

非局部 Kelvin 粘弹性直杆受轴向 拉力作用的应变分析*

赵雪川, 雷勇军, 周建平

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 长沙 410073)

(傅衣铭推荐)

摘要: 在 Kelvin 粘弹性体模型中引入非局部应力应变关系, 得到了粘弹性体的非局部本构方程, 研究了符合该种本构关系的直杆受到轴向拉力作用的应变响应问题. 首先通过变换将应变响应的求解问题转化为 Volterra 积分方程形式, 然后采用对称的指数型核函数, 利用 Neumann 级数展开求解了 Volterra 积分方程, 得到了直杆的应变场. 数值算例的计算结果显示了直杆受轴向拉力作用后的蠕变过程, 当时间趋近无穷大时, 计算结果则退化为非局部弹性计算结果.

关键词: 非局部理论; Kelvin 粘弹性体; Neumann 级数; 杆; 应变分析

中图分类号: O345 **文献标识码:** A

引 言

早在上世纪 60 年代, Kroner 和 Edelen 等人就对非局部弹性理论进行了开创性的研究, Kroner 于 1967 年提出了微观结构相互作用长程力(long range cohesive force)的概念, 后来 Edelen 和 Eringen 等人继承并发展了前人的工作, 将长程力的概念引入到固体力学领域. 后来, Eringen 先后提出了适用于热动力学的非局部准则, 进而建立了非局部弹性理论的本构模型, 并成功的将非局部理论应用在弹性力学和流体力学的问题研究中. 到上世纪八九十年代, 出现了非局部理论的研究热潮, 先后解决了许多经典弹性力学理论不能合理解释的问题, 如 Eringen 等人^[1]分析了裂纹尖端应力场分部的奇异性问题, 给出了裂纹尖端应力并非无限大的数学解释. Eringen^[2]又用非局部弹性理论分析了脱层问题, 并给出了脱层两侧的应力场分布. 非局部弹性问题在国内研究也相对活跃, 戴天民^[3-4]对连续统理论进行了大量的工作, 先后提出连续统场论、微极连续耦合场论和极性连续统理论的基本原理等, 并对该理论进行了详尽的论述. 黄再兴^[5-6]推导了线性非局部理论的本构方程, 并给出线性非局部理论的平衡方程. 周振功等人^[7-8]采用 Schmidt 方法分析了非局部弹性体的断裂问题, 计算了裂纹尖端的应力场, 其结果精

* 收稿日期: 2006-04-25; 修订日期: 2007-11-19

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(19925209); 国防科技大学科研计划基础研究基金资助项目(JC06-01-01); 湖南省自然科学基金资助项目(02JJY2009)

作者简介: 赵雪川(1981—), 男, 吉林榆树人, 助理工程师, 硕士;

雷勇军(1968—), 男, 湖南澧县人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-731-4573198; Fax: + 86-731-4533357; E-mail: leiyj108@nudt.edu.cn).

度高于 Eringen 求解同样问题的精度. 近年来, Pisano^[9] 给出了受拉非局部弹性杆封闭形式的解. Weckner^[10] 将长程力应用到杆的动力学分析中, Lei^[11] 和 Adhikai^[12] 采用非局部理论的方法研究了含非局部阻尼分布参数系统的动力学问题, 并分别采用传递函数方法和 Galerkin 方法进行了梁和板等简单结构元件的结构力学特性分析, 研究了含非局部阻尼结构的模态参数变化特性. 结果表明, 在分析结构的阻尼时, 考虑了材料的非局部效应得到了一些更符合实际的结果, 非局部阻尼对于解释结构的阻尼性质更有帮助.

和非局部弹性理论相比, 关于非局部粘弹性理论的研究, 虽然早在 1975 年 Ahmadi^[13] 就提出了非局部粘弹性体和非局部流体本构模型, 随后 Nowinski^[14] 于 1986 年将 Ahmadi 的非局部粘弹性模型应用到应力波问题研究, 但到目前为止, 还较少有人进一步将非局部粘弹性模型应用到其它一些特定结构的力学问题研究中. 然而实际情况中, 很多材料表现出来的力学特性是粘弹性的, 甚至是非局部粘弹性的, 例如: 颗粒增强的固体推进剂材料和短纤维复合材料等, 所以研究非局部粘弹性本构理论及其应用具有重要的理论价值和实际意义. 本文基于 Ahmadi 提出的非局部粘弹性本构关系, 结合 Kelvin 模型, 给出了一种简单的粘弹性体非局部本构关系, 研究了符合该种本构关系的直杆受到轴向拉力作用的应变响应问题. 并利用 Neumann 级数展开, 得到了非局部直杆的应变场分布曲线.

