

不可压饱和多孔弹性梁的大挠度 非线性数学模型

杨 骁¹, 王 琛²

(1. 上海大学 土木工程系, 上海 200072;
2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(郭兴明推荐)

摘要: 在孔隙流体仅存在沿梁轴线方向扩散的假定下, 建立了微观不可压饱和多孔弹性梁大挠度问题的非线性数学模型. 利用 Galerkin 截断法, 研究了固定端不可渗透、自由端可渗透的饱和多孔弹性悬臂梁在自由端突加集中载荷作用下的非线性弯曲, 得到了梁骨架的挠度、弯矩以及孔隙流体压力等效力偶等的时间响应和沿轴线的分布. 比较了大挠度非线性和小挠度线性理论的结果, 揭示了两者的差异. 研究发现大挠度理论的结果小于相应的小挠度理论结果, 并且, 大挠度理论的结果趋于其稳态值的时间小于相应的小挠度理论结果趋于其稳态值的时间.

关键词: 多孔介质理论; 多孔弹性梁; 大挠度; 轴向扩散; Galerkin 截断法

中图分类号: O343.5; O357.3 **文献标识码:** A

引 言

饱和多孔结构力学行为的研究在流-固相互作用理论中具有重要的学术价值和应用背景, 这方面的研究早期起源于生物力学中的若干问题. 目前, 相关研究已应用于各种工程领域中, 如建筑行业 and 传热传质工程等. 基于粘弹性本构关系和多孔介质理论, Ehlers 和 Market^[1] 利用 Galerkin 有限元方法研究了软组织和关节软骨的力学行为. 基于 Biot 理论, Schanz 和 Cheng^[2] 研究了多孔柱的波动问题, 得到了时间区域上的精确解. Leclair 和 Horoshenkov^[3] 修正了 Theodorakopoulos 和 Beskos 的多孔弹性板模型^[4], 研究了孔隙度、渗透率等对多孔板共振频率的影响, 而 B rsan^[5] 利用 Nunziato-Cowin 模型建立了多孔弹性壳的非线性模型, 证明了线性化模型初边值问题解的唯一性.

对于各向同性可压饱和多孔弹性梁, Nowinski 和 Davis^[6]、Zhang 和 Cowin^[7] 研究发现梁横向方向的孔隙流体压力梯度通常大于其轴向的压力梯度. 于是, 一般情形下可忽略孔隙流体的轴向运动. 然而, 自然和工程应用中存在一类多孔材料, 其微观结构使得流体以轴向运动为主, 可忽略其横向方向的运动, 如植物的根茎、传热管道等. 基于 Biot 理论, Li 等人^[8-9] 建立了分析饱和多孔弹性梁、杆变形的线性和非线性数学模型, 详细研究了饱和多孔弹性梁的静、动

收稿日期: 2006-08-17; 修订日期: 2007-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272070); 上海市重点学科建设资助项目(Y0103)

作者简介: 杨骁(1965), 教授(联系人, Tel: + 86-21-56331519; Fax: + 86-21-66134463; E-mail: xyang@shu.edu.cn).

态力学行为,发现了饱和多孔弹性梁的若干独特性质^[10-11] 实际上,一些情形下可将固相骨架和孔隙流体视为微观不可压材料,对此类问题,杨晓和李丽^[12]利用饱和多孔介质的三维控制方程,建立了微观不可压饱和多孔梁、杆线性小变形的数学模型,并利用 Laplace 变换数值研究了两端可渗透悬臂梁的拟静态和动态弯曲

假定孔隙流体仅存在轴向扩散,本文首先在细长梁大挠度、小变形,即几何非线性和本构线性的假定下,基于不可压饱和多孔介质的一般理论,在梁变形后的构形上建立了饱和多孔弹性梁的一维非线性控制方程 其次,研究了固定端不可渗透,自由端可渗透的悬臂多孔弹性梁在自由端突加常集中载荷作用下的非线性拟静态弯曲 此时,问题可转化为横截面转角的初边值问题 利用 Galerkin 截断法,得到了一组近似非线性常微分方程,并数值求解此常微分方程组,给出了梁骨架的挠度、弯矩以及孔隙流体压力等效力偶等的时间响应和轴线分布图 所得结果揭示了小挠度线性理论的适用范围和大挠度非线性理论对悬臂饱和多孔弹性梁力学行为的影响

