应用数学和力学, 第 29 卷 第 1 期　　Applied Mathematics and Mechanics
2008 年 1 月 15 日出版　　Vol. 29, No. 1, Jan. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 01-0069-12　　应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

一类新的污染环境下具有时滞增长反应及脉冲输入的 Monod 恒化器模型的定性分析

孟新柱[1,2], 赵秋兰[2], 陈兰荪[1,3]

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;
2. 山东科技大学 理学院, 山东 青岛 266510;
3. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

(郭兴明推荐)

摘要: 考虑了一类新的污染环境下具有时滞增长反应及脉冲输入的Monod 恒化器模型 运用离散动力系统的频闪映射, 获得了一个 微生物灭绝 周期解, 进一步获得了该周期解全局吸引的充分条件 运用脉冲时滞泛函微分方程新的计算技巧, 证明了系统在适当的条件下是持久的, 结论还表明该时滞是 有害 时滞

关 键 词: 持久性; 脉冲输入; 恒化器模型; 增长反应时滞; 灭绝

中图分类号: O175　　文献标识码: A

引　言

恒化器是一个简单易于采用的用来培养微生物的实验装置 它被用做研究微生物的增长并有着对参数易于测量的优点 文献[1-2]研究了周期输入营养液的恒化器模型, 文献[3]研究了具有周期性的冲刷释放率的恒化器模型, 文献[4]研究了即具有周期输入又具有周期性的冲刷释放率的恒化器模型 但是, 关于恒化器模型的研究大都忽略了环境污染的情况 环境污染是由工业排污或者农业杀虫剂所造成, 是目前所面临的最重要的社会问题与生态问题之一 为了合理的应用和控制有毒物质, 我们必须评估种群所受有毒物质的损害程度 因此, 研究有害物质对微生物种群的影响, 并且找到一个能够测定微生物种群持久与灭绝的理论阈值是非常重要的 许多恒化器数学模型被建立, 并且获得了许多好的结果[1-29] 瞬时增长的动力学行为的价值在研究微生物对环境变化的适应性上具有重要价值, 并且在理解对微生物增长的控制装置的使用上是值得肯定的(见文献[7]) 虽然 Monod 模型[8]在描述定态增长率上获得了一定成功(见文献[9]和文献[5]), 但发现在恒化器实验中, 预知与测定关于不是全局吸引的平衡态上的初始值的瞬时情况时是不合适的 因为, 当环境变化时, 微生物会发生生长反应迟滞[10] 许多作者直接把时滞和所建模型方程结合起来, 结果是模型采取时滞微分方程的

收稿日期: 2007-09-05; 修订日期: 2007-12-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117; 10771179)
作者简介: 孟新柱(1972), 男, 山东定陶人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86-532-86057931; E-mail: mxz721106@sdust.edu.cn).

形式[11-22] 关于在恒化器建模中运用时滞微分方程的思想方法, 可以参考 MacDonald[23], Wolkowicz 和 Xia[19] 更多的细节也可以参考文献[5, 18-23] 最近几年, 微生物的连续培养在文献[24-26] 中都已经做了研究, 并且获得了一些有趣的结论 许多学者指出考虑周期干扰是必要的也是重要的, 因为那些考虑周期干扰的模型可以真实反映自然现象(例如, 洪水季节性泛滥, 动物季节性交配, 季节性收获) 与突然性的干扰相联系的系统是脉冲微分方程, 文献[30-31] 对此做了集中而且系统的研究 在文献[32-34] 中, 作者在种群动力学中引进脉冲微分方程, 并获得一些好的结果 关于脉冲干扰的恒化器模型的研究还太少(见参考文献[27-29, 35]) 但是, 这在生物数学上是一个有趣的问题

考虑到以上的论述, 把时滞增长反应, 脉冲输入营养液浓度以及脉冲输入有毒物质引进恒化器模型 当时滞微分方程被应用在恒化器模型的种群动力学中时, 一些实际的困难需要克服 注意到研究脉冲时滞微分方程的动力学行为要比常微分方程的动力学行为困难的多 结果是, 由于脉冲时滞微分方程理的论分析工具很少, 于是有关带有脉冲时滞的恒化器模型的定性研究的文献至今还没有见到 本文考虑了一类新的污染环境下具有时滞增长反应及脉冲输入的 Monod 恒化器模型, 并且研究培养基的脉冲干扰, 时滞增长反应以及有害物质的脉冲输入对恒化器系统的动力学行为有何影响

1 模型和预备知识

下面含有连续输入营养液的单种群 Monod 恒化器模型被陈介绍[36]:

$$\begin{cases} S(t) = (S_0 - S(t))D - \dfrac{{}_m S(t)x(t)}{(K_m + S(t))}, \\ x(t) = x(t)\left(\dfrac{{}_m S(t)}{(K_m + S(t))} - D\right) \end{cases} \tag{1}$$

最近, 下面含有脉冲输入营养液的单种群 Monod 恒化器模型被孙和陈介绍[29]:

$$\begin{cases} S(t) = - DS(t) - \dfrac{{}_m S(t)x(t)}{(K_m + S(t))}, & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ x(t) = x(t)\left(\dfrac{{}_m S(t)}{K_m + S(t)} - D\right), & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(t^+) = S(t) + \quad S_0, & t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ x(t^+) = x(t), & t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(0^+) \quad 0,\ x(0^+) \quad 0, \end{cases} \tag{2}$$