1 一维非局部粘弹性本构关系模型

根据 Ahmadi^[13] 提出的非局部粘弹性本构模型, 其三维应力应变关系为

$$t_{kl} = \lambda e_{rr} \delta_{kl} + 2\mu_e e_{kl} + \int_V [\lambda' e'_{rr} \delta_{kl} + 2\mu'_e e'_{kl}] dv, \quad (1)$$

式中 t_{kl} 为非局部粘弹性体应力张量, e_{rr} 为体积应变张量, e_{kl} 为偏应变张量, δ_{kl} 为 Kronecker 符号, λ 、 μ_e 为 Lamé 系数, λ' 、 μ'_e 为非局部粘弹性系数, e'_{rr} 、 e'_{kl} 为非局部体积应变张量和非局部偏应变张量, V 是非局部粘弹性体的积分域, 且 $v \in V$. 分析(1)式本构关系, 可以看出(1)式前两项表示了局部材料的本构关系, 积分项则表示了材料的非局部本构关系.

1.1 Kelvin 模型^[15]

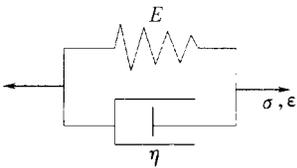


图1 Kelvin 模型

Kelvin 粘弹性本构模型由弹簧和阻尼器组成, 它可以描述粘弹性材料的蠕变过程. 图 1 给出了 Kelvin 模型的示意图. 该模型的应力应变关系为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (2)$$

其中 σ 、 ε 为正应力和线应变, E 为弹性模量, η 为粘滞阻尼系数.

当作用恒应力 $\sigma = \sigma_0$ 时, 由方程(2)的解为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\eta t / \tau_d}); \quad \tau_d = \frac{\eta}{E}. \quad (3)$$

1.2 一维非局部 Kelvin 粘弹性体本构模型

结合 Ahmadi 提出的非局部粘弹性本构模型(1)式和 Kelvin 模型(2)式, 本文针对粘弹性直杆在均匀拉伸应力作用下的应变分析问题, 提出如下的一维非局部 Kelvin 粘弹性体本构模型

$$\sigma(x, t) = \Delta_1 \left[E\varepsilon(x, t) + \eta \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x, t) \right] + \Delta_2 \int_0^L K(x, \xi) \left[E\varepsilon(\xi, t) + \eta \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\xi, t) \right] d\xi \quad (4)$$

式中, Δ_1 和 Δ_2 为材料局部特性和非局部特性的比例因子, 且 $\Delta_1 + \Delta_2 = 1$ (当 $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0$ 时, 表示完全局部 Kelvin 粘弹性材料; 当 $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 1$ 时, 表示完全非局部 Kelvin 粘弹性材料), σ 为粘弹性杆轴向正应力, ε 为轴向线应变, E 为弹性模量, $K(x, \xi)$ 为非局部特性核函数, L 是一维场的积分域.

核函数 $K(x, \xi)$ (kernel function), 在有些文献中又称为衰减函数 (attenuation function)^[16] 或者影响函数 (influence function)^[17]. 非局部理论中的核函数一般定义为关于 Euclidean 空间距离 $|x - \xi|$ 的连续函数, 即 $K(|x - \xi|)$, 如图 2 所示, 函数值随着 ξ 点与 x 点距离 $(|x - \xi|)$ 的增加而减小, 这正体现了核函数的非局部特殊衰减效应.

另外, 核函数还要满足如下两个条件:

$$\int_x K(|x - \xi| / l_a) d\xi = 1, \quad (5)$$

$$K(|x - \xi| / l_a) \geq 0. \quad (6)$$

为度量非局部效应的大小, 定义材料的影响长度 (influence length) l_a , 它是一个材料常数, 用以表征非局部效应的大小. 当 l_a 较大时, 表明材料的非局部效应较明显, 反之, 非局部效应较弱.

