文章编号: 1000-0887(2007) 12-1400-11

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

局部 FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用( )

协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 协平来稿)

摘要: 在局部 FC-一致空间内, 引入和研究了某些新的涉及凝聚集值映象的广义矢量拟平衡问题组 应用作者在文( ) 中对局部 FC-一致空间内的凝聚集值映象得到的极大元存在性定理, 在局部FC-一致空间内, 对这些广义矢量拟平衡问题组的解, 证明了某些新的存在性定理 这些结果改进和推广了文献中某些已知结果到局部 FC-一致空间

关 键 词: 广义矢量拟平衡问题组; 极大元; $C_i(x)$-FC- 对角拟凸; $C_i(x)$-FC- 拟凸; $C_i(x)$-FC- 拟似凸; 局部 FC-一致空间

中图分类号: 177.91; 177.99 文献标识码: A

引 言

设 X 是非空集, 我们将用 2^X 和 X 分别表示 X 的所有子集的族和 X 的一切非空有限子集的族 令 $_n$ 是 R^{n+1} 内顶点为 $e_0, e_1, , e_n$ 的 n- 维标准单型 对 $\{0, 1, , n\}$ 的非空子集 J, 令 $_J = \mathrm{co}(\{e_j : j \quad J\})$ 令 I 是任何指标集 对每一 $i \quad I$, 令 X_i 和 Y_i 是拓朴空间, Z_i 是非空集 令 $X = \ _{i \ I} X_i$, $Y = \ _{i \ I} Y_i$, 对每一 $i \quad I$ 和 $x \quad X$, 令 $x_i = \ _i(x)$ 是 x 在 X_i 上的投影 对每一 $i \quad I$, 令 $A_i : X \quad Y \quad 2^{X_i}$, $T_i : X \quad Y \quad 2^{Y_i}$, $C_i : X \quad 2^{Z_i}$ 和 $_i : X \quad Y \quad X_i \quad 2^{Z_i}$ 是集值映象

在本文中, 我们考虑下面的广义矢量拟平衡问题组:

( ) 求 $(\hat{x}, \hat{y}) \quad X \quad Y$ 使得对每一 $i \quad I$,

$$\hat{x}_i \quad A_i(\hat{x}, \hat{y}),\ \hat{y}_i \quad T_i(\hat{x}, \hat{y}) \text{ 和 } \ _i(\hat{x}, \hat{y}, z_i) \quad C_i(\hat{x}), \qquad z_i \quad A_i(\hat{x}, \hat{y}) \qquad \text{SGVQEP( )}$$

( ) 求 $(\hat{x}, \hat{y}) \quad X \quad Y$ 使得对每一 $i \quad I$,

$$\hat{x}_i \quad A_i(\hat{x}, \hat{y}),\ \hat{y}_i \quad T_i(\hat{x}, \hat{y}) \text{ 和 } \ _i(\hat{x}, \hat{y}, z_i) \quad C_i(\hat{x}), \qquad z_i \quad A_i(\hat{x}, \hat{y}) \qquad \text{SGVQEP( )}$$

收稿日期: 2007-04-08; 修订日期: 2007-10-17

基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081; SZD0406)

作者简介: 丁协平(1938), 男, 自贡人, 教授(Tel: + 86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@ hotmail. com).

( ) 求 $(\hat{x},\hat{y})$ X Y 使得对每一 i I,

$$\hat{x}_i \quad A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i \quad T_i(\hat{x},\hat{y}) \text{ 和 } \quad {}_i(\hat{x},\hat{y},z_i) \quad C_i(\hat{x}) = \quad , \qquad z_i \quad A_i(\hat{x},\hat{y})$$

SGVQEP( )

( ) 求 $(\hat{x},\hat{y})$ X Y 使得对每一 i I,

$$\hat{x}_i \quad A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i \quad T_i(\hat{x},\hat{y}) \text{ 和 } \quad {}_i(\hat{x},\hat{y},z_i) \quad C_i(\hat{x}) \quad , \qquad z_i \quad A_i(\hat{x},\hat{y})$$

SGVQEP( )

具有对一切 i I 和 (x,y) X Y, $A_i(x,y) = A_i(x)$ 及 $T_i(x,y) = T_i(x)$ 的 SGVQEP ( ) ~ SGVQEP( ), 被 Lin 和 Liu[1]、Lin 等人[2]、Lin[3]、Peng 等人[4]、Ding[5-6] 与 Ding 和 Yao[7] 分别在(局部凸)拓朴矢量空间的锥设置下, 在 FC-空间、局部 FC-一致空间和 G-凸空间内引入和研究 具有对一切 i I 和 (x,y) X X, $Y_i = X_i$, $A_i(x,y) = A_i(x)$, $T_i(x,y) = T_i(x)$ 及 ${}_i: X \quad Y_i \quad X_i \quad 2^{Z_i}$ 的 SGVQEP( ) ~ SGVQEP( ), 被 Lin[8]、Ding 等人[9] 和 Ding[10] 分别在拓朴矢量空间、局部 G-凸一致空间和局部 FC-空间内引入和研究 在不同的假设下对 SGVQEP ( ) ~ SGWQEP( ) 的上述特殊情形建立了解的某些存在性定理

对于指标集 I, 空间 X_i、Y_i、Z_i 和映象 A_i、T_i、C_i 及 ${}_i$ 的适当选取, 容易看出 SGVQEP( ) ~ SGVQEP( ) 包含了大多数广义(矢量)拟平衡问题组、广义(矢量)拟变分不等式问题组、广义(矢量)平衡问题组、广义(矢量)变分不等式问题组的延伸和推广作为特殊情形, 例如, 见文献[1-10]和其中的参考文献

在本文中, 应用作者在文( )[11] 中对局部 FC-一致空间内的凝聚集值映象得到的极大元存在性定理, 在局部 FC-一致空间内, 对 SGVQEP( ) ~ SGVQEP( ) 的解证明了某些新的存在性定理 这些结果改进和推广了文献中某些已知结果到局部 FC-一致空间

1 预 备 知 识

令 ${}_n$ 是 R^{n+1} 内顶点为 $e_0, e_1, \quad , e_n$ 的 n-维标准单型 对 $\{0, 1, \quad , n\}$ 的任何非空子集 J, 令 ${}_J = \mathrm{co}(\{e_j: j \quad J\})$ 下面概念由 Ben-El-Mechaiekh 等人[12] 引入

定义 1.1 称 $(X, \quad)$ 是一 L-凸空间, 如果 X 是一拓扑空间和 $: X \quad 2^X$ 是一映象, 使得对每一 $N \quad X$ 具有 $|N| = n + 1$, 存在一连续映象 ${}_N: \ {}_n \quad (N)$, 满足 $A \quad N$ 具有 $|A| = J + 1$ 蕴含 ${}_N({}_J) \quad (A)$, 其中 ${}_J$ 是 ${}_N$ 的对应于 A 的面

