

# 航天器太阳帆板展开过程最优控制的 自适应 Gauss 伪谱法\*

董雪仰<sup>1</sup>, 戈新生<sup>2</sup>

(1. 北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192;  
2. 北京信息科技大学 理学院, 北京 100192)

**摘要:** 研究了自适应 Gauss 伪谱法解决太阳帆板展开过程中航天器姿态最优控制的问题. 由于帆板展开过程在工程应用中存在控制受限、状态受限、航天器姿态初始和终端状态受限等约束条件, 航天器姿态控制问题可以看作是满足上述约束条件和边界条件, 同时实现性能指标函数最优的最优控制问题. 采用自适应 Gauss 伪谱法, 通过判断时间区间是否需要细分及时间区间上节点数量是否需要增加, 最大限度地提高计算效率, 得到满足精度要求的帆板展开最优控制问题的解. 最后对太阳帆板展开过程进行仿真, 获得较好的姿态运动优化轨线及控制规律, 论证了该方法在姿态控制问题中的有效性.

**关键词:** 太阳帆板展开; 非完整; 自适应; 伪谱法; 最优控制

**中图分类号:** V448.22      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.011

## 引 言

太阳帆板作为航天器能量来源装置, 通常状态折叠在运载工具内, 入轨后展开成工作状态. 由于进入轨道后的航天器位置和姿态不受控, 航天器主体与太阳帆板运动相互耦合导致航天器姿态发生变化<sup>[1]</sup>. 为使航天器主体在运动结束后达到目标姿态, 研究帆板伸展过程的控制规律变得尤为重要<sup>[2]</sup>. Fernandes 等对近似最优控制方法进行研究, 并利用该方法求解空间机械臂问题<sup>[3]</sup>. 孙凯和戈新生等<sup>[4]</sup>采用粒子群优化算法和遗传算法对帆板伸展过程的控制规律进行了研究.

基于全局插值的 Gauss 伪谱法(GPM)在理论上, 其 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件与一阶必要条件的离散形式相等, 这就保证了其解的准确性<sup>[5]</sup>. 全局插值 Gauss 伪谱法具有结构简单、解收敛半径大、收敛速度快、精度高的优点<sup>[6-8]</sup>. 但是当插值多项式的阶次较高时, 会导致 Jacobi (雅克比) 矩阵与 Hesse (海赛) 矩阵维数过高, 导致计算量激增, 甚至运算无法进行<sup>[9-10]</sup>.

自适应 Gauss 伪谱法 (hp-GPM) 是在 Gauss 伪谱法的基础上, 与自适应方法相结合, 针对误差不满足要求的时间区域, 通过增加时间片段或插值节点来提高精度, 而在精度满足要求的

\* 收稿日期: 2015-10-26; 修订日期: 2016-01-28

基金项目: 国家自然科学基金(11472058)

作者简介: 董雪仰(1989—), 男, 硕士生 (E-mail: dxueyang89@126.com);

戈新生(1957—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: gebim@vip.sina.com).

区域不做变动,这对提高计算效率有着显著的效果.本文将自适应 Gauss 伪谱法用于求解太阳帆板展开最优控制问题,以提高求解效率及最优解的稳健性.

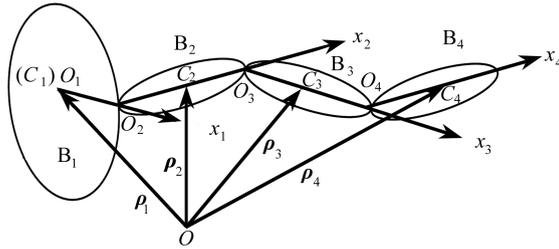


图 1 链式多体系统

Fig. 1 A chain multi-body system

## 1 太阳帆板系统模型

设带太阳帆板航天器是由航天器主体  $B_1$ 、连接板  $B_2$ 、内板  $B_3$ 、外板  $B_4$  这 4 个刚体通过 3 个圆柱铰  $O_j(j=2,3,4)$  构成的多刚体系统(见图 1).以系统总质心为原点  $O$ ,建立坐标系  $(O-XY)$ ,建立刚体  $B_i(i=1,2,3,4)$  连体坐标系  $(O_i-x_iy_i)$ .各刚体  $B_i$  的内铰链  $O_i$  至外铰链  $O_{i+1}$  的距离为  $l_i$ ,质心  $C_i$  至内铰链的距离为  $c_i(i=1,2,3,4)$ ,其中  $c_1=0$ .设系统中心惯量矩为  $J_1$ ,总质量为  $m$ ,组成航天器各刚体质量为  $m_i(i=1,2,3,4)$ .系统增广体较矢量为<sup>[4]</sup>

