

# 二维弹性平面问题中任意边界条件下 应力分布的封闭解\*

梁以德, 郑建军

(香港城市大学 建筑系, 香港九龙达之路)

**摘要:** 应用辛方法研究了正交各向异性二维平面  $(x, z)$  弹性问题, 在任意边界和不考虑梁假设条件下的解析应力分布解. 辛方法通过将位移和应力作为对偶量推导得到一组辛的偏微分方程组, 并且应用变量分离法对方程组进行了求解. 同动力学中的问题比较, 将弹性问题中的  $x$  轴模拟成时间轴, 这样  $z$  轴成为唯一一个独立的坐标轴. 问题中的 Hamilton 矩阵的指数展开具有辛的特征. 在齐次问题求解中, 通过边界条件和边界上的积分求得级数中的未知数. 齐次解中包括减阶的零特征值的特征向量(零本征向量)和完好的非零本征值的特征向量(非零本征向量). 零本征值的 Jordan 链给出了经典的 Saint Venant 解, 反映了平均的整体行为像刚体位移、刚体旋转和弯曲等. 另外, 非零本征向量反映的是指数衰减的局部解, 它们通常在 Saint Venant 原理下被忽略. 文中给出了完整的算例, 并且和已有结果进行了对比.

**关键词:** 横观各向同性; 特征函数; 辛展开

**中图分类号:** O343.1; O11 **文献标识码:** A

## 引 言

平面问题中的角点的奇异性问题、固定端的局部问题一直都是平面弹性问题中的一个难点. Williams<sup>[1]</sup>研究了板的角点的应力奇异问题. 通过协调和双协调函数的使用, Williams<sup>[1]</sup>对固定-固定、自由-自由、固定-自由 3 种不同边界情况下的奇异性问题做了详细的讨论. Timoshenko 和 Goodier<sup>[2]</sup>也研究了边界效应问题. 对于连续的面载荷, 应力函数表示为相应的 Fourier 级数. 结果表明, 在离开端部一个厚度距离时, 应力的分布已经不再受到端部的局部效应影响, 这和 Saint Venant 原理是一致的. Gregory 等人<sup>[3-5]</sup>通过对位移使用 Papkovitch-Fadle 特征向量展开研究拉力下的端部效应, 并给出了级数收敛的证明. Horgan 和 Simmonds<sup>[6]</sup>、Choi 和 Horgan<sup>[7]</sup>基于线弹性理论分析了端部效应的渐进性. Lin 和 Wan<sup>[8-9]</sup>引入广义 Cauchy 核的一类 Fredholm 积分等式, 研究了半无穷区域一端固定的拉伸、弯曲和柔度问题. Savoia 和 Tullini<sup>[10]</sup>使用横向不可压缩的位移模型研究了强正交各向异性梁. Leung 和 Su<sup>[11-12]</sup>基于分形有限元研究了应力奇异问题并给出了应力强度因子. 还有其他一些方法被用来研究端部效应问题, 像

\* 收稿日期: 2006-04-30; 修订日期: 2007-11-08

基金项目: 香港研究基金委员会(# CERG1157/06)资助项目

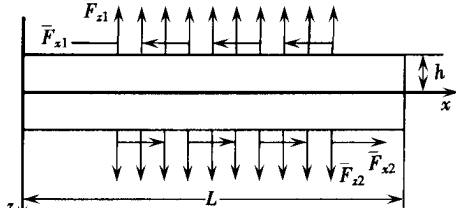
作者简介: 梁以德, 教授(联系人, E-mail: andew.leung@cityu.edu.hk).

三阶梁理论(Levinson<sup>[13]</sup>, Heyliger 和 Reddy<sup>[14]</sup>, Leung<sup>[15]</sup>)。

虽然已经发表了很多的相关研究,但是很少有基于严格的弹性理论给出的完整的应力分布解。Spence<sup>[16]</sup>指出,一般情况下很难保证双协调函数级数的收敛问题。本文使用基于二维弹性问题的辛方法研究了固定端的应力分布问题。在弹性问题中的独立坐标轴  $(x, z)$  很难分离,本文使用了辛级数展开。和动力学中的 Hamilton 公式相似,我们将  $x$  轴模拟成时间轴,这样  $z$  就成了 Hamilton 算子矩阵中位移的独立坐标,因此  $(x, z)$  得以分离。由此建立的控制方程是一系列的一阶微分方程,位移和共轭应力是其中的未知量。微分方程的系数矩阵在  $z$  上是 Hamilton 的,矩阵的指数展开是辛的。这里可以得到关于齐次边界的通解和相应的加载条件下的特解,通解中的常数可以由两端条件求得。齐次解中包括解向量空间中的退化的零本征根向量和完好的非零本征根向量。零本征根中的 Jordan 链解给出了和经典 Saint Venant 解一致的反映全局平均效应的解,像刚体位移、刚体旋转和弯曲等。另一方面,非零特征根向量给出了指数衰减的局部解。辛空间中的级数收敛性是自动满足的, Yao 等人<sup>[17]</sup>给出了相应的证明。本文给出了相应的数值算例,和已有结果进行了比较,并且第一次给出了正交各向异性梁的应力分布图。

## 1 理论公式

考虑  $xz$  平面内的复合材料梁,横观各向同性,在上、下表面分别受外力,如图 1 所示。梁长  $L$ , 厚度  $2h$ 。  $yz$  上的横截面是一单位宽度的矩形。材料的本构关系为



$$\begin{cases} \sigma_{xx} = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xz} = c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1)$$

$u$  和  $w$  表示沿 Cartesian 坐标  $x$  轴和  $z$  轴的位移;  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{zz}$  和  $\tau_{xz}$  分别表示正应力和剪应力;  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$  或  $i =$