大家知道, 拓朴矢量空间的每一个凸子集, 由 Horvath[13] 引入的每一 H-空间和由 Park 和 Kim[14] 引入的每一 G-凸空间全都是 L-凸空间

下面概念由 Ding[15] 引入

定义 1.2 称 $(X, \ {}_N)$ 是一有限连续空间(简称 FC-空间), 如果 X 是一拓扑空间, 使得对每一 $N = \{x_0, \quad , x_n\} \quad X$, 其中 N 的某些元素可以相同, 存在一连续映象 ${}_N: \ {}_n \quad X$ 称 $(X, \ {}_N)$ 的一子集 D 是 X 的 FC-子空间, 如果对每一个 $N = \{x_0, \quad , x_n\} \quad X$ 和对任何 $\{x_{i_0}, \quad , x_{i_k}\} \quad D \quad N$, ${}_N({}_k) \quad D$, 其中 ${}_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}: j = 0, \quad , k\})$

显然, 每一个 L-凸空间必是 FC-空间 Ding 在文献[11]中给出的例 1.1 已说明存在一 FC-空间不是 L-凸空间 所以在没有凸性结构的 FC-空间内, 研究各种非线性问题是十分合理和有价值的

由 FC-子空间的定义, 容易看出 $(X, \ {}_N)$ 的每一 FC-子空间也是一 FC-空间, 且如果

$\{B_i\}_{i\ \ I}$ 是FC-空间$(X,\ \ _N)$ 的FC-子空间族和 $_{i\ \ I}B_i$ ，则 $_{i\ \ I}B_i$ 也是$(X,\{\ \ _N\})$ 的FC-子空间，其中 I 是任何指标集

对 $(X,\ \ _N)$ 的子集 A，我们能定义 A 的 FC-包如下：

$$\mathrm{FC}(A) = \ \ \{B\ \ \ X: A\ \ \ B \text{ 和 } B \text{ 是} X \text{ 的 FC-子空间}\}$$

显然，$\mathrm{FC}(A)$ 是 X 的包含 A 的最小 FC-子空间

下面概念由 Ding[6] 引入

定义 1.3 称 $(X, \mathscr{U},\ \ _N)$ 是一局部 FC-一致空间，如果$(X, \mathscr{U})$ 是一致空间和$(X,\ \ _N)$ 是一FC-空间，使得 $\mathscr{U}$有由满足下面条件的环境(entourages) 组成的基 $\mathscr{B}$：对每一 $V\ \ \ \mathscr{B}$，每当 $M\ \ \ X$ 是 X 的一FC-子空间时，集 $V[M] = \{x\ \ \ X: M\ \ \ V[x]\ \ \ \}$ 也是 X 的 FC-子空间

例 1.1 令 $(X,\ \ _N)$ 是 Ding[11] 的例 1.1 内给出的FC-空间 注意到 X 是一度量空间和每一度量空间是具有一致结构 $\mathscr{U} = \{V(\ ):\ \ >\ 0\}$ 的 Hausdorff 一致空间，其中 $V(\ ) = \{(x, y)\ \ \ X\ \ \ X: d(x, y) <\ \ \}$，见文献[16]201 对每一 $V(\ )\ \ \ \mathscr{U}$，我们有 $V[x] = \{y\ \ \ X: |x - y| <\ \ \}$ 且因此对 X 的每一 FC-子空间 M，$V[M] = \{x\ \ \ X: M\ \ \ V[x]\ \ \ \} = \ \ _{x\ \ M}V[x]$ 容易检验$(X, \mathscr{U},\ \ _N)$ 是一局部 FC-一致空间

下面结果是 Ding[6] 的定理 2.2

引理 1.1 令 I 是任何指标集 对每一 $i\ \ \ I$，令$(X_i, \mathscr{U}_i,\ \ _{N_i})$ 是一局部FC-一致空间，每一$(X_i, \mathscr{U}_i)$ 有由对称环境(entourages) 组构成的基 $\mathscr{B}_i$ 令 $X = \ \ _{i\ \ I}X_i$，$\mathscr{U} = \ \ _{i\ \ I}\mathscr{U}_i$ 和对任何 $N\ \ \ \ X\ \ ,\ \ _N = \ \ _{i\ \ I}\ \ _{N_i}$，其中 N_i 是 N 在 X_i 上的投影 则 $(X, \mathscr{U},\ \ _N)$ 也是一局部 FC-一致空间

下面结果是 Ding[11] 的定理 2.1

引理 1.2 令 I 是任何指标集 对每一 $i\ \ \ I$，令$(X_i, \mathscr{U}_i,\ \ _{N_i})$ 是一局部FC-一致空间 令 $X = \ \ _{i\ \ I}X_i$ 是如在引理 1.1 内定义的局部 FC-一致空间， 是 X 上的非紧性测度 对每一 $i\ \ \ I$，令 $G_i: X\ \ \ 2^{X_i}$ 是使得

( ) 对每一 $x\ \ \ X$，$G_i(x)$ 是 X_i 的 FC-子空间；

( ) 对每一 $x\ \ \ X$，$\ \ _i(x)\ /\ G_i(x)$；

( ) 对每一 $y_i\ \ \ X_i$，$G_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的；

( ) 由 $G(x) = \ \ _{i\ \ I}G_i(x)$，$x\ \ \ X$ 定义的映象 $G: X\ \ \ 2^X$ 是 - 凝聚的

则存在 $\hat{x}\ \ \ X$ 使得对每一 $i\ \ \ I$，$G_i(\hat{x}) =$

2 SGVQEP 解的存在性

在本节中，除非另作说明，我们将固定下面的记号和假设 令 I 是任何指标集 对每一 $i\ \ \ I$，令$(X_i, \mathscr{U}_i,\ \ _{N_i})$ 和$(Y_i, \mathscr{U}_i,\ \ _{N_i})$ 是局部 FC-一致空间，Z_i 是非空集 令 $X = \ \ _{i\ \ I}X_i$ 和 $Y = \ \ _{i\ \ I}Y_i$ 对每一 $i\ \ \ I$，令 $A_i: X\ \ \ Y\ \ \ 2^{X_i}$，$T_i: X\ \ \ Y\ \ \ 2^{Y_i}$，$C_i: X\ \ \ 2^{Z_i}$ 和 $\ \ _i: X\ \ \ Y\ \ \ X_i\ \ \ 2^{Z_i}$ 是集值映象