$$\hat{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}_{ij}], \mathbf{b}_{ij} = \begin{cases} -b_i \mathbf{e}_i & (i > j), \\ (c_i - b_i) \mathbf{e}_i & (i = j), \\ (l_i - b_i) \mathbf{e}_i & (i < j), \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$b_i = \frac{1}{m} \left( m_i c_i + l_i \sum_{k=i+1}^4 m_k \right) \quad (i=1,2,3,4). \quad (2)$$

设各分体质心  $C_i$  相对总质心  $O$  的矢径为  $\boldsymbol{\rho}_i(i=1,2,3,4)$ ,由式(1)得到

$$\boldsymbol{\rho}_i = c_i \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^{i-1} l_k \mathbf{e}_k - \sum_{k=1}^4 b_k \mathbf{e}_k \quad (i=1,2,3,4). \quad (3)$$

在外力矩为零的情况下,航天器系统相对总质心  $O$  的动量矩守恒<sup>[1]</sup>.设系统的起始动量矩  $H_0=0$ ,有

$$\sum_{i=1}^4 (J_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = 0. \quad (4)$$

考虑  $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{i=1}^j \boldsymbol{\rho}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ ,由式(3)、(4)可以导出

$$I_z \dot{\phi}_1 + [-(I_{2z} + I_{3z} + I_{4z})] \dot{\theta}_1 + (I_{3z} + I_{4z}) \dot{\theta}_2 - I_{4z} \dot{\theta}_3 = 0, \quad (5)$$

$\phi_1$  为与航天器主体  $B_1$  固结的  $x_1$  轴相对惯性坐标轴  $X$  的转角, $\theta_j(j=1,2,3)$  为太阳帆板各分体的相对转角, $I_z$  为系统的总等效转动惯量矩:

$$I_z = \sum_{j=1}^4 I_{jz} = \sum_{j=1}^4 \left( J_j + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 m_i b_{jk} b_{ik} \cos \theta_j \right), \quad (6)$$

$I_{jz}$  为太阳帆板分体  $B_j$  相对总质心  $O$  的等效转动惯量矩.式(5)对太阳帆板在展开过程的非完整约束进行了描述,表明展开过程中帆板运动对主体姿态产生扰动.

选取系统位形坐标为状态变量,即  $\mathbf{q} = (\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ , 相对角速度  $\dot{\theta}_i (i = 1, 2, 3)$  为输入变量,即  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)^T$ , 建立系统状态方程:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = (\mathbf{I}_{2z} + \mathbf{I}_{3z} + \mathbf{I}_{4z})/\mathbf{I}_z, \quad B_2 = -(\mathbf{I}_{3z} + \mathbf{I}_{4z})/\mathbf{I}_z, \quad B_3 = \mathbf{I}_{4z}/\mathbf{I}_z.$$

## 2 太阳帆板姿态控制问题描述

非线性最优控制问题是指性能指标、状态方程或约束条件中存在非线性函数项的最优控制问题,由于非线性项的存在,使得最优控制难以获得解析解.本文对帆板展开过程中姿态最优控制问题进行研究,取太阳帆板关节处消耗能量为指标,建立性能指标函数:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \langle \mathbf{u}^T \mathbf{u} \rangle dt, \quad (8)$$

式中  $t_0$  和  $t_f$  分别为初始时刻和末端时刻.帆板展开姿态控制问题可描述为问题 A

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} \langle \mathbf{u}^T \mathbf{u} \rangle dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \\ \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f, \\ |u_i| \leq u_M, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{q}_0 = (\phi_{10}, \theta_{10}, \theta_{20}, \theta_{30})^T$  为系统在  $t = 0$  时刻状态,  $\mathbf{q}_f = (\phi_{1f}, \theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f})^T$  为系统在  $t = t_f$  时刻状态,  $u_M$  为控制力矩上限.