图 1 平面复合材料厚梁

$j = 4$ ) 是材料的弹性系数。不考虑体力,平衡微分方程可以表示为

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

系统的能量方程  $E_p$  为

$$\delta E_p = \delta \left\{ \int_0^L \int_{-h}^h L dz dx - \int_0^L [(w F_{z2} + u F_{x2})_{z=h} - (w F_{z1} + u F_{x1})_{z=-h}] dx \right\} = 0, \quad (3)$$

$F_{z1}$ 、 $F_{z2}$ 、 $F_{x1}$  和  $F_{x2}$  是图 1 所示作用在上下表面的表面力。上式中的 Lagrange 应变能表达式为

$$L(u, w, u\dot{z}, w\dot{x}) = \frac{1}{2} \left[ c_{11} u\dot{z}^2 + 2c_{13} u\dot{z} w\dot{x} + c_{33} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + w\dot{x} \right)^2 \right], \quad (4)$$

$(\dot{\phantom{x}}) = \partial/\partial x$  表示对  $x$  求偏微分。Hamilton 式则可以定义为

$$H(u, w, \sigma, \tau) = \sigma u\dot{z} + \tau w\dot{x} - L(u, w, u\dot{z}, w\dot{x}), \quad (5)$$

$\sigma$  和  $\tau$  是对应于  $u$  和  $w$  的对偶变量,可以从下面的式子求得:

$$\sigma = \frac{\partial L}{\partial u\dot{z}} = c_{11} u\dot{z} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau = \frac{\partial L}{\partial w\dot{x}} = c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + u\dot{z} \right). \quad (6)$$

实际上对比公式(1)可以看出  $\sigma = \sigma_{xx}$  和  $\tau = \tau_{xz}$ 。下面的式子表示 Hamilton 体系中的对偶变量

关系,

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \boldsymbol{p} = - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad (7)$$

矢量  $\boldsymbol{q} = (u, w)^T$  和  $\boldsymbol{p} = (\sigma, \tau)^T$  分别表示构形向量和动量向量. 引入相空间向量  $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})^T$ , 公式(7)可以表示为矩阵形式:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}, \quad (8)$$

其中

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{c_{11}} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{44}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \left[ \frac{c_{13}^2}{c_{11}} - c_{33} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

是 Hamilton 算子矩阵. 对于等式(8)的求解可以分为齐次边界解加特解. 首先考虑齐次边界的情况, 上下表面 ( $z = \pm h$ ) 的应力条件为

$$\tau_{xz} = 0, \quad \sigma_z = 0. \quad (10)$$

分离变量法被用来求解方程, 解的形式假设为

$$\boldsymbol{v} = e^{\mu x} \boldsymbol{\phi}(z), \quad (11)$$

这里  $\mu$  表示沿  $x$  轴的特征根,  $\boldsymbol{\phi}(z)$  表示特征向量.

### 1.1 零特征根向量

将公式(11)带入公式(8), 可以发现行列式在多重根  $\mu = 0$  上是退化的以及零特征根向量是减次的(Leung<sup>[18]</sup>). 本节给出了减次特征根问题的一系列的 Jordan 型解和它们表示的物理意义.

从公式(8)中可以求得零本征根的两个基本解为

$$\boldsymbol{\phi}_f^{(0)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \boldsymbol{\phi}_s^{(0)} = (0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad (12)$$

它们之间互相线性无关, 都属于零阶的 Jordan 解. 下标  $f$  表示第 1 条 Jordan 链,  $s$  表示第 2 条 Jordan 链. 向量(12)是原问题的解, 可以写为

$$\boldsymbol{v}_f^{(0)} = \boldsymbol{\phi}_f^{(0)}, \quad \boldsymbol{v}_s^{(0)} = \boldsymbol{\phi}_s^{(0)}, \quad (13)$$

它们分别表示沿  $x$  和  $z$  轴方向的刚体位移. 1 阶 Jordan 解的求解可以得

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \boldsymbol{\phi}^{(0)}, \quad (14)$$

可以求得

$$\boldsymbol{\phi}_f^{(1)} = (0 \ -\beta_{1z} \ \beta_2 \ 0), \quad \boldsymbol{\phi}_s^{(1)} = (-z \ 0 \ 0 \ 0), \quad (15)$$

但是, 1 阶 Jordan 解并不是特征向量. 通过公式(8), 原特征值问题的特征向量实际上是

$$\boldsymbol{v}_f^{(1)} = \boldsymbol{\phi}_f^{(1)} + x\boldsymbol{\phi}_f^{(0)}, \quad \boldsymbol{v}_s^{(1)} = \boldsymbol{\phi}_s^{(1)} + x\boldsymbol{\phi}_s^{(0)}. \quad (16)$$

公式(16)写成分量形式为

$$u_f^{(1)} = x, \quad w_f^{(1)} = -\beta_{1z}, \quad \sigma_f^{(1)} = \beta_2, \quad \tau_f^{(1)} = 0, \quad (17a)$$

$$u_s^{(1)} = -z, \quad w_s^{(1)} = x, \quad \sigma_s^{(1)} = 0, \quad \tau_s^{(1)} = 0. \quad (17b)$$

可以看出,  $\boldsymbol{v}_f^{(1)}$  表示均匀拉力下的解而  $\boldsymbol{v}_s^{(1)}$  表示面内刚体旋转的解. 同样地, 2 阶 Jordan 解

$\phi^{(2)}$  可以通过下式求得:

$$\mathbf{H}\phi^{(2)} = \phi^{(1)}. \quad (18)$$

这里需要指出的是 2 阶 Jordan 解  $\phi_f^{(2)}$  不满足齐次问题的表面边界条件公式 (10), 因此相应的解的特征向量就不存在. 唯一有效的 2 阶 Jordan 解向量是

$$\phi_s^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\beta_1 z^2 + c_1 & -\beta_2 z & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

但它仍不是原问题的特征向量, 原问题特征向量是

$$\mathbf{v}_s^{(2)} = \phi_s^{(2)} + x\phi_s^{(1)} + \frac{1}{2}x^2\phi_s^{(0)}. \quad (20)$$