定义 2.1 对每一 $i\ \ \ I$ 和 $y\ \ \ Y$，称 $\ \ _i$ 在第 3 自变量是( ) 型(( ) 型、( ) 型、( ) 型) $C_i(x)$-FC-对角拟凸，如果对每一 $N_i = \{z_{i,0},\ \ \ , z_{i,n}\}\ \ \ \ X_i$ 和对每一具有 $x_i\ \ \ \mathrm{FC}(N_i)$ 的 $x\ \ \ X$，存在 $j\ \ \ \{0,\ \ \ , n\}$ 使得 $\ \ _i(x, y, z_{i,j})\ \ \ C_i(x)(\ \ _i(x, y, z_{i,j})\ \ \ C_i(x),\ \ _i(x, y, z_{i,j})$

$C_i(x) =$ ， $_i(x, y, z_{i,j})$ $C_i(x)$)

注 2.1　定义 2.1 内的概念推广了 Peng 等人[4]的相应概念，从拓朴矢量空间的凸子集到 FC-空间

引理 2.1[17]　令 X 和 Y 是拓朴空间，$G: X$ 2^Y 是集值映象　则 G 在点 x X 是下半连续的当且仅当对任何 y $G(x)$ 和任何满足 x x 的网 $\{x\}$ X，存在一网 $\{y\}$ 使得 y $G(x)$ 和 y y

下面结果是 Ding[18]的命题 4.5 和命题 4.6

引理 2.2　令 X、Y 和 Z 是拓朴空间　令 $F: X$ Y 2^Z 和 $C: X$ 2^Z 是集值映象，使得

(　) C 在 X Z 内有闭(开)图；

(　) 对每一 y Y，$F(\ ,y)$ 在 X 的每一紧子集上是下半连续的

则由 $F^*(y) = \{x$ $X: F(x, y)$ $C(x)\}$ ($F^*(y) = \{x$ $X: F(x, y)$ $C(x) =$ $\}$) 定义的集值映象 $F^*: Y$ 2^X 有紧闭值

引理 2.3　令 X、Y 和 Z 是拓朴空间　令 $F: X$ Y 2^Z 和 $C: X$ 2^Z 是集值映象，使得

(　) C 在 X Z 内有开(闭)图；

(　) 对每一 y Y，$F(\ ,y)$ 在 X 的每一紧子集上是上半连续的，具有非空紧闭值

则由 $F^*(y) = \{x$ $X: F(x, y)$ $C(x)\}$ ($F^*(y) = \{x$ $X: F(x, y)$ $C(x)$ $\}$) 定义的集值映象 $F^*: Y$ 2^X 有紧闭值

注 2.2　引理 2.3 推广了 Ding 和 Park[19]的引理 2.3

定理 2.1　假设对每一 i I，下列条件被满足：

(　) 对每一 (x, y) X Y，$A_i(x, y)$ 和 $T_i(x, y)$ 分别是 X_i 和 Y_i 的非空 FC-子空间；

(　) 对每一 (x_i, y_i) X_i Y_i，$A_i^{-1}(x_i)$ 和 $T_i^{-1}(y_i)$ 都在 X Y 内是紧开的；

(　) 对每一 y Y，$_i$ 在第 3 自变量是(　)型((　)型、(　)型、(　)型) $C_i(x)$-FC-对角拟凸的；

(　) 对每一 z_i X_i，集

$\{(x, y)$ X Y: $_i(x, y, z_i)$ $C_i(x)\}$

$(\{(x, y)$ X Y: $_i(x, y, z_i)$ $C_i(x)\}$,

$\{(x, y)$ X Y: $_i(x, y, z_i)$ $C_i(x)$ $\}$,

$\{(x, y)$ X Y: $_i(x, y, z_i)$ $C_i(x) =$ $\}$)

在 X Y 内是紧开的；

(　) 集 $W_i = \{(x, y)$ X $Y: (x_i, y_i)$ $A_i(x, y)$ $T_i(x, y)\}$ 在 X Y 内是紧闭的；

(　) 由

$(A\ @T)(x, y) = [\underset{iI\,I}{F} A_i(x, y)] @ [\underset{iI\,I}{F} T_i(x, y)]$，　$P(x, y)\ I\ X @ Y$

定义的映象 $(A\ @T): X\ @Y\ y\ 2^{X@Y}$ 在 $X\ @Y$ 上是 5-凝聚的，其中 5 是 $X\ @Y$ 上的非紧性测度#

则存在 $(\hat{x}, \hat{y})\ I\ X\ @Y$，使得对每一 $i\ I\ I$，

$\hat{x}_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y})$，$\hat{y}_i\ I\ T_i(\hat{x}, \hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i)$ $C_i(\hat{x})$，　$P z_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y})$

$(\hat{x}_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_i\ I\ T_i(\hat{x}, \hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i) < C_i(\hat{x})$，　$P z_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y})$;

$\hat{x}_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_i\ I\ T_i(\hat{x}, \hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i)\ H\ C_i(\hat{x}) =$ ，　$P z_i\ I\ A_i(\hat{x}, \hat{y})$;

$\hat{x}_i \; I \; A_i(\hat{x},\hat{y}), \hat{y}_i \; I \; T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x},\hat{y},z_i) \; H \; C_i(\hat{x}) \; X$ ， $P z_i \; I \; A_i(\hat{x},\hat{y})$)，即，$(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQEP( )(SGVQEP( )、SGVQEP( )、SGVQEP( ))的一解#

证明 对每一 $i \; I \; I$，定义一集值映象 $P_i: X \,@\, Y \; y \; 2^{X_i}$ 如下：

$$P_i(x,y) = \left\{z_i \; I \; X_i: W_i(x,y,z_i) < C_i(x)\right\}, \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y$$
$$(P_i(x,y) = \left\{z_i \; I \; X_i: W_i(x,y,z_i) \quad C_i(x)\right\}, \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y;$$
$$P_i(x,y) = \left\{z_i \; I \; X_i: W_i(x,y,z_i) \; H \; C_i(x) \; X \quad\right\}, \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y;$$
$$P_i(x,y) = \left\{z_i \; I \; X_i: W_i(x,y,z_i) \; H \; C_i(x) = \quad\right\}, \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y)\#$$