Gauss 伪谱法求解需要将时间区间限制在  $[-1, 1]$  上,而上述最优控制问题的时间区间是  $[t_0, t_f]$ ,引入归一化时间  $\lambda \in [-1, 1]$ ,  $\lambda_0$  和  $\lambda_f$  分别等于  $-1$  和  $1$ :

$$t = \frac{t_f + t_0}{2} + \frac{t_f - t_0}{2} \lambda. \quad (10)$$

应用式(7)对状态变量  $\mathbf{q}$  和控制变量  $\mathbf{u}$  进行时间归一化,得到状态变量和控制变量在  $\lambda \in [-1, 1]$  上的映射分别为  $\mathbf{Q}(\lambda)$  和  $\mathbf{U}(\lambda)$ .式(9)的最优控制问题可描述为问题 B

$$J = \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} ((U_1(\lambda))^2 + (U_2(\lambda))^2 + (U_3(\lambda))^2) d\lambda$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{Q} = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{B}(\mathbf{Q}(\lambda)) \mathbf{U}(\lambda), \\ \mathbf{Q}(\lambda_0) = \mathbf{Q}_0 = (\varphi_{10}, \theta_{10}, \theta_{20}, \theta_{30})^T, \\ \mathbf{Q}(\lambda_f) = \mathbf{Q}_f = (\varphi_{1f}, \theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f})^T, \\ |U_i| \leq u_M, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (11)$$

### 3 自适应 Gauss 伪谱法

#### 3.1 全局近似 Gauss 伪谱法

Gauss 伪谱法是伪谱法的一种形式,文献针对航天器太阳帆板系统给出状态变量和控制变量,采用 Gauss 点进行离散,并在离散点上构造 Lagrange(拉格朗日)插值多项式对状态变量和控制变量进行逼近<sup>[11-12]</sup>.系统积分项采用 Gauss 积分求解,从而将帆板展开的非完整系统规划问题转化为参数优化问题,实现了航天器太阳帆板的运动规划,并求出最优控制输入。

伪谱法是通过选取离散点将状态变量和控制变量进行离散,优化求得离散点的最优值。Gauss 伪谱法的离散点包含边界为  $N$  个 Legendre-Gauss(LG)点和  $\lambda_0 = -1$  共  $N+1$  个点。对状态变量  $\mathbf{q}(\lambda)$ ,取  $N$  个 LG 点和  $\lambda_0 = -1$  点作为离散点,构成  $N+1$  个 Lagrange 插值多项式  $L_k(\lambda)$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ )<sup>[13-14]</sup>,并以此为基函数近似状态变量。

对状态变量进行逼近,使近似状态变量在离散点上与实际状态变量相等,即  $\mathbf{q}(\lambda) \approx \mathbf{Q}(\lambda)$ ,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\lambda) \approx \mathbf{Q}(\lambda) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{Q}(\lambda_k) L_k(\lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^N (\varphi_1(\lambda_k), \theta_1(\lambda_k), \theta_2(\lambda_k), \theta_3(\lambda_k))^T L_k(\lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

离散点仅选用 LG 点,构成  $N$  个 Lagrange 插值多项式  $\tilde{L}_k(\lambda)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ),以此为基函数,对控制变量近似,得到

$$\mathbf{u}(\lambda) \approx \mathbf{U}(\lambda) = \sum_{k=0}^N \mathbf{U}(\lambda_k) \tilde{L}_k(\lambda) = \sum_{k=0}^N (U_1(\lambda_k), U_2(\lambda_k), U_3(\lambda_k))^T \tilde{L}_k(\lambda). \quad (13)$$

对式(12)求导,得到系统状态变量导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{Q}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_k} &\approx \sum_{i=0}^N \mathbf{Q}(\lambda_k) \left. \frac{dL_i(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_k} = \\ &= \sum_{i=0}^N D_{ki} \mathbf{Q}(\lambda_k) = \sum_{i=0}^N D_{ki} (\varphi(\lambda_k), \theta_1(\lambda_k), \theta_2(\lambda_k), \theta_3(\lambda_k))^T, \end{aligned} \quad (14)$$

