应用数学和力学,第 28 卷 第 12 期
2007 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 12, Dec. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 12-1392-08

局部 FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用(Ⅰ)*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 首先在没有凸性结构的局部 FC-一致空间内引入了非紧性测度和凝聚集值映象概念• 在局部 FC-一致空间内对涉及凝聚集值映象的集值映象族证明了新的极大元存在性定理• 作为应用,在局部 FC-一致空间内对涉及凝聚集值映象的广义对策建立了某些新的平衡存在性定理• 这些结果改进和推广了文献中的某些已知结果到局部 FC-一致空间• 对广义矢量拟平衡组的进一步应用,我们将在文(Ⅱ)中给出•

关 键 词: 凝聚集值映象; 极大元; 广义对策; 平衡; 局部 FC-一致空间

中图分类号: O225; O189.11 文献标识码: A

引 言

大家知道, 极大元存在性定理, 是在不同的空间内, 证明广义对策平衡存在性定理的有用和重要的工具• 许多作者已经分别在拓扑矢量空间、H-空间、G-凸空间和 FC-空间内建立了很多极大元存在性定理• 这些结果对数学经济和广义对策的重要应用已被广泛研究• 对各类集值映象的极大元存在性结果和它们对数学经济、广义对策和其他数学分支的应用, 读者可以参考文献[1-27] 和其中的参考文献•

最近, Chebbi-Florenzano[24] 和 Lin-Ansari[25] 在 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间内对凝聚集值映象建立了某些极大元存在性定理, 对涉及凝聚集值映象的广义对策(抽象经济), 建立了某些平衡存在性定理• 在大多数极大元存在性和广义对策平衡存在性结果中, 凸性假设起着关键作用, 这就严格限制了这些结果的应用领域• 事实上, 在广义对策的实际问题中, 经济人的策略集和经济人的选择对应和约束对应的值, 都可以没有凸性结构• 因此, 在没有凸性结构的一般拓扑空间内, 研究极大元存在性和广义对策的平衡存在性是十分合理和有价值的•

在本文中, 我们首先在没有凸性结构的局部 FC-一致空间内, 引入了非紧性测度和凝聚集值映象概念• 其次, 在局部 FC-一致空间内, 对涉及凝聚集值映象的集值映象族证明了一个新的极大元存在性定理• 作为应用, 在局部 FC-一致空间内, 对涉及凝聚集值映象的广义对策建

* 收稿日期: 2007-03-21; 修订日期: 2007-10-27
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081; SZD0406)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授(Tel: +86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com).

立了某些新的平衡存在性定理• 这些结果改进和推广了文献中的某些已知结果到没有凸性结构的局部FC-一致空间• 这些结果对广义矢量拟平衡问题组的进一步应用, 将在后继文章(Ⅱ)中给出•

1　预备知识

对集 X, 我们将用 2^X 和 $\langle X\rangle$ 分别表示 X 的所有子集的族和 X 的一切非空有限子集的族• 令 Δ_n 是 R^{n+1} 内顶点为 $e_0, e_1, \dots, e_n$ 的 n-维标准单型• 对 $\{0, 1, \dots, n\}$ 的非空子集 J, 令 $\Delta_J = \mathrm{co}(\{e_j : j\in J\})$• 下面概念由 Ben-El-Mechaiekh 等人[26]引入•

定义 1.1　称 (X, Γ) 是一 L-凸空间, 如果 X 是一拓扑空间和 $\Gamma: \langle X\rangle \to 2^X$ 是一映象, 使得对每一 $N\in\langle X\rangle$ 具有 $|N| = n+1$, 存在一连续映象 $\varphi_N: \Delta_n \to \Gamma(N)$ 满足 $A\in\langle N\rangle$ 具有 $|A| = J+1$ 蕴含 $\varphi_N(\Delta_J)\subset\Gamma(A)$, 其中 Δ_J 是 Δ_N 的对应于 A 的面•