等式 (20) 的分量形式为

$$u_s^{(2)} = -xz, \quad w_s^{(2)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\beta_1 z^2 + c_1, \quad \sigma_s^{(2)} = -\beta_2 z, \quad \tau_s^{(2)} = 0, \quad (21)$$

式中  $\tau_s^{(2)} = 0$ , 所以  $\mathbf{v}_s^{(2)}$  表示的是纯弯矩受力下的解. 3 阶 Jordan 解是

$$\phi_s^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{z^3}{6}\beta_3 - c_1 z - \frac{h^2 z}{2c_{44}}\beta_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_2(z^2 - h^2) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

可以得到原问题的特征向量

$$\mathbf{v}_s^{(3)} = \phi_s^{(3)} + x\phi_s^{(2)} + \frac{1}{2}x^2\phi_s^{(1)} + \frac{1}{6}x^3\phi_s^{(0)}, \quad (23)$$

分量形式为

$$u_s^{(3)} = \frac{z^3}{6}\beta_3 - \left[ c_1 + \frac{h^2}{2c_{44}}\beta_2 + \frac{1}{2}x^2 \right] z, \quad w_s^{(3)} = x \left[ \frac{1}{2}\beta_1 z^2 + c_1 \right] + \frac{1}{6}x^3, \quad (24a)$$

$$\sigma_s^{(3)} = -\beta_2 x z, \quad \tau_s^{(3)} = \frac{1}{2}\beta_2(z^2 - h^2). \quad (24b)$$

可以看出剪力  $\tau_s^{(3)} = \beta_3(z^2 - h^2)/2$  沿  $x$  轴不变, 因此特征向量表示了常剪力作用下的解. 第 2 条 Jordan 链在这里也断链了, 因为下阶 Jordan 解不满足齐次边界条件. 至此, 所有的 Jordan 解都已经求出.

常数  $\beta_i (i = 1, \dots, 3)$  和  $c_1$  的表达式在附录中给出. 可以证明, 上述的解组成一个完整的齐次问题零本征根的解空间. 对于特解的可以通过解 Jordan 方程求得. 对于沿着  $x$  轴有外力剪力的特解可以通过求解  $\mathbf{H}\phi = k\phi_f^{(1)}$  得到. 同样的, 沿着  $z$  轴的正应力作用的特解可以通过求解  $\mathbf{H}\phi = k\phi_s^{(3)}$  得到.  $k$  是常数, 可以由表面力大小求得. 例如, 在表面上作用有力  $F_{z_1}$  和  $F_{z_2}$ , 如图 1 所示. 因此, 面力条件可以写为

$$\begin{cases} \left[ c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right] \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{c_{11}} \sigma_{xx} = F_{z1}, & \text{当 } x = -h, \end{cases} \quad (25a)$$

$$\begin{cases} \left[ c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right] \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{c_{11}} \sigma_{xx} = F_{z2}, & \text{当 } x = h. \end{cases} \quad (25b)$$

为了求得特解, 我们求解下面的方程:

$$\mathbf{H}\phi = k\phi_s^{(3)}. \quad (26)$$

对公式 (26) 中的第 4 式积分可以得到

$$\left[ \frac{c_{13}}{c_{11}} - c_{33} \right] \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_{13}}{c_{11}} \sigma_{xx} = \frac{1}{3}k\beta_2(z^3 - h^2 z) + c', \quad (27)$$

$c'$  是未知常数. 考虑等式 (25), 可以求得  $k$  和  $c'$ . 回代入公式 (26) 可以求得对应的特解  $\mathbf{v}$ .

## 1.2 非零特征根向量

对于非零特征根  $\mu \neq 0$ , 相应的特征向量是随着距离指数衰减的. 对于良性零本征根向

量, 首先要确定  $z$  方向的特征根  $\lambda$ . 本文中, 特征多项式可以写为

$$\det \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{c_{13}}{c_{11}}\lambda & \frac{1}{c_{11}} & 0 \\ -\lambda & -\mu & 0 & \frac{1}{c_{44}} \\ 0 & 0 & -\mu & -\lambda \\ 0 & \left( \frac{c_{13}^2}{c_{11}} - c_{33} \right) \lambda^2 & -\frac{c_{13}}{c_{11}}\lambda & -\mu \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

展开(28)式得到

$$a_0(S^2)^2 + a_1S^2 + a_2 = 0, \quad (29)$$

$S = N\mu$ . 通过求解特征多项式可以得到根  $S_i^2 (i = 1, 2)$ .  $a_i (i = 0, 1, 2)$  是特征多项式的系数项, 具体表达式在附录中给出. 对于不同的  $S_i^2$ , 有以下 3 种不同的情况:

1) 对于实数 ( $S_1 \in \mathbf{R}, S_2 \in \mathbf{R}$ ) 并且是不相等根 ( $S_1 \neq S_2$ ), 解的表达式为

$$\begin{cases} u = A_1e^{S_1z} + B_1e^{-S_1z} + C_1e^{S_2z} + D_1e^{-S_2z}, \\ w = A_2e^{S_1z} + B_2e^{-S_1z} + C_2e^{S_2z} + D_2e^{-S_2z}, \\ \sigma = A_3e^{S_1z} + B_3e^{-S_1z} + C_3e^{S_2z} + D_3e^{-S_2z}, \\ \tau = A_4e^{S_1z} + B_4e^{-S_1z} + C_4e^{S_2z} + D_4e^{-S_2z}. \end{cases} \quad (30a)$$