这里 $S(t)$ 表示在时间 t 时刻在培养基内未耗尽的营养液的浓度, 并且 $x(t)$ 表示在 t 时刻微生物种群在单位容积内的数量, 函数 $p(S) = \ {}_m S(t)/[\ (K_m + S(t))]$ 表示生物种群每个个体的营养摄入率, 它也描述了营养向微生物的转化率, S_0 和 D 都是正的常数并分别表示微生物生长所需要的营养液浓度量及恒化器的流速率(更多细节见文献[18-20, 29]), $T = \ /D$ 脉冲周期, S_0 是在每个脉冲的 T 时刻控制流入的培养基的量, DS_0 表示单位时间内平均被加入的培养基的量

事实上, 微生物摄入的营养液不可能立刻就转化为微生物, 也就是说, 在从营养液向微生物转化的过程中需要 1 个时滞过程 当输入污染的营养液中含有害物质的同时, 微生物生长在污染的恒化器模型中, 可能导致微生物的灭绝 因此, 时滞与有毒物质的脉冲输入在系统(2) 中应该考虑

本文考虑如下带有脉冲输入与时滞增长反应的被污染的 Monod 恒化器模型:

$$\begin{cases} S\ (t) = -\ DS(t) - \dfrac{{}_mS(t)x(t)}{(K_m + S(t))}, & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ x\ (t) = e^{-D} \dfrac{{}_mS(t- \quad)x(t- \quad)}{K_m + S(t- \quad)} - (D + rc(t))x(t), & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ c\ (t) = -\ Dc(t), \quad t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(t^+) = S(t) + \quad S_0, \quad t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ x(t^+) = x(t), \quad t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ c(t^+) = c(t) + \quad c_0, \quad t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(0^+) \quad 0,\ x(0^+) \quad 0,\ c(0^+) \quad 0, \end{cases} \tag{3}$$

这里 $c(t)$ 是恒化器中有害物质的浓度, $r > 0$ 是微生物因有害物质而死亡的减少率, c_0 表示每个 T 时刻脉冲输入的有害物质的量, 常数 $\quad 0$ 表示营养液向微生物转化的迟滞时间, 正的常数 e^{-D} 是必须的, 因为假设目前微生物数量的变化量依赖于在过去的 时刻前营养液消耗量及在 单位时间内微生物的死亡量, $S(nT^+) = \lim_{n \quad nT^+} S(t)$, 且 $S(t)$ 在 $t = nT$ 时刻左连续, 即 $S(nT) = \lim_{n \quad nT^-} S(t)$, $x(t)$ $t \quad 0$ 上连续, $c(nT^+) = \lim_{n \quad nT^+} c(t)$, $c(t)$ 在 $t = nT$ 时刻也是左连续, 即 $c(nT) = \lim_{n \quad nT^-} c(t)$, 具体细节可以参考 Bainov 和 Simeonov[30] 以及 Laksmikantham 等人[31]所写关于脉冲方面的书

根据时滞微分方程理论, 为把系统(3)应用到种群动力学中去(参见文献[37]), 我们总是假设系统(3)的解满足初始条件

$$(\ _1(s),\ _2(s),\ _3(s)) \quad \mathbf{C}_+ = C([- \quad, 0], R_+^3), \qquad _i(0) > 0\ (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

引理 1.1(见文献[30-31]) 考虑下面脉冲微分不等式:

$$w\ (t) \quad (\quad) p(t)w(t) + q(t), \quad t \quad t_k,$$

$$w(t_k^+) \quad (\quad) d_k w(t_k) + b_k, \quad t = t_k,\ k \quad \mathbf{N},$$

这里 $p(t), q(t) \quad C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $d_k \quad 0$, 和 b_k 都是常数 假设

(A_0) 序列 $\{t_k\}$ 满足 $0 \quad t_0 < t_1 < t_2 < \quad$, 且 $\lim_t \quad t_k = \quad$;

(A_1) $w \quad PC(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ 及 $w(t)$ 在 t_k, $k \quad \mathbf{N}$ 左连续

则

$$w(t) \quad (\quad) w(t_0) \sum_{t_0 < t_k < t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right) + \sum_{t_0 < t_k < t}\left(\prod_{t_k < t_j < t} d_j \exp\left(\int_{t_k}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right)\right) b_k +$$

$$\int_{t_0}^{t} \prod_{s < t_k < t} d_k \exp\left(\int_{s}^{t} p(\quad)d\right) q(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \quad t_0$$

引理 1.2[37] 考虑下面时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = r_1 x(t- \quad) - r_2 x(t),$$

这里 a、b、 都是正的常数且当 $t \quad [- \quad, 0]$ 时 $x(t) > 0$

( ) 如果 $r_1 < r_2$, 则 $\lim_t \quad x(t) = 0$;

( ) 如果 $r_1 > r_2$, 则 $\lim_t \quad x(t) = +$

为方便起见, 我们给出下列系统的基本性质:

$$\begin{cases} S\ (t) = -\ DS(t), & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(t^+) = S(t) + \quad S_0, & t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ S(0^+) = S_{10} \quad 0 \end{cases} \tag{5}$$

和

$$\begin{cases} c\ (t) = -\ Dc(t), & t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ c(t^+) = c(t) + \quad c_0, & t = nT,\ n \quad \mathbf{N}, \\ c(0^+) = c_{10} \quad 0 \end{cases} \tag{6}$$

引理 1.3 系统(5)有 1 个正的周期解 $S^*(t)$ 且对系统(5)满足初始条件 $S_{10} \quad 0$ 的每一个解 $S(t)$, 我们知道当 t 时, $|S(t) - S^*(t)| \quad 0$, 而且