1 非线性数学模型

考虑图 1(a)所示孔隙中充满流体 \mathcal{B}^F 的饱和多孔梁骨架 \mathcal{B}^S ,其长为 L ,横截面面积为 A ,关于 Oy 轴的惯性矩为 I 设多孔梁骨架 \mathcal{B}^S 关于其横截面横观各向同性,并且承受横向载荷 $q_z(s, t)$ 和水平载荷 $q_x(s, t)$ 的作用,这里, s 为梁轴线的弧长, t 为时间 由于梁骨架微观结构的特性,假定孔隙流体仅沿梁的轴向方向运动,并且,变形过程中,轴线不可伸长,梁小挠度变形的基本假设成立 图 1(b)示出了微元梁 ds 的变形及其内力,其中, $\theta^S(s, t)$ 为梁骨架横截面的转角, $u^S(s, t)$ 和 $w^S(s, t)$ 分别为梁轴线的水平位移和挠度 梁骨架和孔隙流体在横截面上正应力和剪应力的合力分别为轴力 $N(s, t)$ 和剪力 $Q(s, t)$,而合力矩为 $M(s, t)$

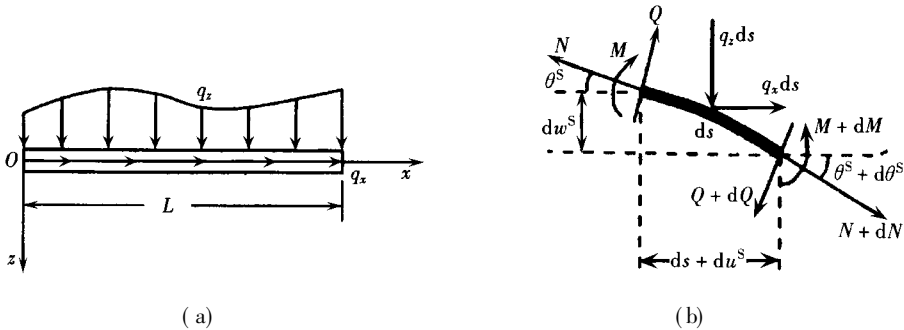


图 1 承受分布载荷 q_z 和 q_x 作用的饱和多孔弹性梁

由梁骨架轴线不可伸长假定,可得如下几何关系

$$\frac{u^S}{s} = \cos \theta^S - 1, \quad \frac{w^S}{s} = \sin \theta^S, \quad s_{,ss} = -z \frac{s}{s} \tag{1}$$

其中, $s_{,ss}$ 为梁骨架的轴向应变

根据不可压饱和多孔介质理论^[13-14],固相骨架和孔隙流体的应力张量分别为

$$\mathbf{T}^S = - (1 - \phi) p \mathbf{I} + \mathbf{T}^{SE}, \quad \mathbf{T}^F = - \phi p \mathbf{I} + \mathbf{T}^{FE} \tag{2}$$

其中, ϕ 为孔隙度, p 为孔隙流体压力, \mathbf{I} 为单位张量 \mathbf{T}^{SE} 和 \mathbf{T}^{FE} 分别为固相和流相的有效应力张量 通常,对于无粘性流体,有 $\mathbf{T}^{FE} = \mathbf{0}$

由 \mathbf{T}^{SE} 为单向应力状态的假定,可得^[8, 12]

$$T_{ss}^{SE} = E^S \varepsilon_{ss}^S, \quad \varepsilon_{ss}^S = \frac{1}{3K^S} T_{ss}^{SE}, \quad (3)$$