2) 对于实数 ( $S_1 \in \mathbf{R}, S_2 \in \mathbf{R}$ ) 并且重根 ( $S_1 = S_2$ ), 解的表达式为

$$\begin{cases} u = A_1e^{S_1z} + B_1e^{-S_1z} + C_1ze^{S_1z} + D_1ze^{-S_1z}, \\ w = A_2e^{S_1z} + B_2e^{-S_1z} + C_2ze^{S_1z} + D_2ze^{-S_1z}, \\ \sigma = A_3e^{S_1z} + B_3e^{-S_1z} + C_3ze^{S_1z} + D_3ze^{-S_1z}, \\ \tau = A_4e^{S_1z} + B_4e^{-S_1z} + C_4ze^{S_1z} + D_4ze^{-S_1z}. \end{cases} \quad (30b)$$

3) 对于复数根 ( $S_1 = \pm(\lambda_1 + i\lambda_2), S_2 = \pm(\lambda_1 - i\lambda_2)$ ),  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  为实数, 解的表达式为

$$\begin{cases} u = A_1e^{\lambda_1z} \cos \lambda_2z + B_1e^{\lambda_1z} \sin \lambda_2z + C_1e^{-\lambda_1z} \cos \lambda_2z + D_1e^{-\lambda_1z} \sin \lambda_2z, \\ w = A_2e^{\lambda_1z} \cos \lambda_2z + B_2e^{\lambda_1z} \sin \lambda_2z + C_2e^{-\lambda_1z} \cos \lambda_2z + D_2e^{-\lambda_1z} \sin \lambda_2z, \\ \sigma = A_3e^{\lambda_1z} \cos \lambda_2z + B_3e^{\lambda_1z} \sin \lambda_2z + C_3e^{-\lambda_1z} \cos \lambda_2z + D_3e^{-\lambda_1z} \sin \lambda_2z, \\ \tau = A_4e^{\lambda_1z} \cos \lambda_2z + B_4e^{\lambda_1z} \sin \lambda_2z + C_4e^{-\lambda_1z} \cos \lambda_2z + D_4e^{-\lambda_1z} \sin \lambda_2z, \end{cases} \quad (30c)$$

$A_i, B_i, C_i$  和  $D_i (i = 1, \dots, 4)$  是未知系数, 可以通过两端边界条件确定. 将公式(30) 带入公式(8) 并且参考相应的齐次边界条件, 可以得到一个关于  $\mu$  的等式并且求得一系列的  $\mu$  值. 例如, 将公式(30a) 带入公式(8), 得到

$$\begin{pmatrix} -\mu & -\frac{c_{13}S_1\mu}{c_{11}} & \frac{1}{c_{11}} & 0 \\ -S_1\mu & -\mu & 0 & \frac{1}{c_{44}} \\ 0 & 0 & -\mu & -S_1\mu \\ 0 & \left( \frac{c_{13}^2}{c_{11}} - c_{33} \right) S_1^2\mu^2 & -\frac{c_{13}}{c_{11}}S_1\mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

非平凡解为

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{A_1(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})}, & A_3 = -\frac{A_1 \mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{c_{13} + c_{44}}, \\ A_4 = \frac{A_1 \mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})}, \end{cases} \quad (32a)$$

这里  $A_2, A_3$  和  $A_4$  可以表示为  $A_1$  的函数。同样地,  $B_1, C_1$  和  $D_1$  被选做独立的参数,

$$\begin{cases} B_2 = \frac{B_1(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})}, & B_3 = -\frac{B_1 \mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{c_{13} + c_{44}}, \\ B_4 = -\frac{B_1 \mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})}; \end{cases} \quad (32b)$$

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{C_1(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})}, & C_3 = -\frac{C_1 \mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{c_{13} + c_{44}}, \\ C_4 = \frac{C_1 \mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})}; \end{cases} \quad (32c)$$

$$\begin{cases} D_2 = \frac{D_1(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})}, & D_3 = -\frac{D_1 \mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{c_{13} + c_{44}}, \\ D_4 = -\frac{D_1 \mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})}. \end{cases} \quad (32d)$$

将等式(30a)和(32a~d)代入边界条件等式(10)得到

$$\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad (33)$$

$\mathbf{Y} = (A_1, B_1, C_1, D_1)^T$ ,  $\mathbf{M}$  是一个关于  $\mu$  的  $4 \times 4$  的矩阵,  $\mathbf{M}$  的元素在附录中给出。要使方程有非平凡解,  $\mathbf{M}$  的行列式必须为零。由此得到一个关于  $\mu$  的超越方程, 本文采用 Newton-Raphson 法求解方程。需要强调的是,  $\mu$  一般是复数。对于每个  $\mu$  可以构造对应的特征函数级数。这些特征函数是随着离开边界的距离而衰减的, 符合 Saint Venant 原理。它们表示的是材料科学中的局部解, Timoshenko 和 Goodier<sup>[2]</sup> 对此也有阐述。解的构造如下:

$$\mathbf{v}_n = e^{\mu_n z} \phi_n, \quad (34)$$

$\mu_n$  是特征根,  $\phi_n$  是对应的解向量。根据  $\mu$  的实部的符号不同, 解可以划分为:  $\alpha$  集合—— $\mu$  的实部的符号为正,  $\alpha'$  集合—— $\mu$  的实部的符号为负。 $\alpha$  集合中的解沿着  $x$  轴的反向衰减,  $\alpha'$  集合中的解沿着  $x$  轴的正向衰减, 它们反映了不同端部的分布情况。本文研究固定端  $x = 0$ , 因此级数解中采用了  $\alpha'$  集合的级数。

### 1.3 边界值问题

因此, 广义的解的形式为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^K m_i \mathbf{v}^{(i)}, \quad (35)$$

这里  $\mathbf{v}^{(i)}$  是辛空间中的特征向量, 包括零本征根特征向量和非零本征根特征向量。 $K$  是向量的项数,  $m_i$  是未知常数, 可以由边界条件确定。 $\mathbf{v}$  表示特解的特征向量。

