-1}$, 而每一种单向复合材料在空间中都可用 1 个唯一的纤维取向角来表征, 在四向编织复合材料中 12 种纤维取向角分别为: $(\gamma, \varphi), (\gamma, -\varphi), (-\gamma, -\varphi), (-\gamma, \varphi), (\beta, \varphi), (\beta, -\varphi), (-\beta, -\varphi), (-\beta, \varphi), (\theta, \varphi), (\theta,$

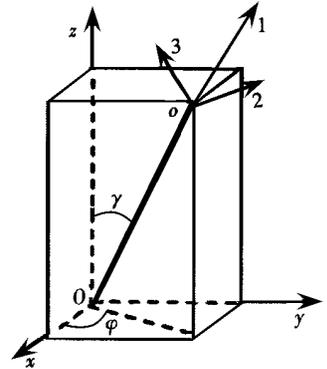


图 2 局部坐标与整体坐标的关系

$-\varphi)$ 、 $(-\theta, -\varphi)$ 、 $(-\theta, \varphi)$ 。将局部坐标系下不同走向的单向复合材料的刚度矩阵进行空间坐标转换, 可得到不同单向复合材料在总体坐标系下的刚度矩阵, 即

$$C_n = T_{\sigma_n} C_n^T T_{\sigma_n}^T. \quad (15)$$

式中, T_{σ} 为应力转换张量, 具体表达式可见文献[12]。

再对总体坐标系下不同单向复合材料的刚度矩阵进行体积平均, 可得到材料在总体坐标系下的刚度矩阵, 即

$$C = \sum_{n=1}^4 V_n C_n, \quad (16)$$

其中, V_n 为各单向复合材料占总体材料的体积分数, 即

$$V_{11} = V_{12} = V_{13} = V_{14} = \frac{(P-1)(Q-1)}{2[\sqrt{2}(P-1) + 2][\sqrt{2}(Q-1) + 2]}, \quad (17)$$

$$V_{s1} = V_{s2} = V_{s3} = V_{s4} = \frac{\sqrt{2}[(P-1) + (Q-1)]}{2[\sqrt{2}(P-1) + 2][\sqrt{2}(Q-1) + 2]}, \quad (18)$$

$$V_{c1} = V_{c2} = V_{c3} = V_{c4} = \frac{1}{[\sqrt{2}(P-1) + 2][\sqrt{2}(Q-1) + 2]}. \quad (19)$$

三维四向编织复合材料的柔度矩阵可由刚度矩阵求逆得到, 即 $S' = C^{-1}$, 从而, 通过工程弹性常数与柔度矩阵元素的关系, 可以确定出材料的工程弹性常数。

3 强度分析

材料在轴向拉伸载荷作用下应力为 $\sigma_i = \{\sigma_x, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$, 材料的总体应力-应变关系为: $\sigma_i = C\xi$, 其中 ξ 为整体复合材料的应变。假设材料内不同走向的单向复合材料与整体复合材料具有相同的应变, 则在总体坐标系下, 复合材料的总体应力写为

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \left[\sum_{n=1}^4 V_n C_n \right] \xi = \\ &= (V_{11} C_{11}) \xi + (V_{12} C_{12}) \xi + \dots + (V_{c3} C_{c3}) \xi + (V_{c4} C_{c4}) \xi = \\ &= \sigma_{i11} + \sigma_{i12} + \dots + \sigma_{ic3} + \sigma_{ic4}. \end{aligned} \quad (20)$$

因此, 不同走向的每一单向复合材料在总体坐标系下的应力可以确定为

$$\sigma_{in} = V_n C_n \xi. \quad (21)$$

根据 Huang^[10] 的桥联模型, 在局部坐标系下, 给定单向复合材料组分性能参数及纤维体积含量, 可确定出单向复合材料组分内纤维束所受的应力 σ_{in}^f 和基体所受应力 σ_{in}^m , 即

$$\sigma_{in}^f = (V_f^n I + V_m^n A)^{-1} \sigma_{jn} = B \sigma_{jn}, \quad (22)$$

$$\sigma_{in}^m = A(V_f^n I + V_m^n A)^{-1} \sigma_{jn} = AB \sigma_{jn}, \quad (23)$$

式中, σ_{jn} 为不同走向单向复合材料在局部坐标系下的应力。因此, 将式(21)中单向复合材料在总体坐标系下的应力转换到局部坐标系下, 并代入(22)和(23)式中, 可得到局部坐标系下, 不同走向单向复合材料内纤维束组分所承受的应力为

$$\sigma_{in}^f = B(T_{\sigma_n}^{-1})^T \sigma_{in}, \quad (24)$$

基体组分所承受的应力为

$$\sigma_{in}^m = AB(T_{\sigma_n}^{-1})^T \sigma_{in}. \quad (25)$$

由于纤维束本身也是单向复合材料, 具有横观各向同性的性质, 采用霍夫曼(Hoffman)失效准则进行校核, 它的具体形式为

$$C_1(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_3(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\tau_{23}^2 + C_8\tau_{31}^2 + C_9\tau_{12}^2 = 1, \quad (26)$$

式中, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$ 的具体计算公式详见文献[5].