我们证明对每一 $i \; I \; I$ 和 $(x,y) \; I \; X \,@\, Y$，

$$x_i = \quad P_i(x) \; Y \; \mathrm{FC}(P_i(x,y)), \tag{1}$$

如果不真，则存在 $i \; I \; I$ 和 $(x,y) \; I \; X \,@\, Y$，使得 $x_i = \quad P_i(x) \; I \; \mathrm{FC}(P_i(x,y))\#$ 由在文献[11]内的引理 1.1，存在 $N_i = \left\{z_{i,0}, \;,\; , z_{i,n}\right\} \; I \; 3P_i(x,y)4$，使得 $x_i = \quad P_i(x) \; I \; \mathrm{FC}(N_i)\#$ 因此我们有 $W_i(x,y,z_{i,j}) < C_i(x)$，$Pj = 0, \;,\; , n($ $W_i(x,y,z_{i,j}) \quad C_i(x)$，$Pj = 0, \;,\; , n;$ $W_i(x,y,z_{i,j}) \; H \; C_i(x) \; X$ ，$Pj = 0, \;,\; , n;$ $W_i(x,y,z_{i,j}) \; H \; C_i(x) =$ ，$Pj = 0, \;,\; , n)\#$ 但是，由( )和定义 2.1，存在 $j \; I \; \left\{0, \;,\; , n\right\}$，使得 $W_i(x,y,z_{i,j}) \quad C_i(x)($ $W_i(x,y,z_{i,j}) < C_i(x);$ $W_i(x,y,z_{i,j}) \; H \; C_i(x) = \;;$ $W_i(x,y,z_{i,j}) \; H \; C_i(x) \; X$)，这是一个矛盾# 因此(1) 式必成立# 由条件( )，对每一 $i \; I \; I$ 和 $z_i \; I \; X_i$，

$$P_i^{-1}(z_i) = \left\{(x,y) \; I \; X \,@\, Y: W_i(x,y,z_i) < C_i(x)\right\}$$
$$(P_i^{-1}(z_i) = \left\{(x,y) \; I \; X \,@\, Y: W_i(x,y,z_i) \quad C_i(x)\right\};$$
$$P_i^{-1}(z_i) = \left\{(x,y) \; I \; X \,@\, Y: W_i(x,y,z_i) \; H \; C_i(x) \; X \quad\right\};$$
$$P_i^{-1}(z_i) = \left\{(x,y) \; I \; X \,@\, Y: W_i(x,y,z_i) \; H \; C_i(x) = \quad\right\})$$

在 $X \,@\, Y$ 内是紧开的# 从文献[11]内的引理 1.2 推得对每一 $z_i \; I \; X_i$，$(\mathrm{FC}(P_i))^{-1}(z_i)$ 在 $X \,@\, Y$ 内也是紧开的# 由引理 1.1，对每一 $i \; I \; I$，$X_i \,@\, Y_i$ 和 $X \,@\, Y$ 都是局部 FC-一致空间# 对每一 $i \; I \; I$，定义一集值映象 $G_i: X \,@\, Y \; y \; 2^{X_i @ Y_i}$ 如下：

$$G_i(x,y) = \begin{cases} [A_i(x,y) \; H \; \mathrm{FC}(P_i(x,y))] \,@\, T_i(x,y), & \text{如果}(x,y) \; I \; W_i, \\ A_i(x,y) \,@\, T_i(x,y), & \text{如果}(x,y) \; Y \; W_i\# \end{cases}$$

由条件( )，对每一 $i \; I \; I$ 和 $(x,y) \; I \; X \,@\, Y$，$G_i(x,y)$ 是 $X_i \,@\, Y_i$ 的 FC-子空间# 由 W_i 的定义和(1) 式，对每一 $i \; I \; I$ 和 $(x,y) \; I \; X \,@\, Y$，$(x_i, y_i) \; Y \; G_i(x,y)\#$ 对每一 $i \; I \; I$ 和 $(u_i, v_i) \; I \; X_i \,@\, Y_i$，我们有

$$G_i^{-1}(u_i, v_i) = [A_i^{-1}(u_i) \; H \; (\mathrm{FC}(P_i))^{-1}(u_i) \; H \; T_i^{-1}(v_i)] \; G$$
$$[((X \,@\, Y) \setminus W_i) \; H \; A_i^{-1}(u_i) \; H \; T_i^{-1}(v_i)]\#$$

因为对每一 $u_i \; I \; X_i$，$(\mathrm{FC}(P_i))^{-1}(u_i)$ 在 $X \,@\, Y$ 内是紧开的，由条件( )和( )，$G_i^{-1}(u_i, v_i)$ 在 $X \,@\, Y$ 内也是紧开的# 定义一集值映象 $G: X \,@\, Y \; y \; 2^{X @ X}$ 如下：

$$G(x,y) = \underset{i I I}{F} G_i(x,y), \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y\#$$

则我们有

$$G(x,y) < (A \,@\, T)(x,y), \qquad P(x,y) \; I \; X \,@\, Y\#$$

由条件( )和在文献[11]中的注 2.1，G 在 $X \,@\, Y$ 上也是 5-凝聚的# 引理 1.2 的一切条件被满足# 由引理 1.2，存在 $(\hat{x},\hat{y}) \; I \; X \,@\, Y$ 使得对每一 $i \; I \; I$，$G_i(\hat{x},\hat{y}) = \quad\#$ 如果对某 $j \; I \; I$，

$(\hat{x},\hat{y})\notin W_j$，则或 $A_j(\hat{x},\hat{y})=\emptyset$ 或 $T_j(\hat{x},\hat{y})=\emptyset$，这与条件( )相矛盾。所以对每一 $i\in I$，有 $(\hat{x},\hat{y})\in W_i$。这就证明了对每一 $i\in I$，$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x},\hat{y})$，$\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $A_i(\hat{x},\hat{y})\cap \mathrm{FC}(P_i(\hat{x},\hat{y}))=\emptyset$，且因此 $A_i(\hat{x},\hat{y})\cap P_i(\hat{x},\hat{y})=\emptyset$。所以我们对每一 $i\in I$ 有

$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x},\hat{y},z_i)\quad C_i(\hat{x}),\qquad \forall z_i\in A_i(\hat{x},\hat{y})$

$(\hat{x}_i\in A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x},\hat{y},z_i)\subseteq C_i(\hat{x}),\qquad \forall z_i\in A_i(\hat{x},\hat{y});$

$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x},\hat{y},z_i)\cap C_i(\hat{x})=\emptyset,\qquad \forall z_i\in A_i(\hat{x},\hat{y});$

$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x},\hat{y}),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和 $W_i(\hat{x},\hat{y},z_i)\cap C_i(\hat{x})\neq\emptyset,\qquad \forall z_i\in A_i(\hat{x},\hat{y}))$。

这说明 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQEP( )(SGVQEP( )、SGVQEP( )、SGVQEP( ))的一个解。

注 2.3 定理 2.1 在下列方面推广了 Peng 等人[4]的定理 3.5：1) 定理 2.1 内的数学模型比在文献[4]内的数学模型更一般；2) 从拓朴矢量空间的非空凸子集到没有凸性结构的局部 FC-一致空间；3) 对每一 $i\in I$，Z_i 可以是任何非空集和 $C_i(x)$ 可以没有锥结构；4) 对每一 $i\in I$ 和 $(x_i,y_i)\in X_i\times Y_i$，$A_i^{-1}(x_i)$，$T_i^{-1}(y_i)$ 在 $X\times Y$ 内可以是紧开的，集 W_i 在 $X\times Y$ 内可以是紧闭的；5) 定理 2.1 包含了比 Peng 等人[4]的定理 3.5 更多的结果。定理 2.1 也从几方面推广了 Ding[5]的定理 4.1 和定理 4.2 及 Ding 和 Yao[7]的定理 4.1。