用 Hamilton 混合能变分求解未知变量  $m_i$ 。两端边界条件可以写为

$$x = 0: \quad (\mathbf{q} = \mathbf{q}_0)_{\Gamma_{u_0}}, \quad (\mathbf{p} = \mathbf{p}_0)_{\Gamma_{\sigma_0}}, \quad (36a)$$

$$x = L: \quad (\mathbf{q} = \mathbf{q}_L)_{\Gamma_{u_L}}, \quad (\mathbf{p} = \mathbf{p}_L)_{\Gamma_{\sigma_L}}. \quad (36b)$$

考虑到边界条件等式(5), Hamilton 混合能变分式为

$$\left\{ \int_0^L \int_{-h}^h [p^T q - H(q, p)] dz dx - \int_{-h}^h [p^T (q - q_L)]_{\Gamma_{ud}} dz - \int_{-h}^h [p^T q]_{\Gamma_{\alpha}} dz + \int_{-h}^h [p^T (q - q_0)]_{\Gamma_{u0}} dz + \int_{-h}^h [p^T q]_{\Gamma_{\alpha0}} dz \right\} = 0, \quad (37)$$

$q_0$  和  $q_L$  表示两端边界上已知位移;  $p_0$  和  $p_L$  表示两端边界上已知应力。展开变分式得到积分边界条件

$$\int_{-h}^h \left\{ [(\delta q)^T (p - p_L)]_{\Gamma_{\alpha}} - [(\delta p)^T (q - q_L)]_{\Gamma_{ud}} - [(\delta q)^T (p - p_0)]_{\Gamma_{\alpha0}} + [(\delta p)^T (q - q_0)]_{\Gamma_{u0}} \right\} dz = 0. \quad (38)$$

公式(38)给出了两端的积分边界条件。和 Saint Venant 原理不同的是,变分式从能量的角度给出了一个更加合理的边界条件。特别地,通过非零本征根向量的引入,在固定端附近的位移和应力分布可以得到更加精确的分析结果。

将公式(35)代入(38),得到一个关于  $\delta m_i$  的变分方程:

$$\int_{-h}^h \left\{ \left[ \left( \sum_{i=1}^n m_i q_i \right)^T \left( p + \sum_{i=1}^n m_i p^{(i)} - p_L \right) \right]_{\Gamma_{\alpha}} - \left[ \left( \sum_{i=1}^n \delta m_i p_i \right)^T \left( q + \sum_{i=1}^n m_i q^{(i)} - q_L \right) \right]_{\Gamma_{ud}} - \left[ \left( \sum_{i=1}^n \delta m_i q_i \right)^T \left( p + \sum_{i=1}^n m_i p^{(i)} - p_0 \right) \right]_{\Gamma_{\alpha0}} + \left[ \left( \sum_{i=1}^n \delta m_i p_i \right)^T \left( q + \sum_{i=1}^n m_i q^{(i)} - q_0 \right) \right]_{\Gamma_{u0}} \right\} dz = 0. \quad (39)$$

等式(39)对于任意的  $\delta m_i$  都成立,由此得到一个关于  $m_i$  的  $n$  维的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - G_1 \\ F_2 - G_2 \\ \vdots \\ F_n - G_n \end{pmatrix}. \quad (40)$$

表达式中的矩阵元素为

$$\begin{cases} E_{ij} = \int_{-h}^h [ (p_i^T q_j)_{\Gamma_{u0}} - (q_i^T p_j)_{\Gamma_{\alpha0}} - (p_i^T q_j)_{\Gamma_{ud}} + (q_i^T p_j)_{\Gamma_{\alpha}} ] dz & (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ F_i = \int_{-h}^h [ (p_i^T q_0)_{\Gamma_{u0}} - (q_i^T p_0)_{\Gamma_{\alpha0}} - (p_i^T q_L)_{\Gamma_{ud}} + (q_i^T p_L)_{\Gamma_{\alpha}} ] dz & (i = 1, 2, \dots, n), \\ G_i = \int_{-h}^h [ (p_i^T q)_{\Gamma_{u0}} - (q_i^T p)_{\Gamma_{\alpha0}} - (p_i^T q)_{\Gamma_{ud}} + (q_i^T p)_{\Gamma_{\alpha}} ] dz & (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (41)$$

通过求解  $m_i$  最终可以求得需要的解。

## 2 数值计算

### 2.1 例 1

考虑半无穷长各向同性梁,在端部  $x = +\infty$  处分别作用两种不同的力(见图 2): (a) 简单

拉力  $P$ ; (b) 纯弯矩  $M$ •

位移边界条件

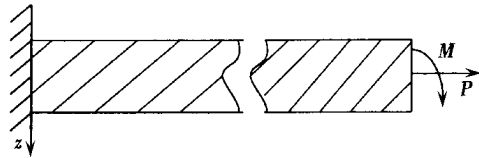
$$x = 0, u_0 = 0, w_0 = 0; \tag{42}$$

$x = X (X \gg 0)$  截面处的力边界条件可以表示为

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx} dz = P, \int_{-h}^h \sigma_{xxz} dz = 0, \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = 0 \quad (\text{情况(a)}), \tag{43a}$$

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx} dz = 0, \int_{-h}^h \sigma_{xxz} dz = M, \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = 0 \quad (\text{情况(b)})• \tag{43b}$$

因此可以有



$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2h}, \tau_{xz} = 0 \quad (\text{情况(a)}), \tag{44a}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3Mz}{2h^3}, \tau_{xz} = 0 \quad (\text{情况(b)})• \tag{44b}$$

图 2 半无穷梁  $x = +\infty$  处受力

将边界条件回代等式(40) 求出未知系数  $m_i$ •

表 1 2 种受力情况下固定端应力分布 ( $\nu = 1/4$ )