式中微分矩阵  $\mathbf{D} \in R^{N \times (N+1)}$  由式(15)确定:

$$\mathbf{D} = [D_{ki}] = \sum_{i=0}^N \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^N (\lambda_k - \lambda_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (\lambda_i - \lambda_j)}, \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{D} \in R^{N \times (N+1)}$  为  $N \times (N+1)$  二维矩阵;  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ .由式(11)、(14)、(15)可得

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} \mathbf{Q}(\lambda_i) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{B}(\mathbf{Q}(\lambda_k)) \mathbf{U}(\lambda_k). \quad (16)$$

由于最优控制问题存在终端状态约束,因此需要对系统终端状态进行计算,终端状态为

$$\mathbf{Q}(\lambda_f) = \mathbf{Q}(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} \mathbf{B}(\mathbf{Q}(\lambda)) \mathbf{U}(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

对终端约束条件进行离散并采用 Gauss 积分近似,可得

$$\mathbf{Q}(\lambda_f) = \mathbf{Q}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum w_k \mathbf{B}(\mathbf{Q}(\lambda_k)) \mathbf{U}(\lambda_k), \quad (18)$$

式中,  $w_k$  为 Gauss 积分权重<sup>[15]</sup>,其值为

$$w_k = \frac{2}{(1 - \lambda_k^2)} \left[ \frac{dL_{N+1}(\lambda_k)}{d\lambda} \right]^{-2}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (19)$$

对性能指标函数进行离散并采用 Gauss 积分近似,得到

$$\mathbf{J}(\lambda_k) = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N (w_k \cdot (U_1^2(\lambda_k) + U_2^2(\lambda_k) + U_3^2(\lambda_k))). \quad (20)$$

将式(11)中的路径约束在节点处离散,得到

$$|U_i(\lambda_k)| \leq u_M, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

式(11)中的最优控制问题可描述为

问题 B<sup>N</sup>

$$\min \mathbf{J}(\lambda_k)$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N D_{ki} \varphi(\lambda_i) = \frac{t_f - t_0}{2} (B_1(\lambda_k) U_1(\lambda_k) + B_2(\lambda_k) U_2(\lambda_k) + B_3(\lambda_k) U_3(\lambda_k)), \\ \sum_{i=0}^N D_{ki} \theta_1(\lambda_i) = \frac{t_f - t_0}{2} U_1(\lambda_k), \\ \sum_{i=0}^N D_{ki} \theta_2(\lambda_i) = \frac{t_f - t_0}{2} U_2(\lambda_k), \\ \sum_{i=0}^N D_{ki} \theta_3(\lambda_i) = \frac{t_f - t_0}{2} U_3(\lambda_k), \\ \varphi_1(\lambda_0) = \varphi_{10}, \\ \theta_1(\lambda_0) = \theta_{10}, \\ \theta_2(\lambda_0) = \theta_{20}, \\ \theta_3(\lambda_0) = \theta_{30}, \\ \varphi_{1f} = \varphi_{10} + \frac{t_f - t_0}{2} w_k (B_1(\lambda_k) U_1(\lambda_k) + B_2(\lambda_k) U_2(\lambda_k) + B_3(\lambda_k) U_3(\lambda_k)), \\ \theta_{1f} = \theta_{10} + \frac{t_f - t_0}{2} w_k U_1(\lambda_k), \\ \theta_{2f} = \theta_{20} + \frac{t_f - t_0}{2} w_k U_2(\lambda_k), \\ \theta_{3f} = \theta_{30} + \frac{t_f - t_0}{2} w_k U_3(\lambda_k), \\ |U_i(\lambda_k)| \leq u_M, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (22)$$

### 3.2 自适应 Gauss 伪谱法

在上一小节提到的 Gauss 伪谱法中,时间节点的数量对计算精度有着很大的影响.为达到高近似精度的目的必须要增加时间节点,这将造成计算量激增、甚至无法计算的问题.自适应 Gauss 伪谱法结合 Gauss 伪谱法和自适应方法,在近似精度低于要求精度的区域通过增加区间或者节点来提高近似精度,其他区域则不作变动.自适应 Gauss 伪谱法可以最大限度地提高计算效率<sup>[16-17]</sup>.