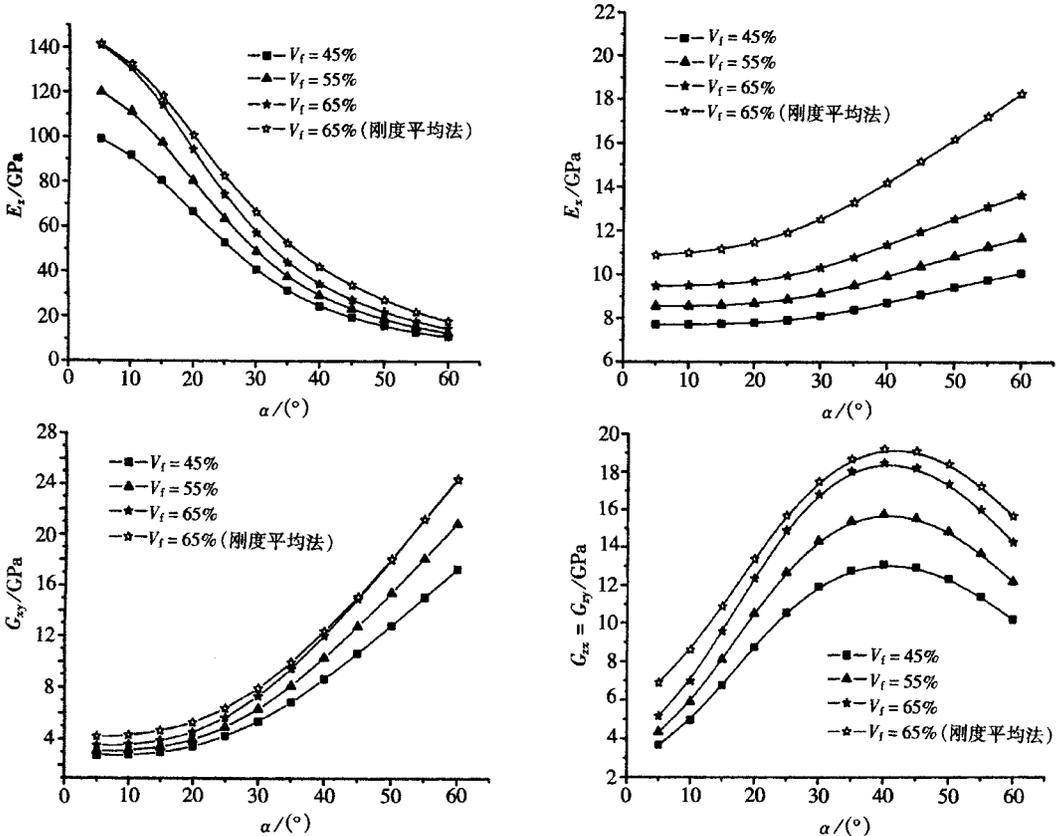
对各向同性的基体, 采用 Mises 失效准则进行校核, 具体形式为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) = 2\sigma_m^2. \quad (27)$$

当材料内基体所受应力满足 Mises 失效准则时, 则认为基体发生局部屈服破坏, 但对整体复合材料的承载能力影响不大. 本文以三维四向编织材料的表面纤维束所受应力满足失效准则时, 认为材料失去承载能力, 施加于材料的外力即为编织复合材料的拉伸强度. 通过计算表明, 随外加载荷的逐渐增加, 材料的内部纤维束首先发生断裂, 其次, 材料的表面纤维束发生断裂, 而棱角上的纤维束最后发生断裂. 当材料的内部纤维束发生断裂时, 认为整体复合材料内部发生了损伤, 承载能力下降, 但材料仍能继续承受载荷, 实验现象也表明^[13], 材料在承载断裂过程中, 确实存在一定的损伤积累过程.