下面概念由 Ding[20]引入•

定义 1.2　称 (X, φ_N) 是一有限连续拓朴空间(简称FC-空间), 如果 X 是一拓朴空间, 使得对每一 $N = \{x_0, \dots, x_n\}\in\langle X\rangle$, 其中 N 的某些元素可以相同, 存在一连续映象 $\varphi_N: \Delta_n\to X$• 称 (X, φ_N) 的一子集 D 是 X 的 FC-子空间, 如果对每一个 $N = \{x_0, \dots, x_n\}\in\langle X\rangle$ 和对任何 $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}\subset D\cap N$, $\varphi_N(\Delta_k)\subset D$•

显然, 每一个 L-凸空间必是 FC-空间• 下面例子说明存在 FC-空间不是 L-凸空间•

例 1.1　令 $X = (1, 2)\cup(3, +\infty)$ 具有通常拓朴• 定义一映象 $\varphi_N: \Delta_n\to 2^X$ 如下: 对每一 $N = \{x_0, \dots, x_n\}\in\langle X\rangle$,

$$\varphi_N(\alpha) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i, & \text{如果 } N\subset(1, 2), \\ 3\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i, & \text{如果 } N\not\subset(1, 2), \ \forall\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)\in\Delta_n\text{•} \end{cases}$$

容易看出 φ_N 是连续的且因此 (X, φ_N) 是一FC-空间• 对任何 $a\in(1, 2)$ 和 $b\in(3, \infty)$, $(a, 2)\cup(3, \infty)$ 和 (b, ∞) 都是 X 的FC-子空间• 但 X 不是凸的• 如果定义一集值映象 $\Gamma: \langle X\rangle\to 2^X$ 如下:

$$\Gamma(N) = \varphi_N(\Delta_n), \qquad \forall N = \{x_0, \dots, x_n\}\in\langle X\rangle,$$

则对每一 $N = \{x_0, \dots, x_n\}\in\langle X\rangle$, 我们有 $\varphi_N(\Delta_N)\subset\Gamma(N)$• 但是如果 $N = N_1\cup N_2$, 其中 $N_1\subset(1, 2)$ 具有 $|N_1| = J+1$, $J < n$ 和 $N_2\subset(3, +\infty)$, 则我们有 $\Gamma(N_1) = \varphi_{N_1}(\Delta_J)\subset(1, 2)$ 和 $\varphi_N(\Delta_J)\subset(3, +\infty)$, 即, $\varphi_N(\Delta_J)\not\subset\Gamma(N_1)$• 因此 (X, Γ) 不是一 L-凸空间• 所以在没有凸性结构的FC-空间内研究各种非线性问题是十分合理和有价值的•

由FC-子空间的定义, 容易看出 (X, φ_N) 的每一 FC-子空间也是一 FC-空间, 且如果 $\{B_i\}_{i\in I}$ 是FC-空间 (X, φ_N) 的FC-子空间族和 $\bigcap_{i\in I}B_i\neq\emptyset$, 则 $\bigcap_{i\in I}B_i$ 也是 $(X, \{\varphi_N\})$ 的FC-子空间, 其中 I 是任何指标集•

对 (X, φ_N) 的子集 A, 我们能定义 A 的 FC-包如下:

$$\mathrm{FC}(A) = \bigcap\{B\subset X : A\subset B \text{ 和 } B \text{ 是 } X \text{ 的 FC-子空间}\}\text{•}$$

显然, $\mathrm{FC}(A)$ 是 X 的包含 A 的最小 FC-子空间•

下面概念由 Ding[23]引入•

定义 1.3　称 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 是一局部 FC-一致空间, 如果 $(X, \mathscr{U})$ 是一致空间和 (X, φ_N) 是

一FC-空间，使得$\mathscr{U}$有由满足下面条件的环境(entourages)组成的基$\mathscr{B}$：对每一$V\in\mathscr{B}$，每当$M\subseteq X$是X的一FC-子空间时，集$V[M]=\{x\in X: M\cap V[x]\neq\emptyset\}$也是$X$的FC-子空间。