采用自适应 Gauss 伪谱法将太阳帆板展开过程分为  $M$  个区间,定义第  $s$  个区间的节点数量为  $N_s$ ,共计  $N$  个节点,则

$$N = \sum_{s=1}^M N_s. \quad (23)$$

自适应伪谱法中区间是否细分或者节点数目是否增加的判断标准是由两个节点的中点对动力学约束的满足程度来决定,设  $\bar{\lambda}_s^k$  为第  $s$  时间区间上的第  $k$  个节点中点,则有

$$\bar{\lambda}_s^k = \frac{\lambda_s^k + \lambda_s^{k+1}}{2}. \quad (24)$$

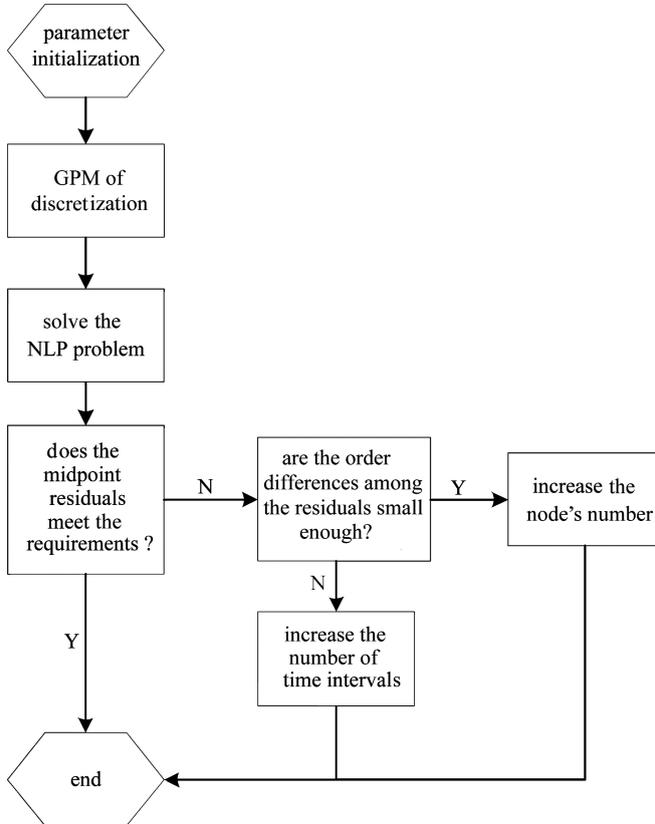


图2 自适应 Gauss 伪谱法迭代流程

Fig. 2 The iterative process of the hp-GPM

定义  $\bar{Q} \in R^{(N_s-1) \times n}$ ,  $\bar{U} \in R^{(N_s-1) \times m}$  分别为第  $s$  个区间上  $\bar{\lambda}_s^k$  处状态变量矩阵和控制变量矩阵,其中  $n$  为状态变量个数, $m$  为控制变量个数. $\bar{D} \in R^{(N_s-1) \times (N_s-1)}$  为  $\bar{\lambda}_s^k (s = 1, 2, \dots, M)$  处的微分矩阵.定义系统中点残差矩阵为

$$R = \left| \bar{D}\bar{Q}(\lambda_k) - \frac{t_s - t_{s-1}}{2} B(\bar{Q}(\lambda_k)) \bar{U}(\lambda_k) \right|. \quad (25)$$

取  $R$  中每一行的最大值构成向量  $r_s$  :

$$r_s = [r_s^1, \dots, r_s^1]^T. \quad (26)$$

取向量  $r_s$  的平均值为第  $s$  个区间上中点残差  $\beta_s$ , 中点残差向量  $\beta$  为

$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_s]^T. \quad (27)$$

第  $s$  个时间区间最大残差为  $e_{\max}^k$ , 则

$$e_{\max}^k = \max[\beta]. \quad (28)$$

定义  $\varepsilon$  为系统最大容许偏差, 若  $e_{\max}^k \leq \varepsilon$ , 系统状态变量和控制变量在第  $s$  个时间区间内的节点处计算精度满足要求, 停止该区间迭代计算; 否则, 需要采用增加节点或区间的方法来提高近似精度. 如果  $\beta$  中各元素量级相差较小, 可以通过增加插值节点的方法来提高精度; 如果  $\beta$  中某些元素的量级明显大于其他元素, 则需要采用细分时间区间的方法来提高精度. 自适应 Gauss 伪谱法迭代流程如图 2 所示.