$z$	$\sigma_{xx}^T(0, z)/P$	$\tau_{xz}^T(0, z)/P$	$\sigma_{xx}^B(0, z)/M$	$\tau_{xz}^B(0, z)/M$
0.0	0.464	0.0	0.0	- 0.117
	(0.463)	(0.0)	(0.0)	(- 0.125)
0.1	0.464	- 0.009	- 0.139	- 0.115
	(0.464)	(- 0.010)	(- 0.136)	(- 0.122)
0.2	0.465	- 0.019	- 0.278	- 0.108
	(0.465)	(- 0.021)	(- 0.273)	(- 0.112)
0.3	0.466	- 0.029	- 0.418	- 0.096
	(0.467)	(- 0.030)	(- 0.412)	(- 0.096)
0.4	0.467	- 0.039	- 0.557	- 0.079
	(0.470)	(- 0.040)	(- 0.555)	(- 0.076)
0.5	0.470	- 0.051	- 0.697	- 0.054
	(0.473)	(- 0.049)	(- 0.699)	(- 0.052)
0.6	0.474	- 0.063	- 0.837	- 0.022
	(0.477)	(- 0.059)	(- 0.842)	(- 0.024)
0.7	0.483	- 0.079	- 0.980	0.023
	(0.481)	(- 0.072)	(- 0.979)	(0.013)
0.8	0.502	- 0.098	- 1.132	0.088
	(0.491)	(- 0.097)	(- 1.113)	(0.084)
0.9	0.553	- 0.128	- 1.322	0.194
	(0.549)	(- 0.150)	(- 1.313)	(0.239)

\* 括号中为本文解

表 1 给出了沿着边界上 10 个点上的应力值, Poisson 比  $\nu = 1/4$ • 上标 T 和 B 分别表示简单拉力和纯弯矩情况• 并且同文献[4] 中给出的结果做了比较• 表中应力值的波动是在数值



计算时由于级数项数的选取而引起的。Gregory 和 Gladwell<sup>[4]</sup> 在研究此问题时, 着重讨论了级数的收敛和收敛速度。本文结果保证了在上下表面上的齐次边界条件, 同时由于辛空间中的特征向量的性质, 级数的收敛性也得到了保障。辛方法取得了令人满意的结果。

2.2 例 2

图 3 给出了一厚的正交各向异性梁, 上下表面分别受到  $q/2$  的均布载荷, 长厚比  $L/(2h) = 4$ 。弹性参数分别为:  $E_1 = 175 \text{ GPa}$ ,  $E_1/E_2 = 25$ ,  $E_1/G_{12} = 50$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ 。两端边界条件为

$$x = 0, \quad u = w = 0; \quad (45a)$$

$$x = L, \quad \sigma_{xx} = \tau_{xz} = 0 \quad (45b)$$

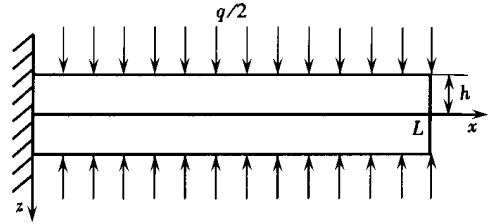
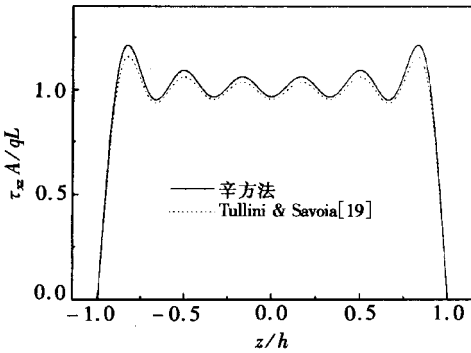


图 3 上下表面受均布力的悬臂梁

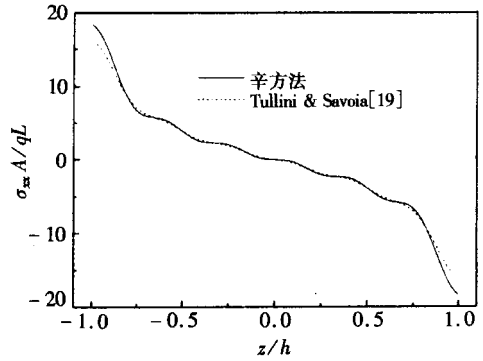
图 4~ 图 6 给出了固定端的应力分布。展开级数中包括的非零本征根向量数从 5 增加到了 50。

本文结果同 Tullini 和 Savoia<sup>[19]</sup> 给出的结果进行了比较。图 7 给出了解析解的剪应力分布的等值线图, 图 8 给出的是不考虑端部效应下的剪应力分布等值线图。图 9 进一步给出了详细的结果。

作为比较, 图 10 给出了 ANSYS 结算的有限元结果。ANSYS 计算时采用了单元 Plane13。

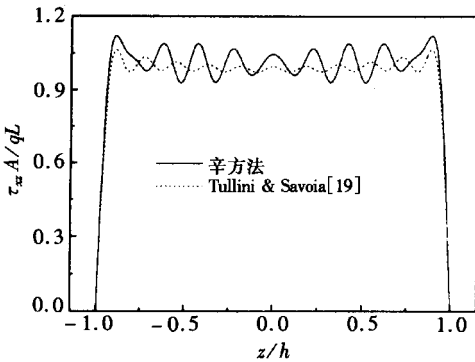


(a)

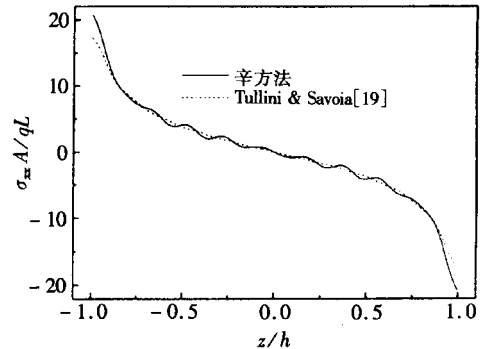


(b)

图 4 固定端应力分布(级数展开中包含 5 项非零本征根向量)