引理 1.1[22]　令(X,φ_N)是一FC-空间和A是X的一非空子集，则

$$\mathrm{FC}(A)=\bigcup\{\mathrm{FC}(N): N\in\langle A\rangle\}.$$

注 1.1　引理 1.1 推广了 Tarafdar[6]的引理 1 和 Tan 和 Zhang[9]的引理 2.1，从 H-空间和 G-凸空间到 FC-空间。

引理 1.2[22]　令X是一拓朴空间，(Y,φ_N)是一FC-空间和$G: X\to 2^Y$是使得对每一$y\in Y$，$G^{-1}(y)=\{x\in X: y\in G(x)\}$在$X$内是紧开的。则由下式定义的映象$\mathrm{FC}(G): X\to 2^Y$：对每一$x\in X$，$\mathrm{FC}(G)(x)=\mathrm{FC}(G(x))$，满足对每一$y\in Y$，$(\mathrm{FC}(G))^{-1}(y)$在$X$内也是紧开的。

注 1.2　引理 1.2 推广了 Ding[10]的引理 3.1 和 Tan 和 Zhang[9]的引理 2.2，从 H-空间和 G-凸空间到 FC-空间。

下面结果是 Ding[23]的定理 2.2。

引理 1.3　令I是任何指标集。对每一$i\in I$，令$(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$是一局部 FC-一致空间和每一$(X_i,\mathscr{U}_i)$有由对称环境(entourages)组构成的基$\mathscr{B}_i$。令$X=\prod_{i\in I}X_i$，$\mathscr{U}=\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$和对任何$N\in\langle X\rangle$，$\varphi_N=\prod_{i\in I}\varphi_{N_i}$，其中$N_i$是$N$在$X_i$上的投影。则$(X,\mathscr{U},\varphi_N)$也是一局部 FC-一致空间。

下面广义对策的平衡存在定理是 Ding[22]的系 3.3。

引理 1.4　令I是任何指标集。对每一$i\in I$，令(X_i,φ_{N_i})是一 FC-空间，$X=\prod_{i\in I}X_i$和K是X的紧子集。对每一$i\in I$，令$G_i: X\to 2^{X_i}$是使得：

(ⅰ) 对每一$x\in X$，$G_i(x)$是X_i的 FC-子空间；

(ⅱ) 对每一$x\in X$，$\pi_i(x)\notin G_i(x)$；

(ⅲ) 对每一$y_i\in X_i$，$G_i^{-1}(y_i)$在X内是紧开的；

(ⅳ) 对每一$N_i\in\langle X_i\rangle$，存在X_i的包含N_i的非空紧 FC-子空间L_{N_i}和对每一$x\in X\setminus K$，存在$i\in I$满足$L_{N_i}\cap G_i(x)\neq\emptyset$。

则存在$\hat{x}\in K$使得对每一$i\in I$，$G_i(\hat{x})=\emptyset$。

下面结果是引理 1.4 的直接推论。

引理 1.5　令I是任何指标集。对每一$i\in I$，令(X_i,φ_{N_i})是一紧 FC-空间和$X=\prod_{i\in I}X_i$。对每一$i\in I$，令$G_i: X\to 2^{X_i}$是使得：

(ⅰ) 对每一$x\in X$，$G_i(x)$是X_i的 FC-子空间；

(ⅱ) 对每一$x\in X$，$\pi_i(x)\notin G_i(x)$；

(ⅲ) 对每一$y_i\in X_i$，$G_i^{-1}(y_i)$在X内是紧开的。

则存在$\hat{x}\in X$使得对每一$i\in I$，$G_i(\hat{x})=\emptyset$。

证明　对每一$i\in I$，令$X_i=K_i$且因此$K=\prod_{i\in I}K_i=\prod_{i\in I}X_i=X$是紧的。引理 1.4 的条件(ⅳ)被平凡满足。引理 1.5 的结论由引理 1.4 推得。

2 凝聚映象的极大元

在本节内,我们将在局部FC-一致空间内引入了非紧性测度和凝聚集值映象概念,证明一个涉及凝聚集值映象的集值映象族的极大元存在性定理。

定义2.1 令 C 是具有由0表示最小元的格,$(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 是局部FC-一致空间和 $\Phi: 2^X \to C$ 是一映象。称 Φ 是 X 上的一非紧性测度,如果下面条件被满足:

(i) 对任何 $A \subset X$, $\Phi(A) = 0$ 当且仅当 A 是相对紧的;

(ii) $\Phi(\overline{FC(A)}) = \Phi(A)$,其中 $\overline{FC(A)}$ 表 A 的FC-包的闭包;

(iii) $\Phi(A \cup B) = \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$。

从条件(iii)推得如果 $A \subseteq B$,则 $\Phi(A) \leqslant \Phi(B)$。

定义2.2 令 $\Phi: 2^X \to C$ 是 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 上的非紧性测度。称映象 $G: X \to 2^X$ 是 Φ 凝聚的,如果每当 $A \subseteq X$ 具有 $\Phi(G(A)) \geqslant \Phi(A)$,则 A 是相对紧的。

注2.1 显然,如果 $G: X \to 2^X$ 是 Φ 凝聚的和 $G^*: X \to 2^X$ 满足 $G^*(x) \subseteq G(x)$, $\forall x \in X$,则 G^* 也是 Φ 凝聚的。

引理2.1 令 A 是一局部FC-一致空间 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 的非空子集。则 $\overline{\mathrm{FC}}(A)$ 是 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 的一闭FC-子空间。

证明 熟知在一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 内,集 $A \subseteq X$ 的闭包由下式给出:

$$\bar{A} = \bigcap\{V[A]: V \in \mathscr{B}\},$$

其中 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的任何基,见Kelley[28] 179的定理7。从局部FC-一致空间的定义推得对每一 $V \in \mathscr{B}$, $V[\mathrm{FC}(A)]$ 也是 X 的FC-子空间。因此 A 的FC-包的闭包 $\overline{\mathrm{FC}}(A)$ 是 X 的闭FC-子空间。

按照Chebbi和Florenzano[24]的思路,我们首先证明下面有用的结果。

引理2.2 令 I 是任何指标集。对每一 $i \in I$,令 $(X_i, \mathscr{U}_i, \varphi_{N_i})$ 是一局部FC-一致空间和 $G_i: X = \prod_{i \in I} X_i \to 2^{X_i}$ 是一集值映象,使得由 $G(x) = \prod_{i \in I} G_i(x)$ 定义的映象 $G: X \to 2^X$ 是 Φ 凝聚的。则存在 X 的非空紧FC-子空间 $K = \prod_{i \in I} K_i$,其中每一 K_i 是 X_i 的紧FC-子空间,使得 $G(K) \subseteq K$。

证明 令 $x_0 = (x_{0,i})_{i \in I}$ 是 X 的一给定元。考虑满足下面条件的一切 $C = \prod_{i \in I} C_i$ 的族 $\mathscr{F}$:对每一 $i \in I$, C_i 是 X_i 包含 $x_{0,i}$ 的闭FC-子空间,$G(C) \subset C$。因 $X \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ 是非空的。令 $C_0 = \bigcap_{C \in \mathscr{F}} C$。则 C_0 是 X 的非空闭FC-子空间和 $x_0 \in C_0$。如果 $x \in C_0$,则对一切 $C \in \mathscr{F}$, $G(x) \subseteq C$ 且因此 $G(C_0) \subseteq C_0$ 和 $C_0 \in \mathscr{F}$。现在我们证明 C_0 也是紧的。假设 C_0 不是紧的,因为 G 是 Φ 凝聚的,$\Phi(G(C_0)) \ngeqslant \Phi(C_0)$。令 $C_1 = \overline{\mathrm{FC}}(\{x_0\} \cup G(C_0))$。由引理2.1, C_1 是 X 的闭FC-子空间。因 $\{x_0\} \cup G(C_0) \subset C_0$ 和 C_0 是 X 的闭FC-子空间,所以我们有

$$C_1 = \overline{\mathrm{FC}}(\{x_0\} \cup G(C_0)) \subseteq C_0,$$

这蕴含 $G(C_1) \subseteq G(C_0) \subseteq C_1$。因此,$C_1 \in \mathscr{F}$ 和 $C_0 \subseteq C_1$。所以 $C_0 = C_1$。由此推得 $\Phi(C_0) = \Phi(C_1) = \Phi(\overline{\mathrm{FC}}(\{x_0\} \cup G(C_0))) = \Phi(G(C_0))$。这是一矛盾。因此 C_0 必是紧的。