### 4 仿真算例结论

设系统参数:  $m_1 = 200 \text{ kg}$ ,  $J_1 = 32.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $l_1 = 0.5 \text{ m}$ ; 太阳帆板连接板  $m_2 = 5 \text{ kg}$ ,  $(l/2) \times l = 0.5 \text{ m}^2$ ; 内板与外板  $m_3 = m_4 = 10 \text{ kg}$ ,  $l \times l = 1 \text{ m}^2$ . 取初始区间数量  $s = 4$ , 初始节点数量  $N_s (s = 1, 2, 3, 4) = 6$ , 最大容许控制输入为  $u_M = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 最大容许偏差  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**情况 1** 帆板展开过程中, 航天器主体姿态保持初始姿态和终端姿态不变. 系统初始和终端位形分别为:  $q(t_0) = [0, 0, 0, 0]^T$ ,  $q(t_f) = [0, \pi/2, \pi, \pi]^T$ .

采用本文方法求解该姿态控制最优问题, 仿真时间为 5 s, 目标函数最优值为 3.541 3, 最大控制输入为

$$u_{1\max} = 0.146 8 \text{ N}\cdot\text{m}, u_{2\max} = 0.150 0 \text{ N}\cdot\text{m}, u_{3\max} = 0.220 5 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

太阳帆板展开姿态轨迹仿真结果如图 3 所示, 图中插值节点以“+”表示. 由图可知, 航天器主体在整个仿真过程中转动幅度较小, 曲线光滑, 保证了在帆板展开过程中航天器整体的平稳性; 连接板、内板及外板都能够通过光滑的轨线准确达到目标位形. 图 4 为控制输入规律, 仿真结果显示控制输入变化幅度较小, 展开过程较平稳; 且控制输入能够保证在初始时刻和终端时刻均为 0, 与工程应用实际情况相符.

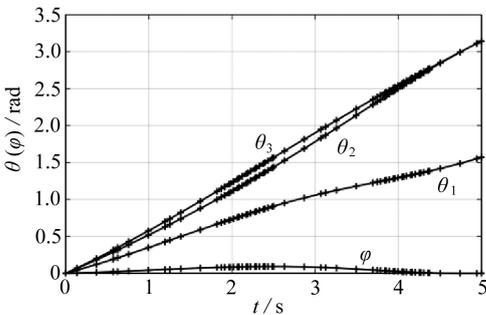


图 3 主体不变系统姿态运动优化轨线

Fig. 3 The attitude motion trajectory optimization in an invariant position

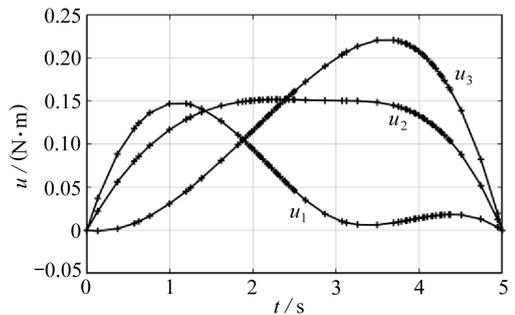


图 4 主体不变系统最优控制输入规律

Fig. 4 The optimal control input rules in an invariant position

**情况 2** 在帆板展开过程中,航天器主体姿态由初始位形 0 到终端位形  $\pi/4$ ,系统初始位形和终端位形分别为:  $\mathbf{q}(t_0) = [0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{q}(t_f) = [\pi/6, \pi/2, \pi, \pi]^T$ .