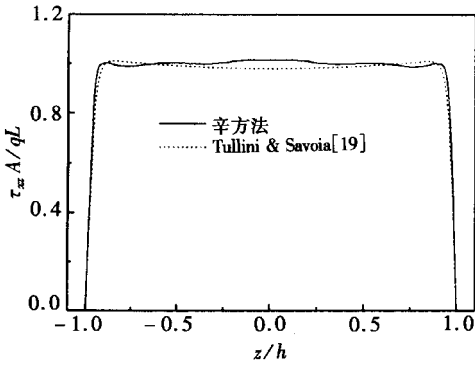


(a)

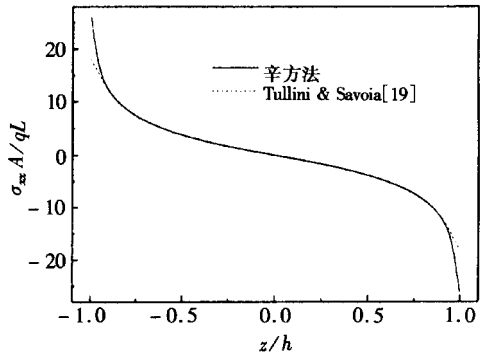


(b)

图 5 固定端应力分布(级数展开中包含 10 项非零本征根向量)



(a)



(b)

图6 固定端应力分布(级数展开中包含50项非零本征根向量)

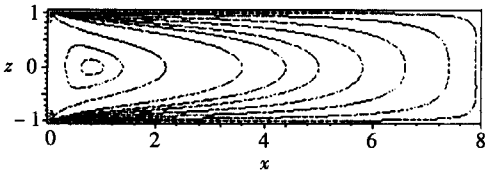


图7 剪应力解析解等值线图

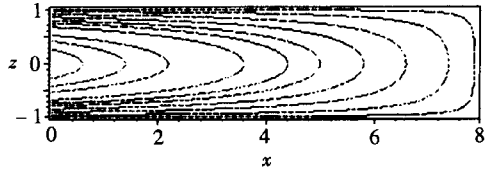


图8 剪应力 Saint Venant 解等值线图

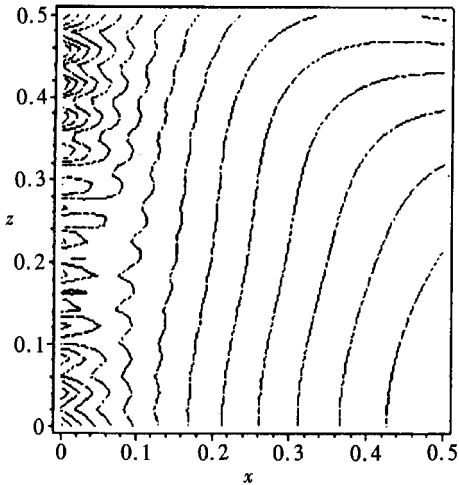


图9 剪应力解析解等值线图

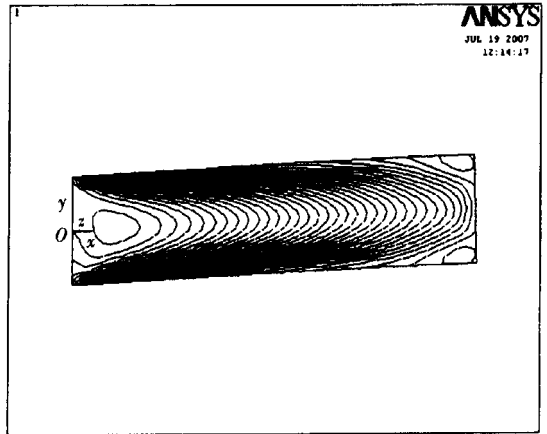


图10 ANSYS 给出剪应力等值线图

( $x$  和  $z$  方向网格划分为  $64 \times 16$ )

### 3 结 论

本文基于二维弹性理论, 在没有引入任何梁假设情况下, 研究了厚悬臂梁的完整的应力分布情况。通过 Hamilton 混合能原理, 使用辛方法求得了新的解析解。通过辛正交和共轭性质, 收敛的特征向量级数被用来研究端部效应和角点应力。辛方法是一种合理的解析的方法, 在边界条件处理上更为有利, 并且不需要传统的半逆解法中的试解。第一次给出了完整的应力分布图。

致谢 本研究受到了香港研究基金委员会# CERG1157/06 的资助, 在此表示感谢。

## 附 录

公式(15)~(24)中的参数

$$\beta_1 = \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad \beta_2 = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}}, \quad \beta_3 = -\beta_1 + \frac{1}{c_{44}}\beta_2, \quad c_1 = \frac{h^2}{5} \left[ -\frac{1}{c_{44}}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1 \right].$$

公式(26)中的常数

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \beta_3 - \beta_1, \quad a_2 = c_{11}/c_{13}$$

等式(30)中矩阵  $M$  的元素

$$M = (M_{ij}) \quad (i, j = 1, \dots, 4),$$

$$M_{11} = -\frac{\mu c_{33}(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_1 u_h}, \quad M_{12} = -\frac{\mu c_{33}(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_1 u_h},$$

$$M_{13} = -\frac{\mu c_{33}(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_2 u_h}, \quad M_{14} = -\frac{\mu c_{33}(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_2 u_h},$$

$$M_{21} = -\frac{\mu c_{33}(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_1 u_h}, \quad M_{22} = -\frac{\mu c_{33}(S_1^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_1 u_h},$$

$$M_{23} = -\frac{\mu c_{33}(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_2 u_h}, \quad M_{24} = -\frac{\mu c_{33}(S_2^2 c_{44} + c_{11})}{c_{13} + c_{44}} e^{-S_2 u_h},$$

$$M_{31} = \frac{\mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})} e^{-S_1 u_h}, \quad M_{32} = -\frac{\mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})} e^{-S_1 u_h},$$

$$M_{33} = \frac{\mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})} e^{-S_2 u_h}, \quad M_{34} = -\frac{\mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})} e^{-S_2 u_h},$$

$$M_{41} = \frac{\mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})} e^{-S_1 u_h}, \quad M_{42} = -\frac{\mu c_{44}(S_1^2 c_{13} - c_{11})}{S_1(c_{13} + c_{44})} e^{-S_1 u_h},$$

$$M_{43} = \frac{\mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})} e^{-S_2 u_h}, \quad M_{44} = -\frac{\mu c_{44}(S_2^2 c_{13} - c_{11})}{S_2(c_{13} + c_{44})} e^{-S_2 u_h}.$$