其中, T_{ss}^{SE} 为梁骨架横截面上的有效正应力, ε_{ss}^S 为梁骨架的体积应变, E^S 和 K^S 分别为骨架的轴向弹性模量和体积模量

流-固混合物在横截面上的弯矩 $M = \int_A z(T_{ss}^S + T_{ss}^F) dA$ 可进一步表示为

$$M = M^{SE} - M_p, \quad M^{SE} = -E^S I \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s}, \quad M_p = \int_A z p dA, \quad (4)$$

其中, M_p 为孔隙流体压力的等效力偶, M^{SE} 为横截面上梁骨架的弯矩

由图 1(b) 所示饱和微元梁段的平衡, 可容易得如下流-固混合物平衡方程:

$$\frac{N}{s} - Q \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s} + q_z \sin \alpha^S + q_x \cos \alpha^S = 0, \quad (5)$$

$$\frac{Q}{s} + N \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s} + q_z \cos \alpha^S - q_x \sin \alpha^S = 0, \quad (6)$$

$$\frac{M}{s} - Q = 0 \quad (7)$$

利用式(7)和(4), 由式(5)和(6)可得两基本控制方程

$$\frac{N}{s} + \left[E^S I \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s^2} + \frac{M_p}{s} \right] \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s} + q_z \sin \alpha^S + q_x \cos \alpha^S = 0, \quad (8)$$

$$E^S I \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s^3} + \frac{2M_p}{s^2} - N \frac{\varepsilon_{ss}^S}{s} - q_z \cos \alpha^S + q_x \sin \alpha^S = 0 \quad (9)$$

下面建立孔隙流体的控制方程 由于假定孔隙流体仅沿变形后梁的轴向运动, 此时, 确定相对于梁骨架的孔隙流体相对运动速度 $v^{FS}(s, t)$ 的 Darcy 定律可表示为^[13]

$$-\frac{p}{s} - S v^{FS} = 0, \quad (10)$$

其中, 耦合系数 S 与 Darcy 渗透率 k^F 的关系为 $S = \frac{2}{s} \frac{\rho^{FR}}{k^F}$, ρ^{FR} 为孔隙流体的真实比重

对微观不可压饱和多孔介质, 在多孔弹性梁大挠度变形的假定下, 体积分守恒方程 $\text{div}[\mathbf{u}^S + \mathbf{v}^{FS}] = 0$ ^[14] 变为

$$\frac{\varepsilon_{ss}^S}{t} + \frac{v^{FS}}{s} = 0 \quad (11)$$

利用几何关系(1)第3式、本构方程(3)和 Darcy 定律(10), 方程(11)变为

$$z \frac{E^S}{3K^S} \frac{\varepsilon_{ss}^S}{t} + \frac{2}{S} \frac{2}{s^2} p = 0 \quad (12)$$

将方程(12)乘以 z , 并在横截面上积分可得最后一个控制方程

$$\frac{E^S I}{3K^S} \frac{\varepsilon_{ss}^S}{t} + \frac{2}{S} \frac{2M_p}{s^2} = 0 \quad (13)$$

至此, 得到了多孔弹性梁大挠度问题的基本控制方程, 它们是几何方程(1)第1、2式, 混合物平衡方程(8)、(9)和孔隙流体运动方程(13), 这些方程在适当的边界和初始条件下可确定未知函数 $u^S(s, t)$ 、 $w^S(s, t)$ 、 $\varepsilon_{ss}^S(s, t)$ 、 $N(s, t)$ 和 $M_p(s, t)$

下面给出边界条件和初始条件 多孔弹性梁的位移边界条件与单相经典弹性梁的位移边界条件相同, 即

$$u^S = \bar{u}^S, \quad w^S = \bar{w}^S, \quad \varepsilon_{ss}^S = \bar{\varepsilon}_{ss}^S, \quad s = 0 \text{ 或 } L, \quad (14)$$