注2.2 引理2.2推广了Chebbi和Florenzano[24]的引理1到没有凸性结构的局部FC-一致空间。

应用引理1.5和引理2.2,我们有下面极大元存在结果。

定理2.1 令 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 $(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$ 是一局部FC-一致空间. 令 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是如在引理1.3内定义的局部FC-一致空间, Φ 是 X 上的非紧性测度. 对每一 $i\in I$, 令 $G_i:X\to 2^{X_i}$ 是使得

(ⅰ) 对每一 $x\in X$, $G_i(x)$ 是 X_i 的FC-子空间;

(ⅱ) 对每一 $x\in X$, $\pi_i(x)\notin G_i(x)$;

(ⅲ) 对每一 $y_i\in X_i$, $G_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的;

(ⅳ) 由 $G(x)=\prod_{i\in I}G_i(x)$, $\forall x\in X$ 定义的映象 $G:X\to 2^X$ 是 Φ 凝聚的.

则存在 $\hat{x}\in X$, 使得对每一 $i\in I$, $G_i(\hat{x})=\varnothing$.

证明 由(ⅳ)和引理2.2, 存在 X 的一紧FC-子空间 $K=\prod_{i\in I}K_i$, 其中每一 K_i 是 X_i 的紧FC-子空间, 使得 $G(K)\subset K$. 从条件(ⅰ)~(ⅲ)推得对每一 $i\in I$, G_i 在 K 上的限制 $G_i|_K$ 也满足引理1.5的条件(ⅰ)~(ⅲ). 因此引理1.5的一切条件被满足. 由引理1.5, 存在 $\hat{x}\in K\subset X$ 使得对每一 $i\in I$, $G_i(\hat{x})=\varnothing$.

注2.3 定理2.1推广了Chebbi和Florenzano[24]的命题2及Lin和Ansari[25]的定理4.3到没有凸性结构的局部FC-一致空间.

3 广义对策的平衡

在本节中, 利用上节的定理2.1, 我们将在局部FC-一致空间内, 对具有模糊约束对应的广义对策建立某些新的平衡存在定理.

追随Kim和Tan的文献[27], 我们引入下面具有模糊约束对应的广义对策的模型.

令 I 是有限或无限个经纪人的集. 对每一 $i\in I$, 令 X_i 是第 i 个经纪人的策略集(或商品空间). 一广义对策 $\Gamma=(X_i,A_i,T_i,P_i)_{i\in I}$ 被定义为一有序组 (X_i,A_i,T_i,P_i) 构成的族, 其中 $A_i:X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{X_i}$ 是第 i 个经纪人的约束对应; $T_i:X\to 2^{X_i}$ 是第 i 个经纪人的模糊约束对应; $P_i:X\times X\to 2^{X_i}$ 是第 i 个经纪人的选择对应. 广义对策 Γ 的平衡是一点 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times X$, 使得对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in A_i(\hat{x})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x})$ 和 $A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x},\hat{y})=\varnothing$.

如果对每一 $i\in I$ 和对一切 $(x,y)\in X\times X$, $T_i(x)=X_i$ 和 $P_i(x,y)=P_i(x)$, 则广义对策 Γ 和 Γ 的平衡点的上述定义与在文献[1-11,15-17]中的广义对策的通常定义重合.