## [参 考 文 献]

- [1] Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1952, 19(4): 526-528.
- [2] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [3] Gregory R D. The traction boundary-value problem for the elastostatic semi-infinite strip: existence of solution, and completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunctions [J]. Journal of Elasticity, 1980, 10(3): 295-327.
- [4] Gregory R D, Gladwell I. The cantilever beam under tension, bending or flexure at infinity [J]. Journal of Elasticity, 1982, 12(4): 317-343.
- [5] Gregory R D, Wan F Y M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory [J]. Journal of Elasticity, 1984, 14(1): 27-64.
- [6] Horgan C O, Simmonds J G. Asymptotic analysis of an end-loaded, transversely isotropic, elastic, semi-infinite strip weak in shear [J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27(15): 1895-1914.
- [7] Choi I, Horgan C O. Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1977, 44(3): 424-430.
- [8] Lin Y H, Wan F Y M. Bending and flexure of semi-infinite cantilevered orthotropic strips [J]. Computers & Structures, 1990, 35(4): 349-359.

- [9] Lin Y H, Wan F Y M. Semi-infinite orthotropic cantilevered strips and the foundations of plate theories[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1990, **82**(3): 217-244.
- [10] Savoia M, Tullini N. Beam theory for strongly orthotropic materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(17): 2459-2484.
- [11] Leung A Y T, Su R K L. Mode-I crack problems by fractal 2-level finite element methods[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, **48**(6): 847-856.
- [12] Leung A Y T, Su R K L. Order of the singular stress fields of through-thickness cracks[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **75**(1): 85-93.
- [13] Levinson M. A new rectangular beam theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, **74**(1): 81-87.
- [14] Heyliger P R, Reddy J N. A higher order beam finite element for bending and vibration problems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, **126**(2): 309-326.
- [15] Leung A Y T. An improved 3rd-order beam theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **142**(3): 527-528.
- [16] Spence D A. A class of biharmonic end-strip problems arising in elasticity and Stokes flow[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1983, **30**(2): 107-139.
- [17] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [18] Leung A Y T, Chan J K W. Null space solution of Jordan chains for derogatory eigenproblems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **222**(4): 679-690.
- [19] Tullini N, Savoia M. Logarithmic stress singularities at clamped-free corners of a cantilever orthotropic beam under flexure[J]. *Composite Structures*, 1995, **32**(1/4): 659-666.
- [20] Leung A Y T, Xu X S, Gu Q, et al. The boundary layer phenomena in two-dimensional transversely isotropic piezoelectric media by exact symplectic expansion[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(11): 2381-2408.
- [21] Mielke A. On Saint-Venant's problem for an elastic strip[J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1988, **110**(1/2): 161-181.
- [22] Zhong W X, Lin J H, Zhu J P. Computation of gyroscopic systems and symplectic eigensolutions of skew-symmetrical matrices[J]. *Computers & Structures*, 1994, **52**(5): 999-1009.
- [23] Zhong W X, Williams F W. Physical interpretation of the symplectic orthogonality of the eigensolutions of a Hamiltonian or symplectic matrix[J]. *Computers & Structures*, 1993, **49**(4): 749-750.
- [24] Zhong W X, Williams F W. On the direct solution of wave-propagation for repetitive structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **181**(3): 485-501.
- [25] Xu X S, Zhong W X, Zhang H W. The Saint-Venant problem and principle in elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, **34**(22): 2815-2827.
- [26] Zhang H W, Zhong W X, Li Y P. Stress singularity analysis at crack tip on bi-material interfaces based on Hamiltonian principle[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, **9**(2): 124-138.

# Closed Form Stress Distribution in 2D Elasticity for all Boundary Conditions

A. Y. T. Leung, ZHENG Jia-jun

( Department of Building and Construction , City University of Hong Kong,  
Hong Kong, P. R. China )

**Abstract** A Hamiltonian method was applied to study analytically the stress distributions of orthotropic two-dimensional elasticity in  $(x, z)$  plane for arbitrary boundary conditions without beam assumptions. It is a method of separable variables for partial differential equations using displacements and their conjugate stresses as unknowns. Since coordinates  $(x, z)$  cannot be easily separated, an alternative symplectic expansion was used. Similar to the Hamiltonian formulation in classical dynamics, the  $x$  coordinate as time variable so that  $z$  becomes the only independent coordinate in the Hamiltonian matrix differential operator. The exponential of the Hamiltonian matrix is symplectic. There are homogenous solutions with constants to be determined by the boundary conditions and particular integrals satisfying the loading conditions. The homogenous solutions consist of the eigen-solutions of the derogatory zero eigenvalues (zero eigen-solutions) and that of the wellbehaved nonzero eigenvalues (nonzero eigen-solutions). The Jordan chains at zero eigenvalues give the classical Saint Venant solutions associated with averaged global behaviors such as rigid body translation, rigid body rotation or bending. On the other hand, the nonzero eigen-solutions describe the exponentially decaying localized solutions usually ignored by Saint-Venant's principle. Completed numerical examples were newly given to compare with established results.

**Key words:** transversely isotropy; eigenfunctions; symplectic expansion