其中, 具有上标 $\bar{\quad}$ 的量为给定的关于时间 t 的已知函数

应力边界条件应针对流-固混合物给出,它们可描述为

$$N = N, M^{\text{SE}} - M_p = M_0, F^{\text{SE}} - (M^{\text{SE}} - M_p) = Q_0, \quad s = 0 \text{ 或 } L \quad (15)$$

对于孔隙流体,如果多孔弹性梁端部不可渗透,即 $v^{\text{FS}} = 0$, 则边界条件为

$$\frac{M_p}{s} = 0, \quad s = 0 \text{ 或 } L \quad (16)$$

如果梁端部可渗透,即 $p = 0$, 则边界条件为

$$M_p = 0, \quad s = 0 \text{ 或 } L \quad (17)$$

对于初始未变形的饱和多孔弹性梁,其拟静态的初始条件为

$$w^{\text{S}} = 0, \quad t = 0 \quad (18)$$

2 固定端不可渗透、自由端可渗透的悬臂多孔弹性梁的初边值问题

下面研究固定端不可渗透、自由端可渗透饱和多孔悬臂梁,在自由端突加常集中横向载荷 P 作用下的非线性弯曲(图2) 此时,可先求解未知函数 $^{\text{S}}(s, t)$

引入如下无量纲变量

$$\begin{cases} s^* = \frac{s}{L}, t^* = \frac{3K^{\text{S}}}{L^2 S} t, u^{\text{S}*} = \frac{u^{\text{S}}}{L}, w^{\text{S}*} = \frac{w^{\text{S}}}{L}, \\ N^* = \frac{L^2}{E^{\text{S}} I} N, M_p^* = \frac{L}{E^{\text{S}} I} M_p, P^* = \frac{L^2 P}{E^{\text{S}} I} \end{cases} \quad (19)$$

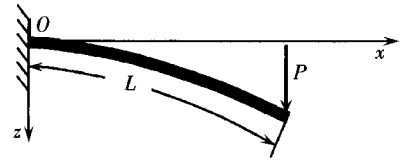


图2 自由端承受集中载荷的悬臂多孔梁

则悬臂梁非线性弯曲的无量纲初边值问题为

$$\frac{u^{\text{S}}}{s} = \cos^{\text{S}} - 1, \quad \frac{w^{\text{S}}}{s} = \sin^{\text{S}}, \quad (20)$$

$$\frac{N}{s} + \left[\frac{2}{s^2} + \frac{M_p}{s} \right] \frac{s}{s} = 0, \quad \frac{3}{s^3} + \frac{2M_p}{s^2} - N \frac{s}{s} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{2}{t} + \frac{2M_p}{s^2} = 0; \quad (22)$$

$$u^{\text{S}} = 0, w^{\text{S}} = 0, \quad s = 0, \quad \frac{M_p}{s} = 0, \quad s = 0, \quad (23)$$

$$\begin{cases} N - P \sin^{\text{S}} = 0, \quad \frac{s}{s} + M_p = 0, \\ \frac{2}{s^2} + \frac{M_p}{s} + P \cos^{\text{S}} = 0, \quad M_p = 0, \end{cases} \quad s = 1; \quad (24)$$

$$w^{\text{S}} = 0, \quad t = 0 \quad (25)$$

这里,为方便起见,省略了无量纲量的上标 *

初边值问题(20)~(25)可进一步简化为

$$\begin{cases} \frac{2}{s^2} - \frac{s}{t} + P \cos^{\text{S}} = 0, \\ s = 0, s = 0; \quad \frac{s}{s} = 0, s = 1; \quad s = 0, t = 0 \end{cases} \quad (26)$$