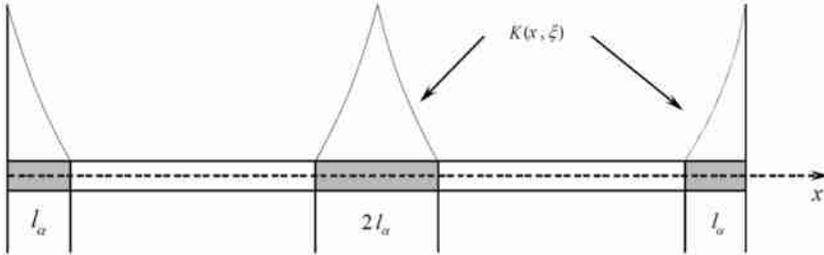


图 2 核函数分布示意图

本文选取核函数为如下形式

$$K(|x - \xi|) = \frac{1}{2l_a} e^{-|x - \xi| / l_a}, \quad (7)$$

(7) 式满足 (5) 式和 (6) 式条件, 解析分析通常采用这种指数型核函数.

2 应变场求解

考虑应力的变化为阶跃变化, 对 (4) 式进行 Laplace 变换, 化简后得到

$$\frac{\sigma(x, s)}{s} = \Delta_1 [E \varepsilon(x, s) + \eta s \varepsilon(x, s)] + \Delta_2 \left[\int_0^L K(x, \xi) (E \varepsilon(\xi, s) + \eta s \varepsilon(\xi, s)) d\xi \right], \quad (8)$$

式中, $\sigma(x, s)$ 和 $\varepsilon(x, s)$ 分别表示 $\sigma(x, t)$ 和 $\varepsilon(x, t)$ 的 Laplace 变换.

对于受均匀轴向拉力作用的直杆, 其应变场分布可由 (8) 式变化得到的一个标准的 Fredholm 积分方程来表示. 即

$$\varepsilon(x, s) = C + \lambda \int_0^L \frac{K(x, \xi)}{\lambda_0} \varepsilon(\xi, s) d\xi \quad (9)$$

其中 $C = \frac{\varepsilon(x, s)}{\Delta_1}$, $\varepsilon(x, s) = \frac{\sigma(x, s)}{s(E + \eta s)}$, $\lambda = -\frac{\lambda_0 \Delta_2}{\Delta_1}$, $\lambda_0 = \frac{1}{2l_a}$.

引入 Heaviside 函数, 定义如下

$$H(x - \xi) = \begin{cases} 1, & (x \geq \xi), \\ 0, & (x < \xi), \end{cases} \quad (10)$$

则(9)式可以写成

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, s) = & C^- + \lambda \int_0^x \frac{K^-(x - \xi)}{\lambda_0} \varepsilon^-(\xi, s) d\xi + \\ & C^+ + \lambda \int_x^L \frac{K^+(\xi - x)}{\lambda_0} \varepsilon^+(\xi, s) d\xi \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} K^-(x - \xi) &= K(1 - x - \xi)H(x - \xi), \\ K^+(\xi - x) &= K(1 - x - \xi)H(\xi - x), \quad C = C^+ + C^- . \end{aligned}$$

将(7)式给定的核函数代入(11)式,则直杆的应变场可以进一步由两个 Volterra 积分方程形式表示

$$\varepsilon^-(x, s) = C^- + \lambda \int_0^x \frac{1}{2l_a} e^{-(x-\xi)/l_a} \varepsilon(\xi, s) d\xi \quad (12)$$

$$\varepsilon^+(x, s) = C^+ + \lambda \int_x^L \frac{1}{2l_a} e^{-(\xi-x)/l_a} \varepsilon(\xi, s) d\xi \quad (13)$$

并且 $\varepsilon(x, s)$ 可利用上两式表示为

$$\varepsilon(x, s) = \varepsilon^-(x, s) + \varepsilon^+(x, s). \quad (14)$$

令 $y = L - x; u = L - \xi$ 并代入(13)式得

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(y, s) = & C^+ - \lambda \frac{1}{2l_a} \int_y^0 e^{-(y-u)/l_a} \varepsilon(u, s) du = \\ & C^+ + \lambda \frac{1}{2l_a} \int_0^y e^{-(y-u)/l_a} \varepsilon(u, s) du. \end{aligned} \quad (15)$$

从(15)式可以看出,(13)式可以通过 $y = L - x; u = L - \xi$ 和 $du = -d\xi$ 变化得到(12)式,并且对于本文所给定的均质直杆,利用 $x = L/2$ 处应变相等条件,即 $\varepsilon^-(L/2, s) = \varepsilon^+(L/2, s)$,可以得到 $C^- = C^+ = C/2$,这样求解直杆的应变场只需要求出(12)式解即可.