注 2.4 定理 2.1 的条件( )能被下面条件代替：

( )$_1$ 对每一 $(x,y)\in X\times Y$，集 $P_i(x,y)=\left\{z_i\in X_i: W_i(x,y,z_i)\subseteq C_i(x)\right\}$ $(P_i(x,y)=\left\{z_i\in X_i: W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\}$，$P_i(x,y)=\left\{z_i\in X_i: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset\right\}$，$P_i(x,y)=\left\{z_i\in X_i: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)=\emptyset\right\})$ 是 X_i 的 FC-子空间；

( )$_2$ 对一切 $(x,y)\in X\times Y$，$W_i(x,y,x_i)\quad C_i(x)$ $(W_i(x,y,x_i)\subseteq C_i(x)$，$W_i(x,y,x_i)\cap C_i(x)=\emptyset$，$W_i(x,y,x_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset)$。

事实上，如果定理 2.1 的条件( )不成立，则存在 $i\in I$，$y\in Y$，$N_i=\left\{z_{i,0},\ldots,z_{i,n}\right\}\in\langle X_i\rangle$ 和具有 $x_i\in \mathrm{FC}(N_i)$ 的 $x\in X$，使得对一切 $j=0,\ldots,n$，$W_i(x,y,z_{i,j})\subseteq C_i(x)$ $(W_i(x,y,z_{i,j})\quad C_i(x)$，$W_i(x,y,z_{i,j})\cap C_i(x)\neq\emptyset$，$W_i(x,y,z_{i,j})\cap C_i(x)=\emptyset)$。由此推得 $N_i\subseteq P_i(x,y)$。因为由( )$_1$，$P_i(x,y)$ 是 FC-子空间，我们有 $x_i\in \mathrm{FC}(N_i)\subseteq P_i(x,y)$ 且因此 $W_i(x,y,x_i)\subseteq C_i(x)$ $(W_i(x,y,x_i)\quad C_i(x)$，$W_i(x,y,x_i)\cap C_i(x)=\emptyset$，$W_i(x,y,x_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset)$，这与条件( )$_2$ 相矛盾。所以定理 2.1 的条件( )必成立。

注 2.5 如果对每一 $i\in I$，Z_i 是一拓朴空间，则定理 2.1 的条件( )内的条件：对每一 $z_i\in X_i$，集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\subseteq C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)=\emptyset\right\})$ 是紧开的，能被下面条件代替：

( )$_1$ $C_i: X\to 2^{Z_i}$ 在 $X\times Z_i$ 内有开(闭)图；

( )$_2$ 对每一 $z_i\in X_i$，映象 $(x,y)\mapsto W_i(x,y,z_i)$ 在 $X\times Y$ 的每一紧子集上是上半连续的具有非空紧值。

事实上，从条件( )$_1$、( )$_2$ 和引理 2.3 推得对每一 $z_i\in X_i$，集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset\right\})$ 在 $X\times Y$ 内是紧闭的。因此集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\subseteq C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)=\emptyset\right\})$ 在 $X\times Y$ 内是紧开的。

注 2.6 如果对每一 $i\in I$，Z_i 是一拓朴空间，则定理 2.1 的条件( )内的条件：对每一 $z_i\in X_i$，集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset\right\})$ 是紧开的，能被下面条件代替：

( )$_1^c$ $C_i: X\to 2^{Z_i}$ 在 $X\times Z_i$ 内有闭(开)图；

( )$_2^c$ 对每一 $z_i\in X_i$，映象 $(x,y)\mapsto W_i(x,y,z_i)$ 在 $X\times Y$ 的每一紧子集上是下半连续的。

事实上，从条件( )$_1^c$、( )$_2^c$ 和引理 2.2 推得对每一 $z_i\in X_i$，集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\subseteq C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)=\emptyset\right\})$ 在 $X\times Y$ 内是紧闭的。因此集 $\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\}$ $(\left\{(x,y)\in X\times Y: W_i(x,y,z_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset\right\})$ 在 $X\times Y$ 内是紧开的。

注 2.7　定理 2.1 也是 Peng 等人[4] 的定理 3.1、3.3、3.4 和 Ding[5] 的定理 4.3 在局部 FC-一致空间内的改进变型。

下面我们假设, 对每一 $i \in I$, Z_i 是一拓朴矢量空间和 $C_i: X \to 2^{Z_i}$, 使得对每一 $x \in X$, $C_i(x)$ 是具有非空内部的闭凸锥。

定义 2.2　对每一 $i \in I$, 称 $W_i: X \times Y \times X_i \to 2^{Z_i}$,

( ) 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟凸的, 如果对每一 $(x, y) \in X \times Y$, $N_i = \{z_{i,0}, \ldots, z_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, $\{z_{i,i_0}, \ldots, z_{i,i_k}\} \subset N_i$ 和 $z_i \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$, 存在 $j \in \{0, \ldots, n\}$ 使得

$$W_i(x, y, z_{i,i_j}) \subset W_i(x, y, z_i) + C_i(x);$$

( ) 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟似凸的, 如果对每一 $(x, y) \in X \times Y$, $N_i = \{z_{i,0}, \ldots, z_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, $\{z_{i,i_0}, \ldots, z_{i,i_k}\} \subset N_i$ 和 $z_i \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$, 存在 $j \in \{0, \ldots, k\}$ 使得

$$W_i(x, y, z_i) \subset W_i(x, y, z_{i,i_j}) - C_i(x)。$$

注 2.8　定义 2.2 内的概念推广了 Lin[8] 的相应概念, 从拓朴矢量空间的凸子集到 FC-空间。

引理 2.4　如果对每一 $i \in I$, $W_i: X \times Y \times X_i \to 2^{Z_i}$ 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟凸的, 则集

$$\{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \quad C_i(x)\} \text{ 和 } \{z_i \in X_i: W_i(x, y_i, z_i) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X\}$$

都是 X_i 的 FC-子空间。

证明　如果集 $\{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \quad C_i(x)\}$ 不是 X_i 的 FC-子空间, 则存在 $N_i = \{z_{i,0}, \ldots, z_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, $\{z_{i,i_0}, \ldots, z_{i,i_k}\} \subset N_i \cap \{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \quad C_i(x)\}$ 和 $z_i^* \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$ 使得 $W_i(x, y, z_i^*) \subset C_i(x)$。因为 $W_i: X \times Y \times X_i \to 2^{Z_i}$ 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟凸的, 存在 $j \in \{0, \ldots, k\}$ 使得 $W_i(x, y, z_{i,i_j}) \subset W_i(x, y, z_i^*) + C_i(x) \subset C_i(x) + C_i(x) = C_i(x)$。因为 $z_{i,i_j} \in \{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \quad C_i(x)\}$, 我们有 $W_i(x, y, z_{i,i_j}) \quad C_i(x)$, 这是一个矛盾。因此集 $\{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \quad C_i(x)\}$ 是 X_i 的 FC-子空间。