( ) 若 $S_{10} \quad S_0/(1- e^{-DT})$, 则 $S(t) \quad S^*(t)$;

( ) 若 $S_{10} < \quad S_0/(1- e^{-DT})$, 则 $S(t) < S^*(t)$,

这里 $S^*(t) = \dfrac{S_0 e^{-D(t-nT)}}{1- e^{-DT}}$, $t \quad (nT, (n+1)T]$, $n \quad \mathbf{N}$, $S^*(0^+) = \dfrac{S_0}{1- e^{-DT}}$

证 易知

$$S^*(t) = \frac{S_0 e^{-D(t-nT)}}{1- e^{-DT}},\ t \quad (nT, (n+1)T],\ n \quad \mathbf{N},\ S^*(0^+) = \frac{S_0}{1- e^{-DT}}$$

是系统(5)的 1 个正的周期解 而系统(5)的解是 $S(t) = (S(0^+) - S^*(0^+))e^{-Dt} + S^*(t)$, $t \quad (nT, (n+1)T]$, $n \quad \mathbf{N}$ 因此, 当 t 时, $|S(t) - S^*(t)| \quad 0$ 并且如果 $S_{10} \quad S_0/(1 - e^{-DT})$, 则有 $S(t) \quad S^*(t)$ 以及如果 $S_{10} < \quad S_0/(1- e^{-DT})$, 则有 $S(t) < S^*(t)$ 证毕

同理, 我们可以得到:

引理 1.4 系统(6)有 1 个正的周期解 $c^*(t)$, 且对系统(6)的任何满足初始条件 $c_{10} \quad 0$ 的解 $c(t)$, 当 t 时, $|c(t) - c^*(t)| \quad 0$, 而且

( ) 如果 $c_{10} \quad c_0/(1- e^{-DT})$, 则 $c(t) \quad c^*(t)$;

( ) 如果 $c_{10} < \quad c_0/(1- e^{-DT})$, 则 $c(t) < c^*(t)$,

这里 $c^*(t) = \dfrac{c_0 e^{-D(t-nT)}}{1- e^{-DT}}$, $t \quad (nT, (n+1)T]$, $n \quad \mathbf{N}$, $c^*(0^+) = \dfrac{c_0}{1- e^{-DT}}$

引理 1.5 假设 $(S(t), x(t), c(t))$ 是系统(3)满足初始条件(4)的任意解, 则存在常数 $L > 0$ 及充分小的 $\quad > 0$ 使 $S(t) \quad L$, $x(t) \quad L$ 以及 $0 < m_3 \quad c(t) \quad M_3$ 这里, 对充分大的 t, $m_3 = \quad c_0 e^{-DT}/(1- e^{-DT}) -$ 和 $M_3 = \quad c_0/(1- e^{-DT}) +$

证 让 $(S(t), x(t), c(t))$ 表示系统(3)满足初始条件(4)的任意解 令

$$W(t) = e^{-D} S(t) + \frac{1}{}x(t + \quad)$$

沿着系统(3)的轨线计算 $W(t)$ 的上右导数

$$W(t) = -\ De^{-D} S(t) - \frac{D + rc(t + \quad)}{}x(t + \quad) =$$

$$-\ DW(t) - \frac{r}{}c(t + \quad)x(t + \quad) \quad -\ DW(t)$$

考虑下面脉冲微分不等式:

$$W(t) \quad -\ DW(t),\quad t \quad nT,\ n \quad \mathbf{N},$$
$$W(t^+) = W(t) + e^{-D} \quad S_0,\quad t = nT,\ n \quad \mathbf{N},$$

由引理 1. 1, 得

$$W(t) \quad W(0^+)e^{-Dt} + e^{-D} \quad S_0\frac{e^{-D(t-T)}}{1-e^{-DT}} + e^{-D} \quad S_0\frac{e^{DT}}{e^{DT}-1} \qquad e^{-D} \quad S_0\frac{e^{DT}}{e^{DT}-1}, \qquad t$$

由 $W(t)$ 的定义知, 存在常数 $L > 0$ 当 t 充分大时, 使 $S(t) \quad L$ 和 $x(t) \quad L$ 由系统(6) 知

$$c^*(t) = \frac{c_0 e^{-D(t-nT)}}{1-e^{-DT}}, t \quad (nT, (n+1)T], \ n \quad \mathbf{N}, \ c^*(0^+) = \frac{c_0}{1-e^{-DT}}$$

是系统(6) 的全局渐近稳定的正周期解 因此, 得

$$\frac{c_0 e^{-DT}}{1-e^{-DT}} \quad c^*(t) \quad \frac{c_0}{1-e^{-DT}}, \qquad t \quad 0$$

根据引理 1. 4, 我们可以得到, 对于充分小的 和足够大的 t, 有

$$0 < m_3 = \frac{c_0 e^{-DT}}{1-e^{-DT}} - \qquad c(t) \quad M_3 = \frac{c_0}{1-e^{-DT}} +$$

证毕

2 灭 绝

这一部分, 我们研究恒化器中的微生物的灭绝性, 也就是微生物从恒化器中完全缺失, 即

$$x(t) = 0, \qquad t \quad 0, \tag{7}$$

这是根据 $x^* = 0$ 是变量 $x(t)$ 当 $x(t) = 0$ 时的 1 个平凡解 在这个假设下, 我们下面表明恒化器中的有害物质随着营养浓度的具有周期 T 的周期性输入出现相同周期的振荡

