

# 平带驱动系统耦合振动的模态分析

李晓军<sup>1</sup>, 陈立群<sup>1,2</sup>

(1. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 力学系, 上海 200444)

(本刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 使用模态分析的方法研究平带驱动系统的耦合振动。平带驱动系统是由连续的可模型化为弦线的平带, 离散的滑轮和一个张紧臂组成的混合系统。从控制方程推导得到了系统的特征方程。通过数值计算, 研究了轴向运动速度和初始张力对系统频率的影响。

**关键词:** 平带驱动系统; 模态分析; 轴向运动弦线; 耦合振动; 频率

**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## 引 言

平带系统由轴向运动柔性平带和转动刚性滑轮构成, 在汽车工业中有广泛应用。对该系统的研究吸引了众多学者的兴趣<sup>[1-2]</sup>。一个典型的平带驱动系统可模型化为轴向运动的弦线和转动的质量, 其中弦线横向振动和质量转动振动相耦合。Ulsoy 等人考虑了带的横向振动与张紧滑轮振动的耦合, 发现张力涨落导致参数振动不稳定, 产生了带的大幅横向振动<sup>[3]</sup>。Beikmann 等人采用基于 Holzer 方法的双重迭代求解本征值问题, 研究了平带系统的线性耦合振动, 结果与实验值吻合<sup>[4]</sup>。他们还用模态截断和数值方法研究非线性耦合振动, 发现一种强耦合机制, 转动占优模态导致动态张力的涨落, 通过 1-2 内共振激起带的大幅横向振动, 这一结果也得到实验的验证<sup>[5]</sup>。Zhang 和 Zu 发展模态分析方法研究平带系统线性耦合振动, 得到对任意激励的响应和对简谐激励的稳态响应, 得到的数值结果与已有实验值吻合<sup>[6]</sup>。他们还推广多尺度法到混杂系统而分析了平带系统非线性耦合振动的自参数共振<sup>[7]</sup>, 其结果得到实验验证。对于计及离散粘性阻尼的平带系统, Zhang 和 Zu 等人建立了混杂系统的复模态分析方法, 得到对任意激励和初始条件的响应<sup>[8]</sup>。Parker 基于离散化提出一种有效的本征问题求解方法<sup>[9]</sup>。关于带驱动系统还有其它工作<sup>[10-12]</sup>。Zhang 和 Zu 的模态分析方法需要特殊的技巧, 而且没有得到显式的特征方程<sup>[5]</sup>。在这里, 作者发展了一种一般的模态分析方法, 从控制方程和边界条件推导得到了显式的特征方程。

收稿日期: 2006-12-13; 修订日期: 2007-11-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672092; 10725209); 上海市教委重点科研基金资助课题(07ZZ07); 上海市重点学科资助项目(Y0103)

作者简介: 李晓军(1981), 男, 江苏太昌人, 硕士生;

陈立群(1960), 教授, 博士(联系人, Tel: + 86 21-66134972; E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn)。

# 1 数学模型

图1描述了 Beikmann 等人的平带驱动系统典型模型<sup>[4]</sup> 该模型包括平带驱动系统的所有主要部件: 主动轮、从动轮、张紧轮和平带 为了简便起见, 假设系统不存在阻尼, 平带的抗弯刚度可以忽略不计, 轴向运动速度  $c$  是常数, 且在运动过程中平带与轮之间没有滑移