如果集 $\{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X\}$ 不是 X_i 的 FC-子空间, 则存在 $N_i = \{z_{i,0}, \ldots, z_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, $\{z_{i,i_0}, \ldots, z_{i,i_k}\} \subset N_i \cap \{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X\}$ 和 $z_i^* \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$, 使得

$$W_i(x, y, z_i^*) \cap (-\operatorname{int} C(x)) = \quad 。\tag{2}$$

因为 $W_i: X \times Y \times X_i \to 2^{Z_i}$ 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟凸的, 存在 $j \in \{0, \ldots, k\}$, 使得

$$W_i(x, y, z_{i,i_j}) \subset W_i(x, y, z_i^*) + C_i(x)。\tag{3}$$

因为 $z_{i,i_j} \in \{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X\}$, 则我们有

$$W_i(x, y, z_{i,i_j}) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X \quad 。\tag{4}$$

令 $v_i^* \in W_i(x, y, z_{i,i_j}) \cap (-\operatorname{int} C_i(x))$。由式(3), 存在 $u_i^* \in W_i(x, y, z_i^*)$, 使得 $v_i^* \in u_i^* + C_i(x)$。因此我们有

$$u_i^* \in v_i^* - C_i(x) \subset -\operatorname{int} C_i(x) - C_i(x) \subset -\operatorname{int} C_i(x)。$$

由此推得 $W_i(x, y, z_i^*) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X$, 这与式(2) 矛盾。所以集 $\{z_i \in X_i: W_i(x, y, z_i) \cap (-\operatorname{int} C_i(x)) \quad X\}$ 是 X_i 的 FC-子空间。

引理 2.5　如果对每一 $i \in I$, $W_i: X \times Y \times X_i \to 2^{Z_i}$ 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC-拟似凸的,

则集

$$\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}\ 和\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ H\ C_i(x) = \quad\right\}$$

都是 X_i 的 FG- 子空间#

证明　如果集$\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}$不是 X_i 的 FC- 子空间, 则存在 $N_i = \left\{z_{i,0}, , , z_{i,n}\right\} I\ \ 3X_i4, \left\{z_{i,i_0}, , , z_{i,i_k}\right\} < N_i\ H\ \left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}, z_i^*\ \ I$ $_{UN_i}(\$_k)$ 使得 $W_i(x, y, z_i^*)\ \ -\ \mathrm{int}C_i(x)$# 因为 W_i 在第 3 自变量是 $C_i(x)$–FC– 拟似凸的, 存在 $j\ I\ \left\{0, , , k\right\}$使得 $W_i(x, y, z_i^*) < W(x, y, z_{i,i_j}) - C_i(x)$# 因为 $z_{i,i_j}\ I\ \left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}$, 我们有 $W_i(x, y_i, z_{i,i_j})\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)$# 由此推得 $W_i(x, y, z_i^*) < W(x, y, z_{i,i_j}) - C_i(x)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x) - C_i(x)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)$, 这是一个矛盾# 所以集$\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}$是 X_i 的 FC- 子空间# 如果集$\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ H\ C_i(x) = \quad\right\}$不是$X_i$ 的 FC- 子空间, 则存在 $N_i = \left\{z_{i,0}, , , z_{i,n}\right\} I\ \ 3X_i4, \left\{z_{i,i_0}, , , z_{i,i_k}\right\} < N_i\ H\ \left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ H\ C_i(x) = \quad\right\}, z_i^*\ \ I\ \ _{UN_i}(\$_k)$ 使得 $W_i(x, y, z_i^*)\ H\ C_i(x)\ X\quad$# 令 $u_i^*\ \ I\ \ W_i(x, y, z_i^*)\ H\ C_i(x)$# 因为 W_i 在第3自变量是 $C_i(x)$–FC– 拟似凸的, 存在$j\ I\ \left\{0, , , k\right\}$使得 $W_i(x, y, z_i^*) < W(x, y, z_{i,i_j}) - C_i(x)$# 因此存在$v_i^*\ \ I\ \ W_i(x, y, z_{i,i_j})$使得$u_i^*\ \ I\ \ v_i^* - C_i(x)$且所以$v_i^*\ \ I\ \ u_i^* + C_i(x) < C_i(x) + C_i(x) = C_i(x)$# 由此推得 $W_i(x, y, z_{i,i_j})\ H\ C_i(x)\ X\quad$# 因为 $z_{i,i_j}\ I\ \left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y_i, z_i)\ H\ C_i(x) = \quad\right\}$, 我们有 $W_i(x, y, z_{i,i_j})\ H\ C_i(x) = \quad$, 这是一个矛盾# 所以集$\left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ H\ C_i(x) = \quad\right\}$是$X_i$ 的 FG- 子空间#

定理 2.2　假设对每一 $i\ I\ \ I$, 下列条件被满足:

(　) 对每一 $(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y, A_i(x, y)$ 和 $T_i(x, y)$ 分别是 X_i 和 Y_i 的非空 FG- 子空间;

(　) 对每一 $(x_i, y_i)\ I\ \ X_i\ @\ Y_i, A_i^{-1}(x_i), T_i^{-1}(y_i)$ 在 $X\ @\ Y$ 内是紧开的;

(　) 映象 $x\ |y\ \ \mathrm{int}C_i(x)$ 有开图, 对每一 $z_i\ I\ \ X_i$, 映象$(x, y)\ |y\ \ W(x, y, z_i)$ 在$X\ @\ Y$的每一紧子集上是上半连续的具有非空紧值;

(　) 对每一 $y\ I\ \ Y$, W 在第 3 自变量是 $C_i(x)$–FC– 拟似凸的, 对每一$(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y$, $W(x, y, x_i)\ \ -\ \mathrm{int}C_i(x)$;

(　) 集 $W_i = \left\{(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y: (x_i, y_i)\ I\ \ A_i(x, y)\ @\ T_i(x, y)\right\}$在 $X\ @\ Y$ 内是紧闭的;

(　) 如下定义的映象 $(A\ @T): X\ @\ Y\ y\ \ 2^{X@Y}$,

$$(A\ @T)(x, y) = \left[\ \underset{i I\ I}{F} A_i(x, y)\right] @\left[\ \underset{i I\ I}{F} T_i(x, y)\right], \qquad P(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y$$