由此确定转角 $^{\text{S}}(s, t)$ 后,轴力 $N(s, t)$ 、等效力偶 $M_p(s, t)$ 、水平位移 $u^{\text{S}}(s, t)$ 和挠度 $w^{\text{S}}(s, t)$ 可分别由下式确定:

$$N = P \sin^{\text{S}}, \quad M_p = -\frac{s}{s} + P \frac{1}{s} \cos^{\text{S}} ds; \quad (27)$$

$$u^S = \int_0^s (\cos^S - 1) ds, \quad w^S = \int_0^s \sin^S ds \quad (28)$$

3 Galerkin 截断法和数值结果

显然, 初边值问题(26)精确解的求解是相当困难的. 为此, 下面利用 Galerkin 截断法和 Runge-Kutta 法数值求解初边值问题(26)的近似解. 作近似

$$\cos^S = 1 - \frac{1}{2}(\sin^S)^2, \quad \dot{S}(s, t) = \dot{S}_0(s, t) + \sum_{k=1}^2 F_k(t) \sin \frac{2k-1}{2} s, \quad (29)$$

其中, $F_k(t)$ ($k = 1, 2$) 为待定函数, $\dot{S}_0(s, t) = P_s(1 - s/2)$ 为相应单相弹性梁小挠度理论的横截面转角^[15]

显然, $\dot{S}(s, t)$ 满足式(26)中的边界条件. 将表达式(29)代入式(26)中, 利用 Galerkin 截断法可得

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} + \frac{2}{4}F_1 + G_1(P, F_1, F_2) = 0, & \frac{dF_2}{dt} + \frac{9}{4}F_2 + G_2(P, F_1, F_2) = 0; \\ F_1(0) = -\frac{16}{3}P, & F_2(0) = -\frac{16}{27}P, \end{cases} \quad (30)$$

其中, $G_1(P, F_1, F_2)$ 和 $G_2(P, F_1, F_2)$ 由 P, F_1 和 F_2 确定, 由于篇幅所限, 这里略去其具体表达式.

利用四阶 Runge-Kutta 法可容易数值求解初值问题(30), 这样, 可数值计算得到多孔弹性梁骨架的挠度、水平位移、弯矩及其孔隙流体压力等效力偶等. 为检验近似表达式(29)的有效性, 首先数值计算多孔弹性梁小挠度弯曲的近似解, 并与精确解进行比较. 通过令式(30)中的 $G_k(P, F_1, F_2) = 0$ ($k = 1, 2$) 可得到小挠度理论的近似解, 而利用 Laplace 变换可得到相应的精确解. 表 1 给出了当载荷参数 $P = 1$ 时, 不同时刻 t 多孔悬臂梁自由端处挠度 w^S 的精确解和近似解, 其中, w^{ES} 和 w^{AS} 分别表示精确解和近似解, 可见, 在小挠度范围内, 近似表达式(29)可给出满意的结果.

表 1 近似解与精确解的比较

$w^S(1, t)$	时间 t									
	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.80	2.10	2.40	2.70	3.00
w^{ES}	0.177 0	0.258 8	0.297 8	0.316 4	0.325 2	0.329 5	0.331 5	0.332 5	0.332 9	0.333 1
w^{AS}	0.176 6	0.258 5	0.297 5	0.316 1	0.325 0	0.329 2	0.331 2	0.332 2	0.332 6	0.332 9
$e/(%)$	0.231 6	0.104 3	0.090 7	0.085 3	0.073 8	0.081 9	0.087 5	0.078 2	0.093 1	0.069 0

图 3 示出了不同载荷 P 下, 饱和多孔悬臂梁自由端(即 $s = 1$) 处无量纲挠度 w^S 随无量纲时间 t 的变化曲线, 而图 4 给出了当 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的挠曲线, 其中, 实线和虚线分别表示大挠度和小挠度理论的结果. 可见, 挠度随时间 t 单调增加, 并且当载荷参数 P 较小, 即当 $P < 1$ 时, 大挠度和小挠度理论的结果没有明显的区别. 然而, 随着载荷 P 的增加, 两种理论的结果相差越来越大, 当 $P = 5$ 时, 多孔悬臂梁自由端处大挠度理论的稳态挠度不足小挠度理论挠度的一半. 另外, 小挠度理论多孔弹性梁挠度趋于其稳态值的时间, 大于相应大挠度理论的挠度趋于其稳态值的时间, 并且这种效应随载荷 P 的增加愈加明显. 事实上, 对于时间 t