4 计算结果和讨论

复合材料组分碳纤维 T300 性能取为: $E_{f1} = 220 \text{ GPa}$, $E_{f2} = 13.8 \text{ GPa}$, $G_{f12} = 9 \text{ GPa}$, $\mu_{f12} = 0.2$, $\mu_{f23} = 0.25$, $\sigma_f = 3 \text{ GPa}$, $\bar{\sigma}_f = 2.07 \text{ GPa}$, $\tau_f = 943 \text{ MPa}$. 环氧树脂性能取为: $E_m = 4.5 \text{ MPa}$; $\mu_m = 0.34$; $\sigma_m^* = 70.6 \text{ MPa}$; $\sigma_m = 80 \text{ MPa}$; $\bar{\sigma}_m = 79 \text{ MPa}$; $\varepsilon_{mu} = 1.7\%$; $\tau_m = 46 \text{ MPa}$, 上面各符号的含义与文献[5] 相同. 而桥联参数取 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$.



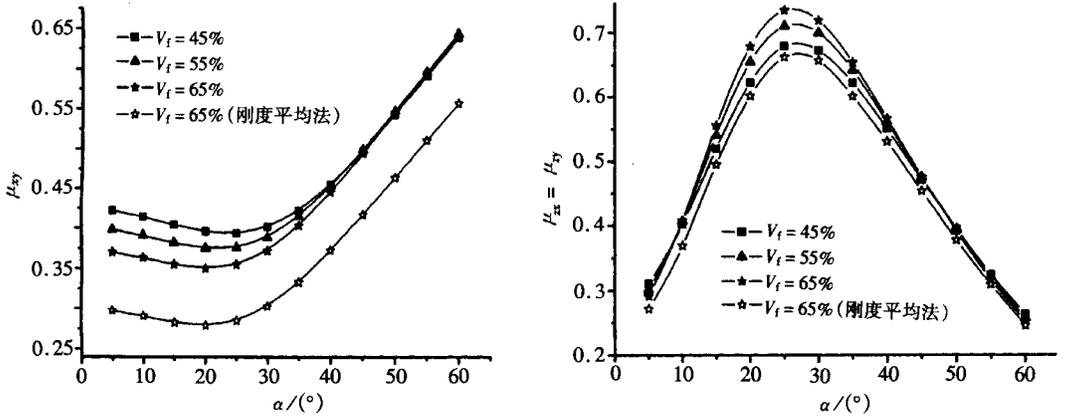


图3 弹性常数随编织角和纤维体积分含量的变化

图3为计算得到的三维四向编织复合材料的弹性常数随编织角和纤维体积分含量的变化趋势图,同时采用文献[11]的刚度平均化方法,给出了 V_f 为65%的计算结果作为对比.可见,本文模型的预测与刚度平均化方法的预测结果相比,在变化趋势上基本一致,在数值上,除 E_x 和 μ_{xy} 具有一定差异外,其余的弹性常数都相差不大.此外,与文献[12]的预测结果进行对比,也可得到类似结论,这说明了本文模型对材料弹性性能预测的有效性,关于弹性常数变化趋势的具体描述这里不再赘述.

图4给出了三维四向编织复合材料的强度随编织角和纤维体积分含量的变化趋势,同时也给出与文献[5]有限元预测结果的对比.可见,编织角 α 对材料的强度有较大的影响,强度随编织角的增大而减小,当 α 小于 30° 时,强度的下降基本呈线性变化,强度下降的速率也较大;当 α 大于 30° 时,材料的强度随编织角的增大呈现非线性变化,强度下降的速率逐渐减小,而当 α 大于 40° 时,强度的变化趋于平稳,变化很小.同时可见, α 一定时,材料的强度随纤维体积分含量 V_f 的增加而增大,并且在 α 较小时,对 V_f 的变化更敏感.此外,随着 α 的增大,强度随 V_f 的变化有逐渐减弱的趋势.上述结果虽然与有限元预测有一定偏差,但变化趋势是一致的.主要原因是,文献[5]的有限元模型较为简单,且其预测还依赖于宏观实验,故难以在较大的编织角范围给出有效的预测.

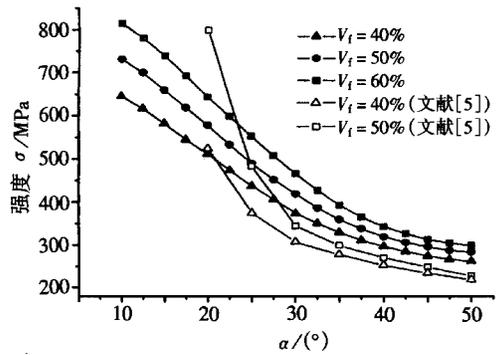


图4 强度随编织角及纤维体积分含量的变化

表1 预测值与实验结果的比较

编织结构	编织角 $\alpha / (^\circ)$	纤维体积分含量 $V_f / (\%)$	轴向弹性模量		误差 $e_E / (\%)$	拉伸强度		误差 $e_\sigma / (\%)$
			实验 E_x / GPa	预测 E_p / GPa		实验 σ_t / MPa	预测 σ_p / MPa	
4D	21	45	67.2	63.87	-4.96	665	543	-18.35
4D	42	58	28.7	28.17	-1.84	283	321	13.43
4D	48	45	22.4	22.98	2.59	254	267	5.12