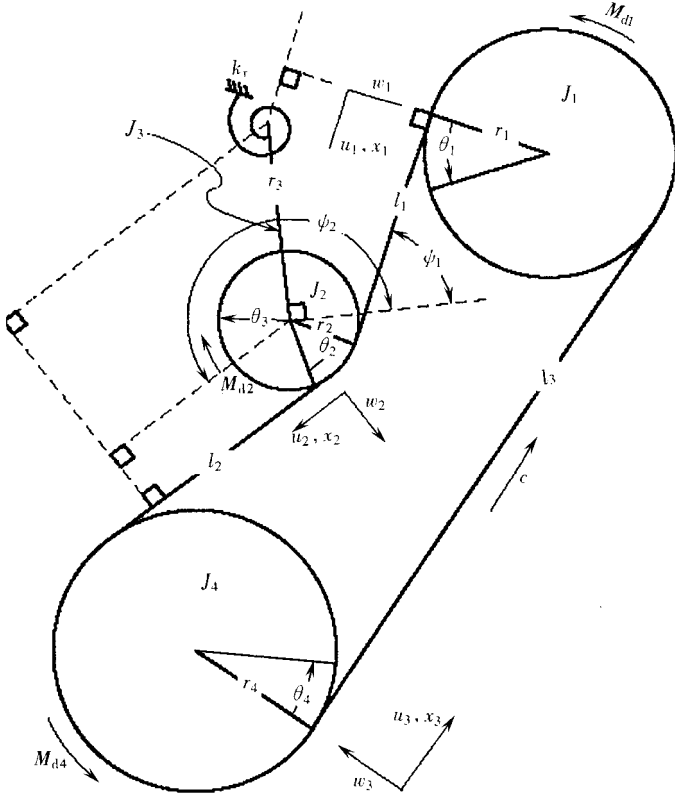


图 1 平带驱动系统

利用 Hamilton 原理可以推导出平带的控制方程以及边界条件<sup>[4]</sup> 带的控制方程为

$$m(w_i, u + 2cv_i, x_t) - P_i w_i, xx = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

边界条件为

$$\begin{cases} w_1(0, t) = 0, & w_1(l_1, t) - \psi_1(t) \sin \alpha_1 = 0, \\ w_2(0, t) - \psi_2(t) \sin \alpha_2 = 0, & w_2(l_2, t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中  $w_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是带  $i$  的相对于平衡位置的横向位移,  $m$  是平带的单位质量,  $P_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是带  $i$  在平衡位置的初始张力,  $P_{\dot{u}} = P_{0i} - mc^2$ ,  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是带  $i$  的长度  $\psi_1(t)$  是张紧轮的线位移,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  张紧臂在平衡位置时与相邻的带之间的夹角, 逗号后面的下标  $x$  和  $t$  表示对  $x$  和  $t$  取相应的偏导数

各轮的运动方程依次为

$$P_{d1} - P_{d3} - m_1 \ddot{\theta}_1 = 0, \quad P_{d2} - P_{d1} - m_2 \ddot{\theta}_2 = 0, \quad P_{d3} - P_{d2} - m_4 \ddot{\theta}_4 = 0, \tag{3}$$

其中  $\ddot{\theta}_i = r_i \ddot{\theta}_i$  ( $i = 1, 2, 4$ ),  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 4$ ) 分别为主动轮、张紧轮和从动轮的角位移,  $m_i = J_i/r_i^2$ ,  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为依次主动轮、张紧轮、张紧臂和从动轮的转动惯量, 除张紧轮是关于质心外其它各轮都是关于固定轴,  $P_{\dot{\theta}_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 定义如下

$$\begin{cases} P_{d1} = k_1(3\cos \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1), \\ P_{d2} = k_2(3\cos \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_2), P_{d3} = k_3(\alpha_1 - \alpha_4), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $k_i = EA/l_i (i = 1, 2, 3)$ ,  $E$  是弹性模量,  $A$  是带横截面积 张紧臂的运动方程为

$$\begin{aligned} & (-P_{t1}w_{1,x}(l_1, t) + mcw_{1,t}(l_1, t))\sin \alpha_1 + (P_{t2}w_{2,x}(0, t) - \\ & mcw_{2,t}(0, t))\sin \alpha_1 - k_1(3\cos \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1)\cos \alpha_1 - \\ & k_2(3\cos \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_2)\cos \alpha_2 - (k_s + k_{gr})\alpha_3 - m_3\alpha_3 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\alpha_3$  为张紧臂的线位移,  $k_s = k_r/r_3^2$ ,  $k_r$  是连接张紧臂的扭转弹簧的刚度系数,  $k_{gr}$  定义为

$$k_{gr} = (P_{t1}\sin \alpha_1 - P_{t2}\sin \alpha_2)/r_3, \quad (6)$$

$k_{gr}$  显示了张紧臂位移的变化 方程(5)中张紧臂的运动和邻近平带的横向振动相耦合

## 2 模态分析

假设轮做简谐振动, 则有如下形式的解:

$$i = \hat{w}_i e^{i\omega t} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad w_i(x, t) = \hat{w}_i(x) e^{i\omega t} \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