由引理 1. 5 和系统(3) 的第 2 个方程, 得

$$x(t) \quad {}_m e^{-D} x(t - \ ) - (D + rm_3)x(t),$$

这里 $m_3 = \ c_0 e^{-DT}/(1-e^{-DT}) -$ 显然, 如果 ${}_m e^{-D} < D + r(\ c_0 e^{-DT})/(1-e^{-DT})$, 则当 足够小时, ${}_m e^{-D} < D + r(\ c_0 e^{-DT})/(1-e^{-DT}) -$ 根据引理 1. 2, 如果 ${}_m e^{-D} < D + r(\ c_0 e^{-DT})/(1-e^{-DT})$, 则 $\lim_t \ x(t) = 0$, 这意味着微生物种群最终灭绝 这表明无论营养液输入的多少, 恒化器中培养出来的微生物都不能补偿流出及被有毒物质杀死而损失的微生物的数量 因此, 在余下的文章中, 假设 ${}_m e^{-DS} > D + r(Cc_0 e^{-DT})/(1-e^{-DT})1$

根据引理 1. 3 和 1. 4, 我们获得下面的引理 2. 11

引理 2. 1 系统(5) 和系统(6) 分别有 1 个唯一的正周期解 $S^*(t)$ 和 $c^*(t)$, 即系统(3) 有 1 个-微生物根除. 周期解 $(S^*(t), 0, c^*(t))$ 关于 $t\ I\ (nT, (n+1)T], n\ I\ \mathbf{N}$, 对于系统(3) 的任意解 $(S(t), x(t), c(t))$, 我们有, 当 $t\ y\ ]$ 时, $S(t)\ y\ S^*(t)$ 和 $c(t)\ y\ c^*(t)1$

周期解 $(S^*(t), 0, c^*(t))$ 与微生物种群从恒化器中冲刷稀释而流失掉相对应1 下面, 我们给出微生物灭绝的条件:

定理 2. 1 如果

$$CS_0 < \frac{K_m\left(1-e^{-DT}\right)[D\left(e^{DT}-1\right) + rCc_0]}{\left(L_m e^{-DS} - D\right)\left(e^{DT}-1\right) - rCc_0} \tag{8}$$

或者

$$Cc_0 > \frac{\left(e^{DT}-1\right)[CS_0\left(L_m e^{-DS} - D\right) - K_m D\left(1-e^{-DT}\right)]}{r[CS_0 + K_m\left(1-e^{-DT}\right)]} > 0, \tag{9}$$

这里 $C = TD$, 则系统(3) 的周期解 $(S^*(t), 0, c^*(t))$ 是全局吸引的1

证 设 $(S(t), x(t), c(t))$ 是系统(3) 满足初始条件(4) 的任意 1 个解1 由(8) 式或(9) 式,

得

$$\frac{L_m e^{-DS}(CS_0)/(1-e^{-DT})}{K_m+(CS_0)/(1-e^{-DT})} < D + r\frac{Cc_0 e^{-DT}}{1-e^{-DT}}1$$

因为 $p(z) = (L_m e^{-DS} z)/(K_m+z)$ 对于 $z \setminus 0$ 是严格单调增加的, 我们可以选择 1 个充分小的正常数 E 使

$$\frac{L_m e^{-DSG}}{K_m+G} < D + rm_3, \tag{10}$$

这里 $G = \frac{CS_0}{1-e^{-DT}} + E,\ m_3 = \frac{Cc_0 e^{-DT}}{1-e^{-DT}} - E1$

从系统(3) 的第 1 个方程得 $Sc(t) [- DS(t)1$ 于是我们考虑下面的脉冲微分不等式:

$$Sc(t) [- DS(t), \quad t\ X\ nT,\ n\ I\ \mathbf{N},$$
$$S(t^+) = S(t) + CS_0, \quad t = nT,\ n\ I\ \mathbf{N1}$$

根据引理 1. 1, 得

$$\lim_{t y\,]} \sup S(t) [\frac{CS_0}{1-e^{-DT}}1$$

因此, 存在 1 个正整数 n_1 及 1 个任意小的正常数 E 使对 $t \setminus n_1 T$, 有

$$S(t) [\frac{CS_0}{1-e^{-DT}} + E = : G,\quad c(t) \setminus \frac{Cc_0 e^{-DT}}{1-e^{-DT}} - E = m_3 1 \tag{11}$$

由(11) 式及系统(3) 的第 2 个方程, 对于 $t > n_1 T + S$, 有

$$xc(t) [\frac{L_m G e^{-DS}}{K_m+G} x(t-S) - (D + rm_3)x(t)1$$

考虑下面的比较方程

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{L_m G e^{-DS}}{K_m+G} z(t-S) - (D + rm_3)z(t)1$$

根据引理 1. 2 及(10) 式, 易知

$$\lim_{t y\,]} z(t) = 01$$

对于 $s\ I\ [-S, 0]$, 有 $x(s) = z(s) = <_2(s) > 0$, 根据微分方程的比较定理及解的非负性(即 $x(t) \setminus 0$) 知, 当 $t\ y\ ]$ 时, 有 $x(t)\ y\ 01$

不失一般性, 假设 $0 < x(t) < E$ 对于 $t \setminus 0$, 根据系统(3) 的第 1 个方程, 有

$$Sc(t) \setminus -\left(D + \frac{L_m E}{DK_m}\right) S(t)1$$

考虑下面的脉冲系统

$$\begin{cases} z_1^c(t) = -\left(D + \frac{L_m E}{DK_m}\right) z_1(t), & t\ X\ nT,\ n\ I\ \mathbf{N}, \\ z_1(t^+) = z_1(t) + CS_0, & t = nT,\ n\ I\ \mathbf{N}, \\ z_1(0^+) = S(0^+), \end{cases} \tag{12}$$