对于(7)式给定的指数型核函数,(12)式可以通过 Neumann 级数写成如下形式进行求解^[9],即

$$\varepsilon^-(x, s) = C^- + \lambda \mathcal{C}^- \int_0^x N(x, \xi, \lambda) d\xi. \quad (16)$$

上式中 Neumann 级数具体形式为

$$N(x, \xi, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x, \xi) \lambda^{n-1}, \quad (17)$$

式中, $N(x, \xi, \lambda)$ 称为积分方程(16)的预解核, $k_n(x, \xi)$ 为 $k_1(x, \xi)$ 的 n 次叠核,对于本文核函数

$$\begin{aligned} k_1(x, \xi) &= e^{-(x-\xi)/l_a}, \\ k_2(x, \xi) &= \int_{\xi}^x e^{-(x-\zeta)/l_a} e^{-(\zeta-\xi)/l_a} d\zeta = e^{-(x-\xi)/l_a} (x - \xi), \\ &\vdots \\ k_n(x, \xi) &= \int_{\xi}^x e^{-(x-\zeta)/l_a} e^{-(\zeta-\xi)/l_a} \frac{(\zeta - \xi)^{n-2}}{(n-2)!} d\zeta = e^{-(x-\xi)/l_a} \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

所以

$$N(x, \xi, \lambda) = e^{-(x-\xi)/l_a} e^{\lambda(x-\xi)}. \quad (18)$$

将(18)式代入(16)式并对其进行积分得

$$\bar{\varepsilon}(x, s) = C^- + \frac{N_a}{1 - N_a} C^- [1 - e^{(\lambda l_a^- x)/l_a}], \quad (19)$$

且

$$\bar{\varepsilon}(x, s) |_{x=L/2} = C^- + \frac{N_a}{1 - N_a} C^- = \frac{\bar{\varepsilon}(x, s)}{2}, \quad (20)$$

得 $C^- = (\bar{\varepsilon}(x, s)/2)(1 - N_a)$, 代入(19)式并考虑到 $\varepsilon(x, s) = \sigma(x, s)/(s(E + \eta s))$ 得

$$\bar{\varepsilon}(x, s) = \frac{\sigma}{s(E + s\eta)} \frac{1}{2} [1 - N_a e^{(\lambda l_a^- x)/l_a}]. \quad (21)$$

为了求得 $\bar{\varepsilon}^+(x, s)$ 可以令 $x = L - x$, 则可求得

$$\bar{\varepsilon}^+(x, s) = \frac{\sigma}{2s(E + s\eta)} [1 - N_a e^{(N_a l_a^- \lambda l_a^- L + x)/l_a}]. \quad (22)$$

将(21)式和(22)式做和, 得到 $[0, L]$ 上应变场分布

$$\bar{\varepsilon}(x, s) = \frac{\sigma}{2s(E + s\eta)} \left[1 - \frac{N_a}{2} (e^{(\lambda l_a^+ x)/l_a} + e^{(N_a l_a^- \lambda l_a^- L + x)/l_a}) \right], \quad (23)$$

对(23)式进行 Laplace 逆变换, 得到

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-t/t_d}) \left[1 - \frac{N_a}{2} (e^{(\lambda l_a^+ x)/l_a} + e^{(N_a l_a^- \lambda l_a^- L + x)/l_a}) \right], \quad (24)$$

其中 $t_d = \eta/E$, 此式即非局部 Kelvin 粘弹性直杆受轴向拉力作用的应变场分布. 从(24)式可以看出, 非局部粘弹性材料的应变场可以理解为由两部分组成, 第 1 部分 $(\sigma/E)(1 - e^{-t/t_d})$ 为 Kelvin 粘弹性杆受轴向拉力作用结果^[15]; 第 2 部分 $[1 - (N_a/2)(e^{(\lambda l_a^+ x)/l_a} + e^{(N_a l_a^- \lambda l_a^- L + x)/l_a})]$ 为非局部弹性直杆受轴向拉力作用的结果^[9].