定理3.1 令 $\Gamma=(X_i,A_i,T_i,P_i)_{i\in I}$ 是一广义对策和 $X=\prod_{i\in I}X_i$, 使得对每一 $i\in I$,

(ⅰ) $(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$ 是一局部FC-一致空间;

(ⅱ) 对每一 $x\in X$, $A_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 是 X_i 的非空FC-子空间, 对每一 $y_i\in X_i$, $A_i^{-1}(y_i)$, $T_i^{-1}(y_i)$ 和 $P_i^{-1}(y_i)$ 是紧开集;

(ⅲ) 对每一 $(x,y)\in X\times X$, $x_i\notin \mathrm{FC}(P_i(x,y))$;

(ⅳ) 集 $W_i=\left\{(x,y)\in X\times X: x_i\in A_i(x)\text{ 和 } y_i\in T_i(y)\right\}$ 在 $X\times X$ 内是紧闭的;

(ⅴ) 由 $(A\times T)(x,y)=\prod_{i\in I}A_i(x)\times\prod_{i\in I}T_i(y)$, $\forall(x,y)\in X\times X$ 定义的映象 $A\times T:X\times X\to 2^{X\times X}$ 是 Φ 凝聚的, 其中 Φ 是 $X\times X$ 上的非紧性测度.

则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times X$ 使得对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}),\quad \hat{y}_i\in T_i(\hat{x}),\quad A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x},\hat{y})=\varnothing,$$

即 $(\hat{x},\hat{y})$ 是广义对策 Γ 的一平衡点.

证明　由引理 1.3, $X=\prod_{i\in I}X_i$ 和 $X\times X$ 都是局部 FC- 一致空间。对每一 $i\in I$, 定义一集值映象 $G_i: X\times X\to 2^{X_i\times X_i}$ 如下:

$$G_i(x,y)=\begin{cases}[A_i(x)\cap \mathrm{FC}(P_i(x,y))]\times T_i(y), & \text{当}(x,y)\in W_i,\\ A_i(x)\times T_i(y), & \text{当}(x,y)\notin W_i。\end{cases}$$

因为对每一 $(x,y)\in X\times X$, $\mathrm{FC}(P_i(x,y))$ 是 X_i 的 FC- 子空间, 从条件(ii)和引理 1.3 推得, 对每一 $i\in I$ 和 $(x,y)\in X\times X$, $G_i(x,y)$ 是 $X_i\times X_i$ 的 FC- 子空间。由(iii)和(iv), 我们有, 对每一 $(x,y)\in X\times X$, $(x_i,y_i)\notin G_i(x,y)$。对每一 $i\in I$ 和 $(u_i,v_i)\in X_i\times X_i$, 我们有

$$G_i^{-1}(u_i,v_i)=[(A^{-1}(x_i)\times X)\cap(\mathrm{FC}(P_i))^{-1}(u_i)\cap(T_i^{-1}(v_i)\times X)]\cup$$
$$[((X\times X)\setminus W_i)\cap(A_i^{-1}(u_i)\times X)\cap(T_i^{-1}(v_i)\times X)]。$$

由(ii)和引理 1.2, 对每一 $i\in I$ 和 $u_i\in X_i$, $(\mathrm{FC}(P_i))^{-1}(u_i)$ 在 $X\times X$ 内是紧开的。因此从条件(ii)推得, 对每一 $i\in I$ 和 $(u_i,v_i)\in X_i\times X_i$, $G_i^{-1}(u_i,v_i)$ 在 $X\times X$ 内是紧开的。由 G_i 的定义, 我们有对每一 $i\in I$ 和 $(x,y)\in X\times X$, $G_i(x,y)\subset A_i(x)\times T_i(y)$。由此推得对一切 $(x,y)\in X\times X$, $G(x,y)=\prod_{i\in I}G_i(x,y)\subset\prod_{i\in I}A_i(x)\times\prod_{i\in I}T_i(y)=(A\times T)(x,y)$。条件(v)和注 2.1 蕴含 $G: X\times X\to 2^{X\times X}$ 也是 Φ 凝聚的。定理 2.1 的一切条件被满足。由定理 2.1, 存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times X$, 使得对每一 $i\in I$, $G_i(\hat{x},\hat{y})=\emptyset$。如果对某 $j\in I$, $(\hat{x},\hat{y})\notin W_j$, 则或 $A_i(\hat{x})=\emptyset$ 或 $T_i(\hat{x})=\emptyset$, 这与条件(ii)相矛盾。所以对一切 $i\in I$, $(\hat{x},\hat{y})\in W_i$。这就是说对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}),\ \hat{y}_i\in T_i(\hat{x}),\ A_i(\hat{x})\cap\mathrm{FC}(P_i(\hat{x},\hat{y}))=\emptyset。$$