于是, 当 $nT < t [(n+1)T$ 时,

$$\tilde{z}_1(t) = \frac{CS_0 \exp[-(D + (L_m E/(DK_m)))(t - nT)]}{1 - \exp[-(D + (L_m E/(DK_m)))T]}$$

是系统(12) 的惟一全局渐近稳定正周期解1 因此, 当 E y 0 时, 有 $\tilde{z}_1(t) [S(t)$ 且 $\tilde{z}_1(t)\ y\ S^*(t)1$ 根据脉冲方程的比较定理(见文献[24] 中的定理 3. 1. 1), 对任意 $E_1 > 0$ 存在 $T_1 > 0$

使对 $t > T_1$, 有

$$S(t) > \tilde{z}_1(t) - \varepsilon_1 \tag{13}$$

另一方面, 由系统(3) 的第 1 个方程, 得

$$\dot{S}(t) \le -DS(t).$$

考虑下面的比较系统

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = -Dz_2(t), & t \ne nT,\ n \in \mathbf{N}, \\ z_2(t^+) = z_2(t) + CS_0, & t = nT,\ n \in \mathbf{N}, \\ z_2(0^+) = S(0^+). \end{cases} \tag{14}$$

我们可以得到, 当 $t \to \infty$ 及 $\tilde{z}_2(t) = S^*(t)$ 时,

$$S(t) < \tilde{z}_2(t) + \varepsilon_1, \tag{15}$$

这里 $\tilde{z}_2(t)$ 是系统(14) 惟一的的正周期解.

令 $\varepsilon \to 0$, 当 t 足够大时, 由(13) 式和(15) 式得

$$S^*(t) - \varepsilon_1 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_1,$$

这意味着当 $t \to \infty$ 时, $S(t) \to S^*(t)$.

因为变量 S 和 x 都不出现在系统(3) 的第 3 和第 6 个方程中, 于是只需考虑系统(3) 的子系统如下:

$$\dot{c}(t) = -Dc(t), \quad t \ne nT,\ n \in \mathbf{N},$$
$$c(t^+) = c(t) + Cc_0, \quad t = nT,\ n \in \mathbf{N},$$
$$c(0^+) = c_{10} \ge 0.$$

根据引理 1.4, 知当 $t \to \infty$ 时, $c(t) \to c^*(t)$. 证毕.

推论 2.1　系统(3) 的周期解 $(S^*(t), 0, c^*(t))$ 是全局吸引的, 假设

$$S > \frac{1}{D}\ln\frac{\mu_m C S_0\left(e^{DT} - 1\right)}{\left[K_m\left(1 - e^{-DT}\right) + CS_0\right]\left[D\left(e^{DT} - 1\right) + rCc_0\right]},$$

这里 $C = TD$.

3　持久性

定义 3.1　系统(3) 被称为是持久的, 如果存在 1 个紧集 $D \subset D$ 使系统(3) 满足初始条件(4) 的任意 1 个解最终进入并保留在 D 内, 这里

$$D = \left\{(S(t), x(t), c(t)) \mid S(t) \ge 0, x(t) \ge 0, c(t) \ge 0\right\}.$$

定理 3.1　系统(3) 是持久的, 假设

$$CS_0 > \frac{K_m\left(e^{DT} - 1\right)\left[D\left(1 - e^{-DT}\right) + rCc_0\right]}{\left(\mu_m e^{-DS} - D\right)\left(1 - e^{-DT}\right) - rCc_0} > 0 \tag{16}$$

或者

$$Cc_0 < \frac{\left(1 - e^{-DT}\right)\left[CS_0\left(\mu_m e^{-DS} - D\right) - K_m D\left(e^{DT} - 1\right)\right]}{r\left[CS_0 + K_m\left(e^{DT} - 1\right)\right]}. \tag{17}$$

证　假设 $(S(t), x(t), c(t))$ 是系统(3) 满足初始条件(4) 的任意 1 个正解. 把系统(3) 的第 2 个方程可以改写为

$$\dot{x}(t) = \left[\mu_m e^{-DS}\frac{S(t)}{K_m + S(t)} - (D + rc(t))\right]x(t) -$$

$$_m \mathrm{e}^{-DS} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_{t-S}^{t} \frac{S(H)x(H)}{K_m + S(H)} \mathrm{d}H1 \tag{18}$$

定义

$$V(t) = x(t) + L_m \mathrm{e}^{-DS} Q_{t-S}^{t} \frac{S(H)x(H)}{K_m + S(H)} \mathrm{d}H1$$

沿着系统(3)的解, 计算 $V(t)$ 的导数, 并根据(18)式, 得

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \left[L_m \mathrm{e}^{-DS} \frac{S(t)}{K_m + S(t)} - (D + rc(t)) \right] x(t)1$$

根据引理1.5, 对任意足够小的 E > 0, 存在一个正常数 T_1 使对 $t \setminus T_1$, 有

$$c(t) [\frac{Cc_0}{1 - \mathrm{e}^{-DT}} + E = M_3,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \setminus \left[L_m \mathrm{e}^{-DS} \frac{S(t)}{K_m + S(t)} - (D + rM_3) \right] x(t) =$$

$$(D + rM_3) \left[\frac{L_m \mathrm{e}^{-DS}}{D + rM_3} \frac{S(t)}{K_m + S(t)} - 1 \right] x(t), \qquad 对\ t \setminus T_1 1 \tag{19}$$