其中  $\omega$  为平带系统的固有振动频率

将等式(7)和(4)带入方程(1)、(2)和(3)消去时间项  $e^{i\omega t}$ , 得到

$$m(-\omega^2 \hat{w}_i + 2i c_{i,x}) - P_{ti} \hat{w}_{i,xx} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\hat{w}_1(0) = 0, \quad \hat{w}_1(l_1) - \alpha_3 \sin \alpha_1 = 0, \quad \hat{w}_2(0) - \alpha_3 \sin \alpha_2 = 0, \quad \hat{w}_2(l_2) = 1, \quad (9)$$

$$\begin{cases} P_{d1} - P_{d3} + \omega^2 m_1 \hat{\alpha}_1 = 0, P_{d2} - P_{d1} + \omega^2 m_2 \hat{\alpha}_2 = 0, \\ P_{d3} - P_{d2} + \omega^2 m_4 \hat{\alpha}_4 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (-P_{t1} \hat{w}_{1,x}(l_1) + i m c_{1,l_1}(l_1))\sin \alpha_1 + (P_{t2} \hat{w}_{2,x}(0) - i m c_{2,0}(0))\sin \alpha_2 - \\ & k_1(\alpha_3 \cos \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1)\cos \alpha_1 - k_2(\alpha_3 \cos \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_2)\cos \alpha_2 - \\ & (k_s + k_{gr})\alpha_3 - \omega^2 m_3 \alpha_3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $P_{di}$  为不含时间项的动张力

带1和带2的本征函数  $\hat{w}_i(x)$  可从方程(8)解得

$$\begin{cases} \hat{w}_1(x) = C_1 e^{i L_1 (mc - \sqrt{mP_{01}})/P_{t1}} + C_2 e^{i L_1 (mc + \sqrt{mP_{01}})/P_{t1}}, \\ \hat{w}_2(x) = D_1 e^{i L_2 (mc - \sqrt{mP_{02}})/P_{t2}} + D_2 e^{i L_2 (mc + \sqrt{mP_{02}})/P_{t2}}, \end{cases} \quad (12)$$

将式(12)带入边界条件(9), 所得结果与式(10)和(11)联立, 导出关于  $C_1, C_2, D_1, D_2, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$  的齐次线性方程组, 其矩阵形式为

$$A B = 0, \quad (13)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2_1 & 2_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 + k_3 - m_1 \omega^2 & -k_1 & -k_1 \cos \alpha_1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & k_1 \cos \alpha_1 - k_2 \cos \alpha_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 \cos \alpha_1 & k_1 \cos \alpha_1 - k_2 \cos \alpha_2 & k_4 & k_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & -k_2 & k_2 \cos \alpha_2 & k_2 + k_3 - m_4 \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中

$$i_1 = e^{(i l_i (mc - \sqrt{mP_{01}}))/P_{i1}}, \quad i_2 = e^{(i l_i (mc + \sqrt{mP_{01}}))/P_{i1}}, \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

$$k_4 = k_{gr} + k_s - 2i mc \sin^2 \alpha_2 + k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2 - m_3 \omega^2 - \sqrt{mP_{01}} \cot \frac{l_1 \sqrt{mP_{01}}}{P_{i1}} \sin^2 \alpha_1 + \sqrt{mP_{02}} \cot \frac{l_2 \sqrt{mP_{02}}}{P_{i2}} \sin^2 \alpha_2, \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \left\{ C_1 \ C_2 \ D_1 \ D_2 \ \hat{\alpha}_1 \ \hat{\alpha}_2 \ \hat{\alpha}_3 \ \hat{\alpha}_4 \right\}^T \quad (17)$$

平带驱动系统的特征方程可从非零解的存在条件推出 即方程(13)得系数行列式等于0

$$\det[A] = 0, \quad (18)$$

方程(18)和表达式(14)构成平带驱动系统的显式的特征方程

### 3 数值结果和分析

在这一节中,将通过数值计算讨论轴向运动速度和初始张力对平带驱动系统固有频率的影响 在计算中,几何和物理参数参照文献[4,6]选取如下:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.0889 \text{ m}, \quad r_2 = 0.0452 \text{ m}, \quad r_3 = 0.097 \text{ m}, \quad r_4 = 0.02697 \text{ m}, \\ l_1 &= 0.1548 \text{ m}, \quad l_2 = 0.3449 \text{ m}, \quad l_3 = 0.5518 \text{ m}, \quad \alpha_1 = 44.21^\circ, \quad \alpha_2 = 178.74^\circ, \\ J_1 &= 0.07248 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_2 = 0.000293 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_3 = 0.001165 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ J_4 &= 0.000293 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad k_r = 54.37 \text{ (N} \cdot \text{m)/rad}, \quad m = 0.1029 \text{ kg/m}, \quad EA = 170 \text{ kN} \end{aligned}$$