为进一步验证本文模型的有效性,表1给出了三维四向编织复合材料的轴向弹性模量以及拉伸强度的理论预测与实验结果^[13]的对比.可见,材料轴向弹性模量的预测值与实验结果

吻合较好; 尽管材料强度的预测值与实验结果的误差稍大一些, 但也在工程允许范围内. 因此, 由图 3 和图 4 的讨论及表 1 中的数据可以看出, 本文模型对三维四向编织复合材料的刚度和强度性能的预测是合理的.

5 结 论

本文基于三维四向编织复合材料单胞模型, 采用细观力学的分析方法并结合桥联模型, 建立了一种预测三维四向编织复合材料刚度和强度的方法. 结果表明, 编织角和纤维体积含量是影响材料刚度和强度的重要因素; 本文建立的分析方法对三维四向编织复合材料的轴向弹性模量和强度的预测值与实验值吻合较好, 证明桥联模型在三维编织复合材料性能预测中具有一定的实用价值.

致谢 本文作者感谢北航博士创新基金对本文的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Ma C L, Yang J M, Chou T W. Elastic stiffness of three-dimensional braided textile structural composites[A]. ASTM, STP893. In: Composite Materials: Testing and Design [C]. Philadelphia: American Society for Testing Material, 1986, 404-421.
- [2] Chen L, Tao X M, Choy C L. Mechanical analysis of 3-D braided composites by the finite multiphase element method[J]. Composites Science and Technology, 1999, 59(3): 2383-2391.
- [3] SUN Xue-kun, SUN Chang-jie. Mechanical properties of three-dimensional braided composites[J]. Composite Structures, 2004, 65(3/4): 485-492.
- [4] 孙慧玉, 吴长春, 卞恩荣. 三维编织复合材料面内刚度和强度性能研究[J]. 复合材料学报, 1998, 15(4): 102-106.
- [5] 卢子兴, 刘振国, 麦汉超, 等. 三维编织复合材料强度的数值预报[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(5): 563-565.
- [6] GU Be-hong. Prediction of the uniaxial tensile curve of 4-step 3-dimensional braided perform[J]. Composite Structures, 2004, 64(2): 235-241.
- [7] 左惟炜, 肖来元, 廖道训. Tsai-Wu 准则用于三维编织复合材料矩形梁强度计算[J]. 华中科技大学学报, 2006, 34(12): 74-76.
- [8] 董纪伟, 孙良新, 洪平. 基于均匀化理论的三维编织复合材料细观应力数值模拟[J]. 复合材料学报, 2005, 22(6): 139-143.
- [9] HUANG Zheng-ming. A bridging model prediction of the ultimate strength of composite laminates subjected to biaxial loads[J]. Composites Science and Technology, 2004, 64(3/4): 395-448.
- [10] 黄争鸣. 复合材料细观力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [11] 李典森, 卢子兴, 陈利, 等. 三维六向编织复合材料弹性性能理论预测[J]. 复合材料学报, 2006, 23(4): 112-118.
- [12] 杨振宇, 卢子兴. 三维四向编织复合材料弹性性能的理论预测[J]. 复合材料学报, 2004, 21(2): 134-141.
- [13] 卢子兴, 冯志海, 寇长河, 等. 编织复合材料拉伸力学性能的研究[J]. 复合材料学报, 1999, 16(3): 129-134.

Theoretical Prediction of the Stiffness and Strength of Three-Dimensional and Four-Directional Braided Composites

LI Dian-sen, LU Zi-xing, LU Wen-shu

(School of Aeronautics Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: Based on unit cell model, the 3D 4-directional braided composites can be simplified as unidirectional composites with different local axial coordinate system and the compliance matrix of unidirectional composites can be defined utilizing the bridge model. The total stiffness matrix of braided composites can be obtained by the volume average stiffness of unidirectional composites with different local axial coordinate systems and the engineering elastic constants of braided composites were computed further. Based on the iso-strain assumption and the bridge model, the stress distribution of fiber bundle and matrix of different unidirectional composites can be determined and the tensile strength of 3D 4-directional braided composites was predicted by means of the Hoffman's failure criterion for the fiber bundle and Mises' failure criterion for the matrix.

Key words: 3D braiding; strength; stiffness; mechanical property; composites