利用本文方法求解该姿态控制最优问题,仿真时间为 5 s,目标函数最优值为 5.685 7,最大控制输入为

$$u_{1\max} = 0.120\ 7\ \text{N}\cdot\text{m},\ u_{2\max} = 0.151\ 5\ \text{N}\cdot\text{m},\ u_{3\max} = 0.154\ 5\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

仿真结果如图 5、6 所示,图中插值节点以“+”表示,其中图 5 为航天器主体位形在初始时刻和终端时刻不同的情况下,航天器各部分从  $t_0$  时刻到  $t_f$  时刻姿态运动的优化轨线.仿真结果表明,航天器主体及帆板从初始位置至终端位置过程中,能够准确到达目标位形;帆板展开过程近似一条直线,更好地保证了系统展开过程的平稳性.图 6 为航天器主体改变情况下各关节最优控制输入规律,控制输入变化幅度小,且变化过程平缓,易于工程实现.

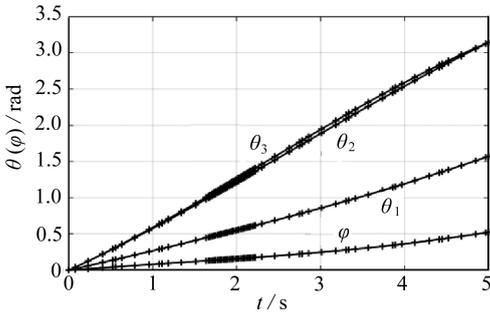


图 5 主体改变时姿态运动优化轨线

Fig. 5 The attitude motion trajectory optimization in a variant position

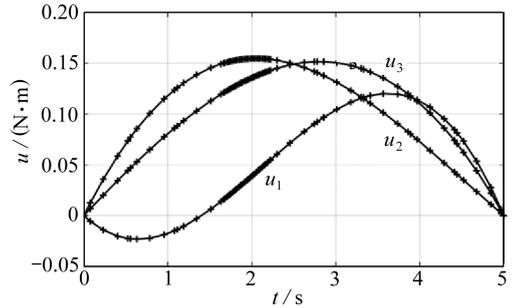


图 6 主体改变时最优控制输入规律

Fig. 6 The optimal control input rules in a variant position

由图中插值节点规律可以看出,在自适应 Gauss 伪谱法中插值节点分布不均匀,节点数量明显多于初始设定节点数量,且与 Gauss 伪谱法插值节点(LG 节点)两端位置节点较多中间位置节点较少的规律有明显差异.自适应 Gauss 伪谱法插值节点的选取结合 LG 节点规律与自适应原理,针对系统中误差较大位置进行判断后增加插值节点,这有助于降低系统误差,提高计算精度,快速、准确地得到满足约束的最优控制规律.

## 5 结 论

航天器太阳帆板伸展过程姿态控制是非线性控制问题,本文采用 Gauss 伪谱方法与自适应方法相结合的自适应 Gauss 伪谱法,将姿态控制问题转化为求解满足一定性能指标和约束条件的最优控制问题,通过残差量级来判断是否需要细分时间区间或者增加节点数量来提高计算精度.相对于 Gauss 伪谱法,该方法可以在较低的运算代价下取得较高的计算精度.这为姿态控制问题的求解提供了一种可靠的方法.

## 参考文献 (References):

- [1] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995. (LIU Yan-zhu. *Attitude Dynamics of Spacecraft*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995. (in Chinese))
- [2] 陈立群, 刘延柱. 磁性刚体航天器的混沌姿态运动[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 385-390. (CHEN LI-qun, LIU Yan-zhu. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(4): 385-390. (in Chinese))
- [3] Fernandes C, Gurvits L, Li Z X. Attitude control of a space platform/manipulator system u-