注意到 $A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x},\hat{y})\subset A_i(\hat{x})\cap\mathrm{FC}(P_i(\hat{x},\hat{y}))$, 我们得到对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}),\hat{y}_i\in T_i(\hat{x}),\ A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x},\hat{y})=\emptyset,$$

即, $(\hat{x},\hat{y})$ 是广义对策 Γ 的一平衡点。

注 3.1　定理 3.1 推广了 Chebbi 和 Florenzano[24] 的命题 3 及 Lin 和 Ansari[25] 的定理 5.2, 从局部凸拓朴矢量空间到没有凸性结构的局部 FC- 一致空间。

定理 3.2　令 $\Gamma=(X_i,A_i,P_i)_{i\in I}$ 是一广义对策, 其中 $P_i: X\to 2^{X_i}$ 和 $X=\prod_{i\in I}X_i$, 使得对每一 $i\in I$,

(i) $(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$ 是一局部 FC- 一致空间;

(ii) 对每一 $x\in X$, $A_i(x)$ 和 $P_i(x)$ 都是 X_i 的 FC- 子空间, $A_i(x)\neq\emptyset$ 和对每一 $y_i\in X_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 和 $P_i^{-1}(y_i)$ 都是紧开集;

(iii) 对每一 $x\in X$, $x_i\notin P_i(x)$;

(iv) 集 $W_i=\{x\in X: x_i\in A_i(x)\}$ 在 X 内是紧闭的;

(v) 由 $A(x)=\prod_{i\in I}A_i(x)$, $\forall x\in X$ 定义的映象 $A: X\to 2^X$ 是 Φ 凝聚的, 其中 Φ 是 X 上的非紧性测度。

则存在 $\hat{x}\in X$, 使得对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}_i\in A_i(\hat{x}),\ A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x})=\emptyset,$$

即, $\hat{x}$ 是广义对策 Γ 的一平衡点。

证明　在定理 3.1 中, 对每一 $i\in I$ 和 $(x,y)\in X\times X$, 令 $T_i(x)=X_i$ 和 $P_i(x,y)=P_i(x)$。因为对每一 $x\in X$, $P_i(x)$ 是 X_i 的 FC- 子空间, 由(iii), 我们有对每一 $x\in X$,

$x_i \notin P_i(x) = \mathrm{FC}(P_i(x)) = \mathrm{FC}(P_i(x,y))$• 容易看出由定理3.1推得定理3.2的结论成立•

本文结果对广义矢量拟平衡组的进一步应用,我们将在后继文章(Ⅱ)中给出•

[参 考 文 献]

[1] Borglin A H. Keiding H. Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the "new" existence theorems[J]. J Math Econom, 1976, **3**(3): 313-316.

[2] Yannelis N C, Prabhakar N D. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces[J]. J Math Econom, 1983, **12**(2): 233-245.

[3] Tulcea C I. On the equilibriums of generalized games[R]. The Center for Math Studies in Economics and Management Science, Paper No. 696, 1986.

[4] Toussaint S. On the existence of equilibria in economies with infinite commodities and without ordered preferences[J]. J Econom Theory, 1984, **33**(1): 98-115.

[5] Tarafdar E. A fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy[J]. J Math Econom, 1991, **20**(2): 211-218.

[6] Tarafdar E. Fixed point theorems in H-spaces and equilibrium points of abstract economies[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1992, **53**(1): 252-260.

[7] DING Xie-ping, Tan K K. On equilibria of noncompact generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1993, **177**(1): 226-238.

[8] DING Xie-ping, Kim W K, Tan K K. Equilibria of generalized games with L-majorized correspondences[J]. Internat J Math Math Sci, 1994, **17**(4): 783-790.