是 5- 凝聚的, 其中 5 是 $X\ @\ Y$ 上的非紧性测度#

则存在 $(\hat{x}, \hat{y})\ I\ \ X\ @\ Y$ 使得对每一$i\ I\ \ I$,

$$\hat{x}_i\ I\ \ A_i(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_i\ I\ \ T_i(\hat{x}, \hat{y})\ 和\ W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i)\ \ -\ \mathrm{int}C_i(\hat{x}), \qquad P z_i\ I\ \ A_i(\hat{x}, \hat{y})\#$$

证明　对每一 $i\ I\ \ I$, 定义一集值映象 $P_i: X\ @\ Y\ y\ \ 2^{X_i}$ 如下:

$$P_i(x, y) = \left\{z_i\ I\ \ X_i: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}, \qquad P(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y\#$$

由条件(　)和引理 2.3, 对每一 $z_i\ I\ \ Z_i$, 集 $P_i^{-1}(z_i) = \left\{(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y: W(x, y, z_i)\ <-\ \mathrm{int}C_i(x)\right\}$在 $X\ @\ Y$ 内是紧开的# 从条件(　)和引理 2.5 推得, 对每一 $i\ I\ \ I$ 和$(x, y)\ I\ \ X\ @\ Y$, $P_i(x, y)$ 是X_i 的FG- 子空间和$x_i =\ \ P_i(x)\ Y\ P_i(x, y)$# 对每一 $i\ I\ \ I$, 定义一集值映象 $G_i: X\ @\ Y\ y\ \ 2^{X_i @ Y_i}$ 如下:

$$G_i(x,y)=\begin{cases}[A_i(x,y)\ H\ P_i(x,y)]\ @T_i(x,y), & \text{如果}(x,y)\ I\ W_i,\\ A_i(x,y)\ @T_i(x,y), & \text{如果}(x,y)\ Y\ W_i\#\end{cases}$$

由(　), 对每一 $i\ I\ I$ 和 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $G_i(x,y)$ 是 $X_i\ @\ Y_i$ 的 FC- 子空间# 因为对每一 $i\ I\ I$ 和 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $x_i\ Y\ P_i(x,y)$, 由 W_i 的定义, 我们有对每一 $i\ I\ I$ 和 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $(x_i, y_i)\ Y\ G_i(x,y)\#$ 利用定理 3. 1 的证明中类似的论证, 我们能证明对每一 $i\ I\ I$ 和 $(u_i, v_i)\ I\ X_i\ @\ Y_i$, $G_i^{-1}(u_i, v_i)$ 在 $X\ @Y$ 内是紧开的# 条件(　) 蕴含 $G(x,y)=\ F_{i I I}G_i(x,y)$ 是 5- 凝聚的# 引理 1. 1 的一切条件被满足# 证明的余下部分类似于定理 2. 1 中的证明, 我们省略#

定理 2. 3　假设对每一 $i\ I\ I$, 下列条件被满足:

(　) 对每一 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $A_i(x,y)$ 和 $T_i(x,y)$ 分别是 X_i 和 Y_i 的非空 FC-子空间;

(　) 对每一 $(x_i, y_i)\ I\ X_i\ @\ Y_i$, $A_i^{-1}(x_i)$, $T_i^{-1}(y_i)$ 在 $X\ @Y$ 内是紧开的;

(　) 映象 $x\ |y\ C_i(x)$ 在 X 上是上半连续的, 每一 $z_i\ I\ Z_i$, 映象 $(x,y)\ |y\ W_i(x,y,z_i)$ 在 $X\ @Y$ 的每一紧子集上是下半连续的;

(　) 对每一 $y\ I\ Y$, W_i 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC- 拟凸的, 对每一 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $W_i(x, y, x_i)\ <\ C_i(x)$;

(　) 集 $W_i=\left\{(x,y)\ I\ X\ @Y:(x_i, y_i)\ I\ A_i(x,y)\ @T_i(x,y)\right\}$ 在 $X\ @Y$ 内是紧闭的;

(　) 如下定义的映象 $(A\ @T):X\ @Y\ y\ 2^{X@Y}$:

$$(A\ @T)(x,y)=\left[\underset{iII}{F}A_i(x,y)\right]@\left[\underset{iII}{F}T_i(x,y)\right],\qquad P(x,y)\ I\ X\ @Y$$

是 5- 凝聚的, 其中 5 是 $X\ @Y$ 上的非紧性测度#

则存在 $(\hat{x},\hat{y})\ I\ X\ @Y$ 使得对每一 $i\ I\ I$,

$$\hat{x}_i\ I\ A_i(\hat{x},\hat{y}), \hat{y}_i\ I\ T_i(\hat{x},\hat{y})\ \text{和}\ W_i(\hat{x},\hat{y},z_i)\ <\ C_i(\hat{x}),\qquad Pz_i\ I\ A_i(\hat{x},\hat{y})$$

即, $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQEP(　) 的解#

证明　对每一 $i\ I\ I$, 定义一集值映象 $P_i:X\ @Y\ y\ 2^{X_i}$ 如下:

$$P_i(x,y)=\left\{z_i\ I\ X_i:W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\},\qquad P(x,y)\ I\ X\ @Y\#$$

由条件(　) 和引理 2. 2, 对每一 $z_i\ I\ Z_i\#$ $P^{-1}(z_i)=\left\{(x,y)\ I\ X\ @Y:W_i(x,y,z_i)\quad C_i(x)\right\}$ 在 $X\ @Y$ 内是紧开的# 从条件(　) 和引理 2. 4 推得对每一 $i\ I\ I$ 和 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $P_i(x,y)$ 是 X_i 的 FC- 子空间和 $x_i\ Y\ P_i(x,y)\#$ 证明的余下部分类似于定理 2. 2 中的证明, 我们省略#

应用引理 1, 1, 引理 2. 2~ 2. 5 和类似于定理 2. 2 和 2. 3 的证明中的论证, 我们能容易地证明下面结果#

定理 2. 4　假设对每一 $i\ I\ I$, 下列条件被满足:

(　) 对每一 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $A_i(x,y)$ 和 $T_i(x,y)$ 分别是 X_i 和 Y_i 的非空 FC-子空间;

(　) 对每一 $(x_i, y_i)\ I\ X_i\ @\ Y_i$, $A_i^{-1}(x_i)$, $T_i^{-1}(y_i)$ 在 $X\ @Y$ 内是紧开的;

(　) 映象 $x\ |y\ \mathrm{int}C_i(x)$ 有开图和对每一 $z_i\ I\ X_i$, 映象 $(x,y)\ |y\ W_i(x,y,z_i)$ 在 $X\ @Y$ 的每一紧子集上是下半连续的;

(　) 对每一 $y\ I\ Y$, W_i 在第 3 自变量是 $C_i(x)$-FC- 拟凸的和对每一 $(x,y)\ I\ X\ @Y$, $W_i(x, y, x_i)\ H\ (-\ \mathrm{int}C_i(x))=\ ;$