令 $$m_2^* = \frac{1}{2} \frac{DK_m}{L_m} \left(\frac{1}{T} \ln \left(1 + \frac{CS_0 [\left(L_m \mathrm{e}^{-DS} - D \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-DT} \right) - rCc_0]}{K_m [D \left(1 - \mathrm{e}^{-DT} \right) + rCc_0]} \right) - D \right) 1$$

由不等式(17)或者(18)式, 易得 $m_2^* > 01$ 对于这个 m_2^*, 我们可以选择1个足够小的正常数 E_1 使

$$\frac{L_m \mathrm{e}^{-DS} Q}{(D + rM_3) \left(K_m + Q \right)} > 1, \tag{20}$$

这里 $$Q = \frac{CS_0 \exp[- \left(D + L_m m_2^* / (DK_m) \right) T]}{1 - \exp[- \left(D + L_m m_2^* / (DK_m) \right) T]} - E_1 > 0, \quad M_3 = \frac{Cc_0}{1 - \mathrm{e}^{-DT}} + E_1$$

对于任意正的常数 t_0, 我们声称对所有的 $t \setminus t_0$ 不等式 $x(t) < m_2^*$ 不会恒成立1 否则, 存在1个正的常数 t_0, 使对所有 $t \setminus t_0$, $x(t) < m_2^*$ 恒成立1 由系统(3)的第1及第4个方程, 得

$$Sc(t) \setminus - \left(D + \frac{L_m m_2^*}{DK_m} \right) S(t), \qquad t\ X\ nT,$$

$$S(t^+) = S(t) + CS_0, \qquad t = nT1$$

根据引理1.1, 存在 $T_2 \setminus t_0 + S$, 对于 $t \setminus T_2$ 有

$$S(t) > \frac{CS_0 \exp[- \left(D + L_m m_2^* / (DK_m) \right) T]}{1 - \exp[- \left(D + L_m m_2^* / (DK_m) \right) T]} - E_1 = : Q1 \tag{21}$$

由(19)式和(21)式, 得

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} > (D + rM_3) \left[\frac{L_m \mathrm{e}^{-DS}}{D + rM_3} \frac{Q}{K_m + Q} - 1 \right] x(t),$$

$$对\ t \setminus T^* = \max\left\{ T_1, T_2 \right\} 1 \tag{22}$$

令 $$x^l = \min_{tI[T^*, T^* + S]} x(t)1$$

我们声称 $x(t) \setminus x^l$ 对所有的 $t \setminus T^*$ 1 否则, 存在1个非负常数 T_3 使 $x(t) \setminus x^l$, $t\ I\ [T^*, T^* + S + T_3]$ $x(T^* + S + T_3) = x^l$ 和 $xc(T^* + S + T_3) [0$ 成立1 于是由(3)式的第2个方程和(20)式, 易知

$$xc(T^* + S + T_3) > \left[L_m e^{-DS}\frac{Q}{K_m + Q} - (D + rM_3)\right]x^l =$$
$$(D + rM_3)\left[\frac{L_m e^{-DS}}{D + rM_3}\frac{Q}{K_m + Q} - 1\right]x^l > 0$$

矛盾。因此，对所有的 $t \geq T^*$，有 $x(t) \geq x^l > 0$。由(22)式，得

$$\frac{dV(t)}{dt} > (D + rM_3)\left[\frac{L_m e^{-DS}}{D + rM_3}\frac{Q}{K_m + Q} - 1\right]x^l > 0,$$

这意味着当 $t \to +\infty$ 时，$V(t) \to +\infty$。这与 $V(t) \leq (1 + L_m S e^{-DS})L$ 矛盾。因此，对任意正常数 t_0，不等式 $x(t) < m_2^*$ 不可能对所有的 $t \geq t_0$ 成立。

一方面，如果 $x(t) \geq m_2^*$ 对于所有足够大的 t 满足，于是我们的目的达到了。另一方面，$x(t)$ 关于 m_2^* 振荡。令

$$m_2 = \min\left\{\frac{m_2^*}{2}, m_2^* e^{-(D + rM_3)S}\right\}。$$

我们声称 $x(t) \geq m_2$。下面，我们就来说明 $x(t) \geq m_2$。存在两个正常数 t，X 使

$$x(t) = x(t + X) = m_2^*$$

及 $\qquad x(t) < m_2^*, \qquad$ 对 $t < t < t + X$。

当 t 足够大，不等式 $S(t) > Q$ 和 $c(t) \leq M_3$ 对于 $t < t < t + X$ 满足。因为 $x(t)$ 连续有界且不受脉冲影响，可以推得 $x(t)$ 是一致连续。因此存在常数 T_4(这里 $0 < T_4 < S$ 和 T_4 不依赖于 t 的选择) 使对所有的 $t \leq t \leq t + T_4$，有 $x(t) > m_2^*/2$。如果 $X \leq T_4$，目的达到。如果 $T_4 < X \leq S$，由系统(3)的第2个方程，对 $t < t \leq t + X$，有 $xc(t) \geq -(D + rM_3)x(t)$。从而因为 $x(t) = m_2^*$，对于 $t < t \leq t + X \leq t + S$，我们可得 $x(t) \geq m_2^* e^{-(D + rM_3)S}$。显然，对 $t < t \leq t + X$，有 $x(t) \geq m_2$。如果 $X \geq S$，对于 $t < t \leq t + S$，有 $x(t) \geq m_2$。于是，和上面声称的一样继续进行讨论，我们获得 $x(t) \geq m_2$ 对于 $t + S \leq t \leq t + X$ 成立。因为 $[t, t + X]$ 任意选择的(只需 t 足够大)，可得当 t 足够大时，有 $x(t) \geq m_2$。由上面的讨论可以看出 m_2 的选择不依赖于(3)式的正解，且当 t 充分大时，$x(t) \geq m_2$ 成立。