的多孔悬臂梁的稳定态, 由于其等效力偶 M_p 趋于零(见图 7 和图 8), 多孔弹性梁的行为等同于经典单相弹性梁. 因此, 多孔弹性梁的挠度应趋于经典的单相弹性梁挠度. 表 2 给出了多孔悬臂梁自由端处的稳态挠度与经典单相悬臂梁自由端处挠度的比较, 其中, w^{DCSP} 和

w^{DSP} 分别表示经典单相梁和稳态多孔梁自由端处的挠度 可见, 当 $P = 5$ 时, 两者的误差较小, 表明近似表达式(29) 对大挠度理论亦可给出较合理的结果

表 2 饱和多孔梁稳态挠度与经典单相梁挠度比较

w^S	P					
	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$w^{DCSP[15]}$	0.162	0.302	0.494	0.603	0.670	0.714
w^{DSP}	0.162	0.301	0.489	0.590	0.642	0.662
$e/(%)$	0.000	0.331	1.01	2.16	4.18	7.28

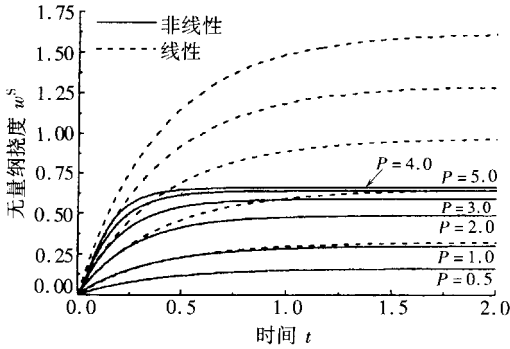


图 3 不同载荷 P 下, 自由端挠度 w^S 随时间 t 的变化

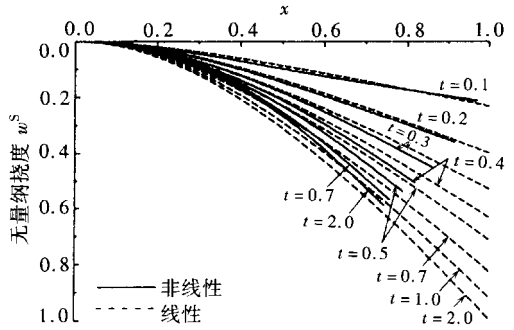


图 4 当 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的挠曲线 w^S 分布

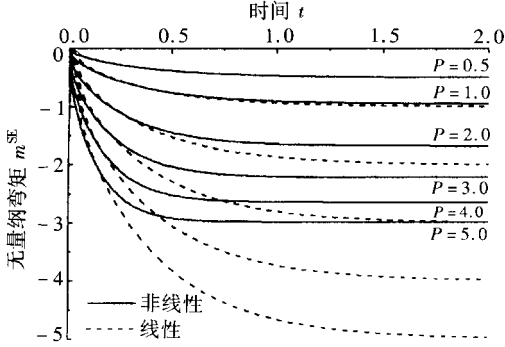


图 5 不同载荷 P 下, 固定端处弯矩 m^{SE} 随时间 t 的变化

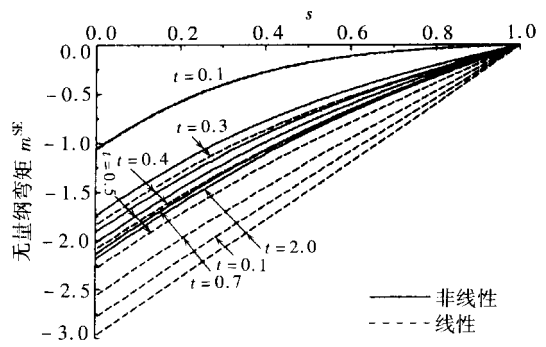


图 6 当 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的弯矩 m^{SE} 沿轴线 s 的分布

图 5 和图 6 分别给出了不同载荷 P 下, 多孔弹性梁不可渗透固定端(即 $s = 0$) 处, 无量纲弯矩 $m^{SE} = LM^{SE}/(E^S I) = - \int_0^s s' ds'$ 随时间 t 的变化曲线, 以及当载荷 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的弯矩沿梁轴线弧长 