(　) 集 $W_i=\left\{(x,y)\ I\ X\ @Y:(x_i, y_i)\ I\ A_i(x,y)\ @T_i(x,y)\right\}$ 在 $X\ @Y$ 内是紧闭的;

(　) 如下定义的映象 $(A\ @T):X\ @Y\ y\ 2^{X@Y}$:

$$(A\ @T)(x,y)=\left[\underset{iII}{F}A_i(x,y)\right]@\left[\underset{iII}{F}T_i(x,y)\right],\qquad P(x,y)\ I\ X\ @Y$$

是 5- 凝聚的, 其中 5 是 X @ Y 上的非紧性测度#

则存在 $(\hat{x}, \hat{y})$ I X @ Y 使得对每一 i I I,

$$\hat{x}_i \; I \; A_i(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_i \; I \; T_i(\hat{x}, \hat{y}) \text{ 和 } W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i) \; H \; (- \operatorname{int} C_i(\hat{x})) = \quad , \quad P z_i \; I \; A_i(\hat{x}, \hat{y})\#$$

定理 2.5　假设对每一 i I I, 下列条件被满足:

(　) 对每一 (x, y) I X @ Y, $A_i(x, y)$ 和 $T_i(x, y)$ 分别是 X_i 和 Y_i 的非空 FC- 子空间;

(　) 对每一 (x_i, y_i) I X_i @ Y_i, $A_i^{-1}(x_i)$, $T_i^{-1}(y_i)$ 在 X @ Y 内是紧开的;

(　) 映象 x | y $C_i(x)$ 在 X 上是上半连续的, 对每一 z_i I Z_i, 映象 (x, y) | y $W(x, y, z_i)$ 在 X @ Y 的每一紧子集上, 是上半连续的具有非空紧值;

(　) 对每一 y I Y, W_i 在第 3 自变量是 $C_i(x)$–FC– 拟似凸的, 对每一 (x, y) I X @ Y, $W(x, y, x_i)$ H $C_i(x)$ X　;

(　) 集 $W_i = \left\{(x, y) \; I \; X \; @ \; Y: (x_i, y_i) \; I \; A_i(x, y) \; @ \; T_i(x, y)\right\}$ 在 X @ Y 内是紧闭的;

(　) 如下定义的映象 $(A \; @ \; T): X \; @ \; Y \; y \; 2^{X @ Y}$:

$$(A \; @ \; T)(x, y) = \left[\prod_{i I I} A_i(x, y)\right] @ \left[\prod_{i I I} T_i(x, y)\right], \qquad P(x, y) \; I \; X \; @ \; Y$$

是 5- 凝聚的, 其中 5 是 X @ Y 上的非紧性测度#

则存在 $(\hat{x}, \hat{y})$ I X @ Y 使得对每一 i I I,

$$\hat{x}_i \; I \; A_i(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_i \; I \; T_i(\hat{x}, \hat{y}) \text{ 和 } W_i(\hat{x}, \hat{y}, z_i) \; H \; C_i(\hat{x}) \; X \quad , \qquad P z_i \; I \; A_i(\hat{x}, \hat{y}),$$

即, $(\hat{x}, \hat{y})$ 是 SGVQEP(　) 的解#

注 2.9　定理 2.2~ 2.5 是 Peng 等人[4] 的相应结果在局部 FC- 一致空间内的改进变型#

[参 考 文 献]

[1] Lin L J, Liu Y H. Existence theorems for systems of generalized vector quasi-equilibrium problems and optimization problems[J]. J Optim Theory Appl, 2006, 130(3): 461-475.

[2] Lin L J, Chen L F, Ansari Q H. Generalized abstract economy and systems of generalized vector quasi-equilibrium problems[J/OL]. J Comput Appl Math, 2006. DOI: 10.1016/j.cam.2006.10.002.

[3] Lin L J. Systems of generalized quasivariational inclusions problems with applications to variational analysis and optimizations[J]. J Globbal Optim, 2007, 38(1): 21-39.

[4] Peng J W, Lee H W J, Yang X M. On system of generalized vector quasi-equilibrium problems with set-valued maps[J]. J Global Optim, 2006, 36(1): 139-158.

[5] DING Xie-ping. System of generalized vector quasi-equilibrium problems on product FC-spaces[J]. Acta Math Sci B, 2007, 27(3): 522-534.

[6] DING Xie-ping. The generalized game and the system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-uniform spaces[J/OL]. Nonlinear Anal, 2007. DOI: 10.1016/j.na.1006.12.003.

[7] DING Xie-ping, Yao J C. Maximal element theorems with applications to generalized game and system of generalized vector quasi-equilibrium problems in G-convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2005, 126(3): 571-588.

[8] Lin L J. System of generalized vector quasi-equilibrium problems with applications to fixed point theorems for a family of nonexpansive multivalued mappings[J]. J Global Optim, 2006, 34(1): 15-32.

[9] DING Xie-ping, Yao J C, Lin L J. Solutions of system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally G-convex uniform spaces[J]. J Math Anal Appl, 2004, 292(2): 398-410.

10] DING Xie-ping. System of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-spaces[J]. Acta Math Sinica, 2006, 22(5): 1529-1538.

[11] 丁协平. 局部 FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用(Ñ)[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(12): 1392-1399.

[12] Ben-El-Mechaiekh H, Chebbi S, Flornzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, 222(1): 138-150.

[13] Horvath C. Contractibility and general convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, 156(2): 341-357.

[14] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 209(2): 551-571.

[15] DING Xie-ping. Maximal element theorems in product FC-spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, 305(1): 29-42.

[16] Dugundji J. Topology[M]. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1966.

[17] Aliprantis C D, Border K C. Infinite Dimensional Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[18] DING Xie-ping. Generalized KKM type theorems in FC-spaces with applications( )[J]. J Global Optim, 2007, 38(3): 367-385.

[19] DING Xie-ping, Park J Y. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2004, 120(2): 937-990.

Maximal Elements and Generalized Games Involving Condensing Mappings in Locally FC-Uniform Spaces and Applications( )

DING Xie-ping

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: Some new systems of generalized vector quasi-equilibrium problems involving condensing mappings were introduced and studied in locally FC-uniform spaces. By applying the existence theorem of maximal elements of condensing set-valued mappings in locally FC-uniform spaces obtained by author in the preceding paper, some new existence theorems of solutions for the systems of generalized vector quasi-equilibrium problems were proved in locally FC-uniform spaces. These results improve and generalize some recent known results in literature to locally FC-uniform spaces.

Key words: system of generalized vector quasi-equilibrium problems; maximal element; $C_i(x)$-FC-diagonally quasiconvex; $C_i(x)$-FC-quasiconvex; $C_i(x)$-FC-quasiconvex-like; locally FC-uniform spaces