根据引理 1.5 知 $x(t) \leq L$ 这里 t 足够大。因此，由系统(3)的第 1 个方程，得

$$Sc(t) \geq -\left(D + \frac{L_m L}{DK_m}\right)S(t)。$$

于是 $S(t) \geq \tilde{z}_3(t)$，这里 $\tilde{z}_3(t)$ 是

$$zc_3(t) = -\left(D + \frac{L_m L}{DK_m}\right)z_3(t), \qquad t \neq nT, n \in \mathbf{N},$$
$$z_3(t^+) = z_3(t) + CS_0, \qquad t = nT, n \in \mathbf{N},$$
$$z_3(0^+) = S(0^+) > 0$$

的惟一全局渐近稳定的正周期解。存在充分小的 $E > 0$ 使对充分大的 t，有

$$S(t) \geq \tilde{z}_3(t) - E \geq \frac{CS_0\exp[-(D + L_m L/(DK_m))T]}{1 - \exp[-(D + L_m L/(DK_m))T]} - E =: m_1 > 0。$$

根据引理 1.5，可得 $0 < m_3 \leq c(t) \leq M_3$ 这里 $m_3 = Cc_0 e^{-DT}/(1 - e^{-DT}) - E$ 和 $M_3 = Cc_0/(1 - e^{-DT}) + E$ 对充分大的 t 和充分小 E 成立。

取

$$D = \left\{(S, x, c) \in R_+^3 \mid m_1 \leq S(t) \leq L, m_2 \leq x(t) \leq L, m_3 \leq c(t) \leq M_3\right\}。$$

于是 D 是1个有界紧集且到坐标轴有正的距离1 根据上面的讨论,可知系统(3)满足初始条件(4)的每一个解最终进入并保留在D内1 证毕1

推论3.1 系统(3)是持久的,如果

$$S < \frac{1}{D}\ln\frac{L_m C S_0\left(1-e^{-DT}\right)}{\left[K_m\left(e^{DT}-1\right)+CS_0\right]\left[D\left(1-e^{-DT}\right)+rCc_0\right]},$$

这里 C = TD1

4 结 论

在第2部分,给出了恒化器中微生物冲刷稀释最终灭绝的条件1 定理2.1表明营养液的脉冲输入量 CS_0 在某个确定的值之下或者有害物质的脉冲输入量 Cc_0 高于某个确定值,于是恒化器中微生物最终将灭绝,微生物培养失败1 第3部分给出了恒化器中微生物种群持久生存的条件1 定理3.1表明营养液的脉冲输入量 CS_0 在某个确定的值之上或者有害物质的脉冲输入量 Cc_0 低于某个确定值,于是恒化器中微生物能够持续生存,微生物培养成功1 显然,如果连续培养和脉冲培养都能获得微生物的话,后者要好于前者,因为脉冲培养能够节约培养基1 微生物的灭绝与否决定于在每一次 nT 时刻的营养液的脉冲输入量 CS_0 及同时伴随的有害物质的脉冲输入量 $Cc_0$1 分析得出没有污染的恒化器环境有利于微生物的培养,而污染的环境可能导致微生物的灭绝1 这表明伴随着有害物质输入对恒化器模型的动力学行为产生了重要的影响1

从引理2.1和引理3.1,可以看到微生物的灭绝与持久也依赖于微生物生长繁殖的迟滞1 最后,当生长繁殖期滞后太长时,微生物的持久性消失,作为消费者的微生物灭绝,我们称之为/有害0时滞1 这表明模型的动力学行为对生长时滞非常敏感1 直觉反映的生物意义是:如果从吸收营养液到微生物的转化花费太多的时间,则对微生物种群的最大补充 $(L_m e^{-DS})$ 将低于流出的损失 D 与由于污染而被杀死的微生物之和,结果导致 x 的灭绝1 这意味着时滞对模型的动力学行为有重要的影响1

致谢 感谢山东科技大学科学与发展基金(05g016)的资助1

[参 考 文 献]

[1] Hsu S B. A competition model for a seasonally fluctuating nutrient[J]. Journal of Mathematical Biology, 1980, **9**(2): 115-132.

[2] Smith H L. Competitive coexistence in an oscillating chemostat[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1981, **40**(3): 498-522.

[3] Butler G J, Hsu S B, Waltman P. A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1985, **45**(3): 435-449.

[4] Pilyugin S S, Waltman P. Competition in the unstirred chemostat with periodic input and washout[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1999, **59**(4): 1157-1177.

[5] Simth H L, Waltman P. The Theory of the Chemostat[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[6] Hsu S B, Hubbell S P, Waltman P. A mathematical theory for single nutrient competition in continuous cultures of micro-organisms[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1977, **32**(2): 366-382.

[7] Picket A M. Growth in a changing environment[A]. In: Bazin M J, Ed. Microbial Population Dynamics[C]. Florida: CRC Press, 1982.

8] Monod J. La technique de culture continue; th orie et applications[J]. Ann Inst Pasteur, 1950, **79** (19): 390-401.