s 的分布 可见, 对于较大的载荷 P , 大挠度理论的弯矩小于相应小挠度理论的弯矩, 并且对于多孔悬臂梁的稳定态, 大挠度理论的弯矩沿梁轴线是非线性分布的, 而小挠度理论的弯矩分布则是线性的 另外, 尽管饱和多孔梁的挠度呈现粘弹性蠕变特征, 但其弯矩仍随时间变化, 粘弹性理论难以解释此现象

图 7 和图 8 分别给出了不同载荷 P 下, 多孔弹性梁不可渗透固定端(即 $s = 0$) 处, 孔隙流体压力无量纲等效力偶 M_p 随时间 t 的变化曲线, 以及当载荷 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的等效力偶沿梁轴线弧长 s 的分布 由此可见, 当载荷 P 突然作用于梁自由端时, 等效力偶 M_p 由 0 突变

为非 0 而后, 随着时间 t 增加, 其值逐渐减小至 0。事实上, 在 $t = 0^+$ 时, 沿轴线的无量纲等效力偶 M_p 与外力 P 产生的力偶 $P(1-s)$ 保持平衡, 此时, 梁骨架不承担任何外载荷。随着时间 t 的增加, 等效力偶 M_p 逐渐减小, 弯矩 m^{SE} 增加。然而, 在任何时刻 t , 等效力偶 M_p 和弯矩 m^{SE} 与载荷 P 产生的外力偶平衡。最后, 当时间 $t \rightarrow \infty$, M_p 变为 0 时, 梁骨架承担全部的外载荷。

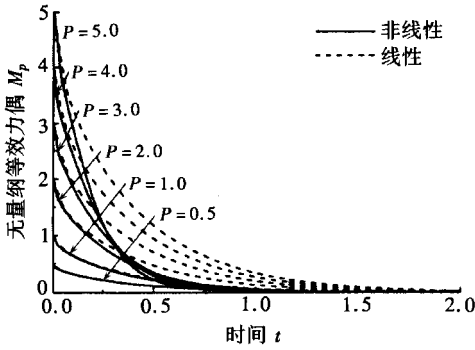


图 7 不同载荷 P 下, 固定端处等效力偶 M_p 随时间 t 的变化

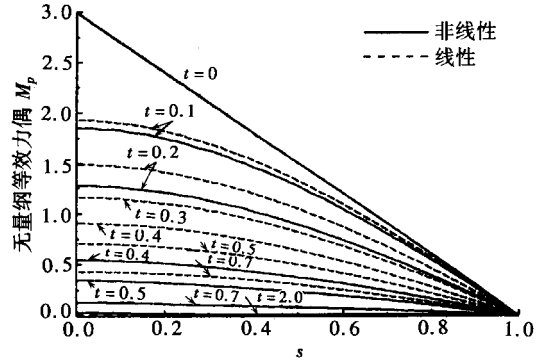


图 8 当 $P = 3$ 时, 不同时刻 t 的等效力偶 M_p 沿轴线 s 的分布

4 结 论

限制饱和和多孔弹性梁中孔隙流体仅沿变形后梁轴线方向扩散, 本文建立了不可压饱和和多孔弹性梁大挠度弯曲的非线性数学模型。利用此数学模型和 Galerkin 截断法, 研究了固定端不可渗透、自由端可渗透的多孔悬臂梁, 在自由端处突加常集中载荷作用下的大挠度问题; 通过多孔弹性梁小挠度的本文结果与精确解的比较, 以及多孔梁大挠度稳态解与经典单相梁大挠度精确解的比较, 说明了本文 Galerkin 截断近似方法的有效性。