[9] Tan K K, Zhang X L. Fixed point theorems on G-convex spaces and applications[J]. Proc Nonlinear Funct Anal Appl, 1996, **1**: 1-19.

[10] DING Xie-ping. Fixed points, minimax inequalities and equilibria of noncompact generalized games [J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25-55.

[11] DING Xie-ping. Maximal element principles on generalized convex spaces and their application[A]. In: R P Argawal, Ed. Set Valued Mappings With Applications in Nonlinear Analysis[C]. In: SIMMA, Vol. **4**, New York: Taylor & Francis, 2002, 149-174.

[12] 丁协平. 乘积 G-凸空间内的 G_B-优化映象的极大元及其应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(6): 583-594.

[13] 丁协平. 乘积 G-凸空间内的 G_B-优化映象的极大元及其应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 899-905.

[14] Deguire P, Tan K K, Yuan X Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S-majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(7): 933-951.

[15] Shen Z F. Maximal element theorems of H-majorized correspondence and existence of equilibrium for abstract economies[J]. J Math Anal Appl, 2001, **256**(1): 67-79.

[16] DING Xie-ping, Yuan G X-Z. The study of existence of equilibria for generalized games without lower semicontinuity in locally convex topological vector spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **227**(2): 420-438.

[17] DING Xie-ping, XIA Fu-quan. Equilibria of nonparacompact generalized games with L_{F_c}-majorized correspondence in G-convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2004, **56**(6): 831-849.

[18] DING Xie-ping, YAO Jen-chih, LIN Lai-Jiu. Solutions of system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally G-convex uniform spaces[J]. J Math Anal Appl, 2004, **298**(2): 398-410.

[19] DING Xie-ping, YAO Jen-chih. Maximal element theorems with applications to generalized games and systems of generalized vector quasi-equilibrium problems in G-convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2005, **126**(3): 571-588.

[20] DING Xie-ping. Maximal element theorems in product FC-spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29-42.

[21] 丁协平. 乘积 FC-空间内涉及一较好容许集值映象的优化映象的极大元及其应用[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(12): 1405-1418.

[22] DING Xie-ping. Maximal elements of G_{KKM}-majorized mappings in product FC-spaces and applications (Ⅰ)[J]. Nonlinear Anal, 2007, **67**(2): 3411-3423.

[23] DING Xie-ping. The generalized game and the system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-uniform spaces[J]. Nonlinear Anal, DOI: 10.1016/j.na.2006.12.003.

[24] Chebbi S, Florenzano M. Maximal elements and equilibria for condensing correspondences[J]. J Math Anal Appl, 1999, **38**(3): 995-1002.

[25] LIN Lai-jiu, Ansari Q H. Collective fixed points and maximal elements with applications to abstract economies[J]. J Math Anal Appl, 2004, **296**(2): 455-472.

[26] Ben-El-Mechaiekh H, Chebbi S, Flornzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, **222**(1): 138-150.

[27] Kim W K, Tan K K. New existence theorems of equilibria and applications[J]. Nonlinear Anal, 2001, **47**(1): 531-542.

[28] Kelley J L. General Topology[M]. New York: Springer-Verlag, 1955.

Maximal Elements and Generalized Games Involving Condensing Mappings in Locally FC-Uniform Spaces and Applications(Ⅰ)

DING Xie-ping

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: First, the notions of the measure of noncompactness and condensing set-valued mappings were introduced in locally FC-uniform spaces without convexity structure. A new existence theorem of maximal elements of a family of set-valued mappings involving condensing mappings was proved in locally FC-uniform spaces. As applications, some new equilibrium existence theorems of generalized game involving condensing mappings were established in locally FC-uniform spaces. These results improve and generalize some known results in literature to locally FC-uniform spaces. Some further applications of the results to the systems of generalized vector quasi-equilibrium problems will be given in a follow-up paper.

Key words: condensing set-valued mapping; maximal element; generalized game; equilibrium; locally FC-uniform spaces