- sing internal motion[C]//8th IEEE International Conference on Robotics and Automation The Inter Journal of Robotics Research. Nice, France, 1992; 893-898.
- [4] 孙凯, 戈新生. 航天器太阳帆板伸展过程最优控制的粒子群优化算法[J]. 工程力学, 2007, **24**(9): 188-192.(SUN Kai, GE Xin-sheng. Optimal control of stretching process of solar array on spacecraft using particle swarm optimization algorithm[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(9): 188-192.(in Chinese))
- [5] YANG Liang, ZHOU Hao, CHEN Wan-chun. Application of linear Gauss pseudospectral method in model predictive control[J]. *Acta Astronautica*, 2014, **96**: 175-187.
- [6] Benson D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts; Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [7] Huntington G T. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems[D]. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts; Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [8] Benson D A, Huntington G T, Rao A V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, **29**(6): 1435-1440.
- [9] 李棋. 基于密度函数的飞行器自适应伪谱轨迹优化方法研究[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.(LI Qi. Research on adaptive pseudospectral trajectory optimization method based on density function[D]. PhD Thesis. Harbin; Harbin Institute of Technology, 2013.(in Chinese))
- [10] 洪蓓, 辛万青. hp 自适应伪谱法在滑翔弹道快速优化中的应用[J]. 计算机测量与控制, 2012, **20**(5): 1283-1286.(HONG Bei, XIN Wan-qing. Application of hp-adaptive pseudospectral method in rapid gliding trajectory optimization[J]. *Computer Measurement & Control*, 2012, **20**(5): 1283-1286.(in Chinese))
- [11] 李树荣, 韩振宇, 于金光. 基于高斯伪谱的最优控制求解及其应用[J]. 系统科学与数学, 2010, **30**(8): 1031-1043.(LI Shu-rong, HAN Zhen-yu, YU Jin-guang. Numerical algorithm of optimal control based on a Gauss pseudospectral method and its application[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2010, **30**(8): 1031-1043.(in Chinese))
- [12] 唐国金, 罗亚中, 雍恩米. 航天器轨迹优化理论、方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012.(TANG Guo-jin, LUO Ya-zhong, YONG En-mi. *Spacecraft Trajectory Optimization Theory, Method and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2012.(in Chinese))
- [13] Davis P J. *Interpolation and Approximation*[M]. Mineola, New York; Dover Publications Inc, 1975.
- [14] Geoffrey T H. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems[D]. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts; Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [15] 郭铁丁. 深空探测小推力轨迹优化的间接法与伪谱法研究[D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2012.(GUO Tie-ding. Study of indirect method and pseudospectral methods for low thrust trajectory optimization in deep space exploration[D]. PhD Thesis. Beijing: Tsinghua University, 2012.(in Chinese))
- [16] 韩威华, 杨新, 姜萌哲. 基于 hp 自适应伪谱法的  $N$  脉冲轨道优化设计[J]. 系统工程与电子技术, 2013, **35**(12): 2566-2571.(HAN Wei-hua, YANG Xin, JIANG Meng-zhe. Optimal design of  $N$ -impulse trajectories based on hp-adaptive pseudospectral method[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2013, **35**(12): 2566-2571.(in Chinese))

- [17] 易文双. 动力滑翔高超飞行器轨迹设计与射程优化[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012. (YI Wen-shuang. Trajectory design and range optimization of gliding hypersonic vehicle with powered[D]. PhD Thesis. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012. (in Chinese))

## The Adaptive Gauss Pseudospectral Method for the Optimal Control of Spacecraft Solar Array Deployment

DONG Xue-yang<sup>1</sup>, GE Xin-sheng<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China;

2. School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China)

**Abstract:** The adaptive Gauss pseudospectral method (GMP) for the optimal control of spacecraft solar array deployment was formulated. In a practical solar array deploying process, under the constraint conditions of limited control, limited states and limited initial and final attitudes, etc., the spacecraft attitude control problem was treated as an optimal control problem where the above constraints and boundary conditions shall be met and the optimal performance index function be realized at the same time. With the adaptive GMP, the solution to the solar array deployment control problem was obtained with satisfactory accuracy and highly promoted efficiency, through the judgement on the needs of time interval subdivision and time node number increase. Finally, the solar array deploying process was numerically simulated and the optimal attitude motion trajectory as well as the control rule was acquired. The results demonstrate the effectiveness of this method in the attitude control problems.

**Key words:** solar array deployment; nonholonomic; adaptive; pseudospectral method; optimal control

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11472058)

---

引用本文/Cite this paper:

董雪仰, 戈新生. 航天器太阳帆板展开过程最优控制的自适应 Gauss 伪谱法[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 655-664.

DONG Xue-yang, GE Xin-sheng. The adaptive Gauss pseudospectral method for the optimal control of spacecraft solar array deployment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 655-664.