饱和多孔悬臂梁的数值结果揭示了, 当载荷 P 较大时, 大挠度与小挠度理论的结果具有明显的差异。于是, 当载荷 P 较大时, 应采用大挠度理论分析研究多孔梁的弯曲。与小挠度理论的结果相比, 大挠度理论的结果相对偏小, 并且大挠度理论结果趋于其稳态值的时间明显小于相应的小挠度理论结果。另外, 数值结果表明: 多孔弹性梁的挠度呈现粘性蠕变特征, 且其弯矩仍随时间的增加而增加。这些结果有助于揭示植物根茎等的力学行为。

[参 考 文 献]

- [1] Ehlers W, Markert B. On the viscoelastic behaviour of fluid saturated porous materials[J]. Granular Matter, 2000, 2(3): 153-161.
- [2] Schanz M, Cheng A H D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column[J]. Acta Mechanica, 2000, 145(1): 1-18.
- [3] Ledaire P, Horoshenkov K V. Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid[J]. J. Sound Vibration, 2001, 247(1): 1-18.
- [4] Theodorakopoulos D D, Beskos D E. Flexural vibrations of poroelastic plates[J]. Acta Mechanica, 1994, 103(1/4): 191-203.
- [5] Brsan M. On the theory of elastic shells made from a material with voids[J]. Internat J Solids and Structures, 2006, 43(10): 3106-3123.
- [6] Nowinski J L, Davis C F. The flexural and torsion of bones viewed as anisotropic poroelastic bodies

- [J]. *Internat J Engrg Sci*, 1972, **10**(12): 1063-1079.
- [7] Zhang D, Cowin S C. Oscillatory bending of a poroelastic beam[J]. *J Mech Phys Solids*, 1994, **42**(10): 1575-1599.
- [8] Li L P, Schulgasser K, Cederbaum G. Theory of poroelastic beams with axial diffusion[J]. *J Mech Phys Solids*, 1995, **43**(12): 2023-2042.
- [9] Li L P, Schulgasser K, Cederbaum G. Large deflection analysis of poroelastic beams[J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 1998, **33**(1): 1-14.
- [10] Cederbaum G, Schulgasser K, Li L P. Interesting behavior patterns of poroelastic beams and columns [J]. *Internat J Solids Structures*, 1998, **35**(34): 4931-4943.
- [11] Li L P, Cederbaum G, Schulgasser K. A Finite element model for poroelastic beams with axial diffusion[J]. *Computers and Structures*, 1999, **73**(6): 595-608.
- [12] 杨晓, 李丽. 不可压饱和多孔弹性梁、杆动力响应的数学模型 [J]. *固体力学学报*, 2006, **27**(2): 159-166.
- [13] de Boer R, Didwania A K. Saturated elastic porous solids: incompressible, compressible and hybrid Binary models[J]. *Transport in Porous Media*, 2001, **45**(3): 425-445.
- [14] de Boer R. *Theory of Porous Media: Highlights in the Historical Development and Current State* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
- [15] Gere J M, Timoshenko S P. *Mechanics of Materials* [M]. second edition. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984.

Nonlinear Mathematical Model for Large Deflection of Incompressible Saturated Poroelastic Beams

YANG Xiao¹, WANG Chen²

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Nonlinear governing equations were established for large deflection of incompressible fluid saturated poroelastic beams under constraint that diffusion of the pore fluid is only in the axial direction of the deformed beams. Then, the nonlinear bending of a saturated poroelastic cantilever beam with fixed end impermeable and free end permeable, subjected to a suddenly applied constant concentrated transverse load at its free end, was examined with the Galerkin truncation method. The curves of deflections and bending moments of the beam skeleton and the equivalent couples of the pore fluid pressure were shown in figures. The results of the large deflection and the small deflection theories of the cantilever poroelastic beam were compared, and the differences between them are revealed. It is shown that the results of the large deflection theory are less than those of the corresponding small deflection theory, and the times needed to approach its stationary states for the large deflection theory are much less than those of the small deflection theory.

Key words: theory of porous medium; poroelastic beam; large deflection; axial diffusion; Galerkin truncation method