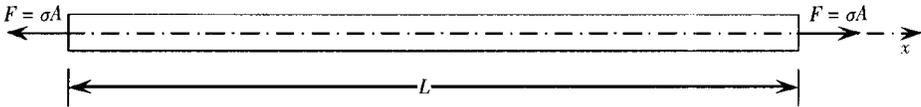


图 3 直杆受到轴向拉力作用

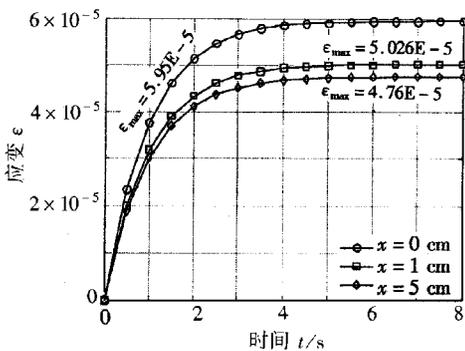


图 4 $x = 0 \text{ cm}$, $x = 1 \text{ cm}$, $x = 5 \text{ cm}$ 处截面的应变曲线

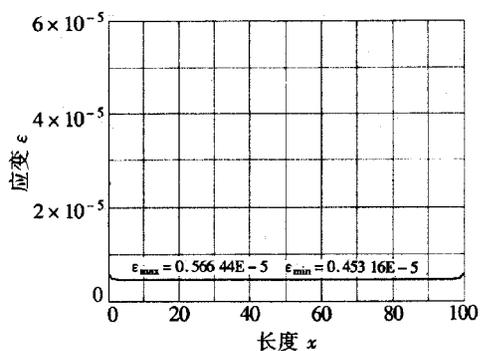


图 5 $t = 0.1 \text{ s}$ 时刻直杆的应变曲线

3 算 例

一均质直杆如图 3 所示, 设杆长 $L = 100 \text{ cm}$, 截面积 $A = 1 \text{ cm}^2$, 两端受拉力 $F = 100 \text{ N}$ 作用, 弹性模量 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, 影响长度 $l_a = 1 \text{ cm}$, 粘性系数 $\eta = 2.1 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{s/cm}^2$, 比例

因子 $\Delta_1 = 0.5$, $\Delta_2 = 0.5$, 当采用局部理论 $\varepsilon = F/(A \cdot E) = 4.76 \times 10^{-5}$.

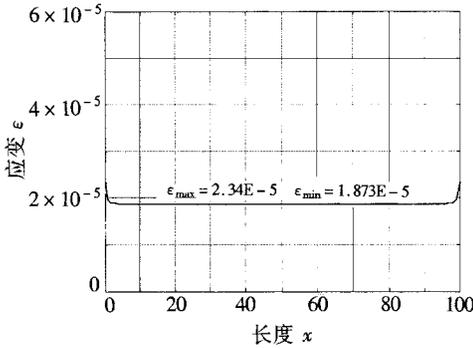


图 6 $t = 0.5 \text{ s}$ 时刻直杆的应变曲线

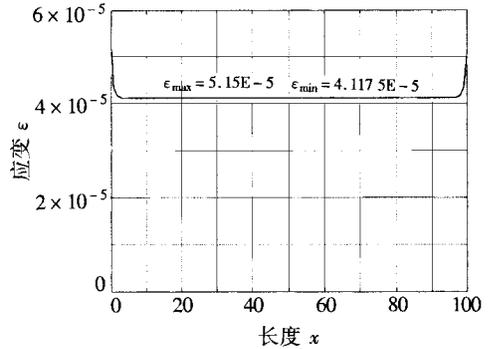


图 7 $t = 2 \text{ s}$ 时刻直杆的应变曲线

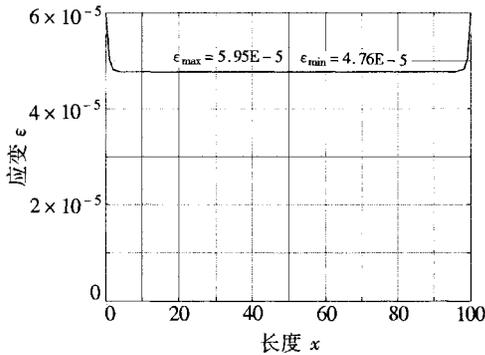


图 8 $t = 8 \text{ s}$ 时刻直杆的应变曲线

通过 (24) 式, 计算得到了直杆在轴向拉力作用下的应变响应, 图 4 给出了直杆不同位置处应变响应的时间历程, 从图 4 中可以看出非局部理论情况下, 均匀直杆的应变响应并不是均匀的, 且粘弹性非局部直杆存在明显的蠕变过程. 对于本文所提出的非局部 Kelvin 模型, 当时间较长时, 应变趋于一个定值, 这正是应用非局部弹性理论算得的应变.