[9] Hansen S R, Hubbell S P. Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes[J]. Science, 1980, **207**(4438): 1491-1493.

[10] Barford J P, Pamment N B, Hall R J. Lag phases and transients[A]. In: Bazin M J, Ed. Microbial Population Dynamics[C]. Florida: CRC Press, 1982.

[11] Ramkrishna D, Fredrickson A G, Tsuchiya H M. Dynamics of microbial propagation: models considering inhibitors and variable cell composition[J]. Biotechnology and Bioengineering, 1967, **9**(2): 129-170.

[12] Bush A W, Cook A E. The effect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial treatment of wastewater[J]. Journal of Theoretical Biology, 1976, **63**(2): 385-395.

[13] Caperon J. Time lag in population growth response of isochrysis galbana to a variable nitrate environment[J]. Ecology, 1969, **50**(2): 188-192.

[14] Freedman H I, So J W-H, Waltman P. Coexistence in a model of competition in the chemostat incorporating discrete delays[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1989, **49**(3): 859-870.

[15] Freedman H I, So J W-H, Waltman P. Chemostat competition with time delays[A]. In: Eisenfeld J, Levine D S, Eds. Biomedical Modelling and Simulation[C]. New York: Scientific Publishing Co. 1989.

[16] RUAN Shi-gui, Wolkowicz Gail S K. Bifurcation analysis of a chemostat model with a distributed delay[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, **204**(3): 786-812.

[17] Thingstad T F, Langeland T I. Dynamics of chemostat culture: the effect of a delay in cell response[J]. Journal of Theoretical Biology, 1974, **48**(1): 149-159.

[18] Ellermeyer S F. Competition in the chemostat: global asymptotic behavior of a model with delayed response in growth[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1994, **54**(2): 456-465.

[19] Wolkowicz Gail S K, XIA H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, **57**(4): 1019-1043.

[20] Wolkowicz Gail S K, XIA Hua-xing, RUAN Shi-gui. Competition in the chemostat: A distributed delay model and its global asymptotic behavior[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, **57**(5): 1281-1310.

[21] XIA Hua-xing, Wolkowicz Gail S K, WANG Lin. Transient oscillations induced by delayed growth response in the chemostat[J]. Journal of Mathematical Biology, 2005, **50**(5): 489-530.

[22] ZHAO Tao. Global periodic solutions for a differential delay system modelling a microbial population in the chemostat[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, **193**(1): 329-352.

[23] MacDonald N. Time delays in chemostat models[A]. In: Bazin M J, Ed. Microbial Population Dynamics[C]. Florida: CRC Press, 1982.

[24] Hale J K M, Somolinas A S. Competition for fluctuating nutrient[J]. Journal of Mathematical Biology, 1983, **18**(3): 255-280.

[25] Buler G J, Hsu S B, Waltman P. A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1985, **45**(3): 435-449.

[26] Wolkowicz Gail S K, ZHAO Xiao-qiang. N-spicies competition in a periodic chemostat[J]. Differential and Integral Equations: An International Journal for Theory and Applications, 1998, **11**(3): 465-491.

[27] Funasaki E, Kot M. Invasion and chaos in a periodically pulsed mass-action chemostat[J]. Theoretical Population Biology, 1993, **44**(2): 203-224.

[28] Smith R J, Wolkowicz Gail S K. Analysis of a model of the nutrient driven self-cycling fermentation process[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B, 2004, **11**(2): 239-

265.

[29] SUN Shu-lin, CHEN Lan-sun. Dynamic behaviors of Monod type chemostat model with impulsive perturbation on the nutrient concentration[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2007, **42**(4): 837-848.

[30] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications [M]. Harlow: Longman Scientific and Technical Press, 1993.

[31] Lakshmikantham V, Bainov D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[32] LIU Xian-ning, CHEN Lan-sun. Complex dynamics of Holling type Lotka-Volterra predator-preysystem with impulsive perturbations on the predator[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, **16**(2): 311-320.

[33] Roberts M G, Kao R R. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulses[J]. Mathematical Biosciences, 1998, **149**(1): 23-36.

[34] Ballinger G, Liu X. Permanence of population growth models with impulsive effects[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1997, **26**(12): 59-72.

[35] SUN Ming-jing, CHEN Lan-sun. Analysis of the dynamical behavior for enzyme-catalyzed reactions with impulsive input[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2006, DOI: 10.1007/s10910-006-9207-5.

[36] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统[M]. 北京:科学出版社.

[37] Kuang Yang. Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics[M]. San Diego, CA: Academic Press, Inc. 1993.

Global Qualitative Analysis of a New Monod Type Chemostat Model With Delayed Growth Response and Pulsed Input in a Polluted Environment

MENG Xin-zhu[1,2], ZHAO Qiu-lan[2], CHEN Lan-sun[1,3]

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P.R. China;
2. College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, P.R. China;
3. Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Academia Sinica, Beijing, 100080, P.R. China)

Abstract: A new Monod type chemostat model is considered with time delay and pulsed input concentration of the nutrient in a polluted environment. Using the discrete dynamical system determined by the stroboscopic map, a –microorganism-extinction periodic solution is obtained. Further more, the sufficient conditions for the global attractivity of the microorganism-extinction periodic solution are established. Using new computational techniques for impulsive and delayed differential equation, it is proved that the system is permanent under appropriate conditions. The results show that time delay is / profitless0.

Key words: permanence; impulsive input; chemostat model; time delay for growth response; extinction