对上述给定参数及各带初始张力均为  $P_0 = 300 \text{ N}$ , 以及不同的轴向速度  $c$ , 数值求解特征方程(18)的前6个根, 得到图2 图2显示了轴向速度对前六阶固有频率的影响, 频率随着速度的增加而减小

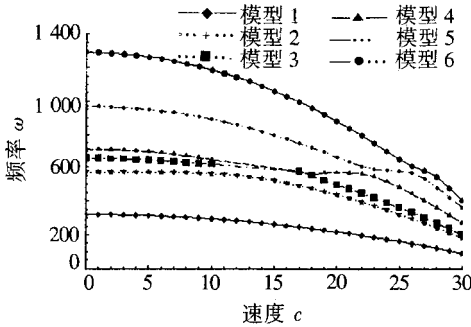


图2 前六阶模态的固有频率与轴向速度的关系

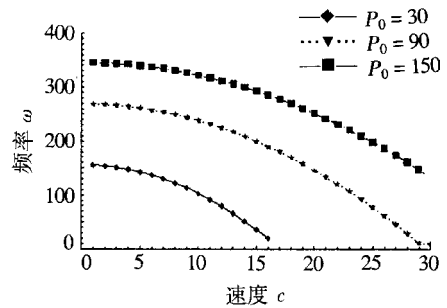


图3 不同轴向初始张力  $P_0$  对第一阶固有频率的影响

仍采用上述给定参数, 并依分别各带初始张力均为  $P_0 = 30 \text{ N}$ ,  $P_0 = 90 \text{ N}$ ,  $P_0 = 150 \text{ N}$ , 对不同的轴向速度  $c$ , 数值求解特征方程(18)的最小根, 得到图3 图3表明轴向初始张力对第一阶固有频率的影响, 频率随着张力的增加而增加

### 4 结 论

本文从平带驱动系统的控制方程和边界条件推导显式特征方程 数值结果显示系统固有频率随着平带的轴向速度的增加而减小, 随着平带的初始张力的增加而增加

## [参 考 文 献]

- [1] 陈立群. 平带驱动系统振动分析研究进展[J]. 力学与实践, 2001, **23**(4): 8-12.
- [2] Chen L Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings[J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 2005, **58**(2): 91-116.
- [3] Ulsoy A G, Whitesell J E, Hooven M D. Design of belt-tensioner systems for dynamic stability[J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1985, **107**(2): 282-290.
- [4] Beikmann R S, Perkins N C, Ulsoy A G. Free vibration of serpentine belt drive systems[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1996, **118**(3): 406-413.
- [5] Beikmann R S, Perkins N C, Ulsoy A G. Nonlinear coupled response of serpentine belt drive systems[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1996, **118**(4): 567-574.
- [6] Zhang L, Zu J W. Modal analysis of serpentine belt drive systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, **222**(2): 259-279.
- [7] Zhang L, Zu J W. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **232**(4): 783-806.
- [8] Zhang L, Zu J W, Hou Z. Complex modal analysis of non-self adjoint hybrid serpentine belt drive systems[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2001, **123**(1): 150-156.
- [9] Parker R G. Efficient eigensolution, dynamic response, and eigensensitivity of serpentine belt drives[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, **270**(1): 15-38.
- [10] Leany M J, Wasfy T M. Transient and steady-state dynamic finite element modeling of belt drives[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2002, **124**(3): 575-581.
- [11] Leany M J. On a perturbation method for the analysis of unsteady belt-drive operation[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2005, **72**(3): 570-580.
- [12] Tonoli A, Amati N, Zenerino E. Dynamic modeling of belt drive systems: effects of the shear deformations[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2006, **128**(4): 555-567.

## Modal Analysis of Coupled Vibration of Belt Drive Systems

LI Xiaojun<sup>1</sup>, CHEN Li-qun<sup>1, 2</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

**Abstract:** The modal method is applied to analyze coupled vibration of belt drive systems. A belt drive system is a hybrid system consisting of continuous belts modeled as strings as well as discrete pulleys and a tensioner arm. The characteristic equation of the system was derived from the governing equation. Numerical results demonstrate the effects of the transport speed and the initial tension on natural frequencies.

**Key words:** belt drive system; modal analysis; axially moving string; coupled vibration; frequency