图 5~ 图 8 分别给出了不同时刻, 应变沿杆长的分布. 对于本文的指数型核函数, 从图 5~ 图 8 全杆的应变场分析, 靠近直杆边缘部分应变较大, 远离直杆的边缘, 应变随之减小, 并且离开直杆的边缘, 应变大小基本不变, 不变部分的应变和应用局部弹性理论的计算的应变一致, 这也证明了 Saint-Venant 原理的正确性.

4 结 论

本文基于 Kelvin 粘弹性体模型和 Ahmadi 非局部粘弹性应力应变关系, 利用 Laplace 变换, 选取对称的指数型核函数, 采用 Neumann 级数展开的方法求解 Volterra 方程, 导出了非局部 Kelvin 粘弹性杆在受到轴向拉力作用后的应变表达形式. 并得到了加载后的应变变化规律, 同时给出杆件受到拉力作用后的应变变化曲线, 这正是杆件的蠕变过程, 当时间趋近无穷大时, 本文结果退化为非局部弹性应变.

[参 考 文 献]

- [1] Eringen A C, Spziale C G, Kim B S. Crack-tip problem in nonlocal elasticity[J]. Journal of Mechanical Physics Solids, 1977, 25(1): 339-355.
- [2] Eringen A C. On continuous distributions of dislocations in nonlocal elasticity[J]. International Journal of Applied Physics, 1984, 56(10): 2675-2680.
- [3] 戴天民. 广义连续统场论在中国的进展[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 1999, 26(1): 1-11.
- [4] 戴天民. 广义连续统场论在中国的进展(续篇)[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 1999, 31(4): 295-301.

- [5] 黄再兴. 关于非局部理论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(II)——重论非线性非局部热弹性本构方程[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(7): 713-720.
- [6] 黄再兴. 关于非局部理论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(III)——重论线性非局部弹性理论[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(11): 1193-1197.
- [7] 周振功, 王彪. 采用新方法研究非局部理论中I型裂纹的断裂问题[J]. 应用力学和数学, 1999, 20(10): 1025-1032.
- [8] 周振功, 王彪. 双I型裂纹断裂动力学问题的非局部理论解[J]. 应用力学和数学, 2001, 22(7): 682-690.
- [9] Pisano A A, Fuschi P. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(1): 13-23.
- [10] Weckner O, Abeyaratne R. The effect of long-range forces on the dynamics of a bar[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 53(3): 705-728.
- [11] Lei Y J, Friswell M I, Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with nonlocal damping[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(11/12): 3381-3400.
- [12] Adhikari S, Lei Y J, Friswell M I. Dynamics of non-viscously damped distributed parameter systems[R]. AIAA-2005-1951, 2005.
- [13] Ahmadi G. Linear theory non-local viscoelasticity[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1975, 10(6): 253-258.
- [14] Nowinski J L. On the non-local aspects of stress in a viscoelastic medium[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1986, 21(6): 439-446.
- [15] 张义同. 热粘弹性理论[M]. 天津: 天津大学出版社, 2002, 4-10.
- [16] Polizzotto C. Nonlocal elasticity and related variational principles[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(42/43): 7359-7380.
- [17] Polizzotto C, Fuschi P, Pisano A A. A strain-difference-based nonlocal elasticity model[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(9/10): 2383-2401.

Strain Analysis of Nonlocal Viscoelastic Kelvin Bar in Tension

ZHAO Xue-chuan, LEI Yong-jun, ZHOU Jian-ping

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense
Technology, Changsha, Hunan 410073, P.R. China)

Abstract: Based on viscoelastic Kelvin model and nonlocal relationship of strain and stress, a nonlocal constitutive relationship of viscoelasticity was obtained and the strain response of a bar in tension was studied. By transforming governing equation of the strain analysis into Volterra integration form and by choosing a symmetric exponential form of kernel function and adapting Neumann series, the close form solution of strain field of the bar was obtained. The creep process of the bar is presented. When time approaches infinite, the strain of bar is equal to the one of nonlocal elasticity.

Key words: nonlocal theory; Kelvin viscoelasticity; Neumann series; bar; strain analysis