

# 随机窄带噪声作用下非线性碰撞 振动系统的稳态响应研究\*

黄冬梅, 徐伟

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

(本刊编委谢公南推荐)

**摘要:** 研究了随机参激作用下一个非线性碰撞振动系统的随机响应.基于 Krylov-Bogoliubov 平均法,借助第一类改进的 Bessel 函数,得到了决定平凡解的几乎确定稳定性的最大 Lyapunov 指数.模拟结果发现,碰撞振动系统的最大 Lyapunov 指数特性不同于一般的非碰撞系统,其最小值为负.同时,在确定性情形下,得到了骨架曲线方程和不稳定区域的临界方程.进一步,利用矩方法,讨论了系统的一阶和二阶非平凡稳态矩,发现了碰撞振动系统中有频率岛现象的存在.最后,借助 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程,利用有限差分法,讨论了碰撞振动系统中存在的随机跳现象.在随机强度较小时,稳态概率密度集中于响应振幅的非平凡分支;但是随着随机强度的增加,平凡稳态解的概率会变大.

**关键词:** 碰撞振动系统; 非光滑变化; 稳态解; 随机跳; 窄带随机噪声

**中图分类号:** O324 **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.009

## 引言

碰撞振动系统作为一类典型的非光滑系统,广泛存在于实际生活中,例如:啄木鸟玩具、碰撞减震器、有接触的微电子机械系统、汽车的刹车系统等<sup>[1-3]</sup>.由于碰撞振动系统的物理过程是不连续的和强非线性的,因此碰撞振动系统中存在复杂和丰富的动力学特性,如擦边分岔<sup>[4]</sup>、颤振和粘滞运动<sup>[5-6]</sup>、环面分岔<sup>[7]</sup>等.

对于随机碰撞振动系统动力学行为的研究,近几年来取得了一系列的成果<sup>[8-14]</sup>.特别地,文献[8]综述了求解碰撞振动系统的解析方法和已经取得的一些成果.文献[9]发展了一种平均法,用来研究具有随机扰动的碰撞振动系统的动力学行为.文献[10]研究了 Duffing 系统在加性二值噪声作用下的随机分岔现象.文献[11]考虑了 Gauss(高斯)白噪声激励下,具有单边约束的非线性随机碰撞振动系统的平稳响应.在文献[12]中,考虑了随机混沌周期激励下 Duffing 碰撞振子的次谐响应.文献[14]首次讨论了窄带噪声激励下一个非线性碰撞振动系统的多值响应特性,发现了碰撞振动系统新颖的动力学特性.

对于光滑系统在参激激励下的 Lyapunov 指数研究,已经有很成熟的理论.文献[15]研究

\* 收稿日期: 2016-01-04; 修订日期: 2016-02-21

基金项目: 国家自然科学基金(11472212;11532011)

作者简介: 黄冬梅(1988—),女,博士生(通讯作者). E-mail: dongmeihuang1@hotmail.com.

了随机 Mathieu 系统的不变测度和最大 Lyapunov 指数;文献[16]讨论了细长悬臂梁在轴向窄带噪声参激作用下的主共振响应.借助多尺度方法,文献[17]研究了谐和有界噪声联合作用下,粘弹系统的动力学响应.对于碰撞振动系统,因为非光滑因素的存在,研究随机参激作用下系统的最大 Lyapunov 指数是非常困难的.基于此,本文首先讨论了平凡稳态解的几乎确定稳定性,给出了最大 Lyapunov 指数的解析表达式,随后讨论了非平凡解的稳态矩及其稳定性,最后对随机跳现象以及分岔问题进行了分析.

## 1 系统描述

不失一般性,考虑随机参激激励下的非线性碰撞振动系统,如图 1 所示.其微分方程如下所示:

$$M\ddot{X}(\tau) + (U_1X^4(\tau) - U_2X^2(\tau) + \alpha_0)\dot{X}(\tau) + K[1 + \xi_0(\tau)]X(\tau) + B_0X^3(\tau) = 0, \quad X > 0, \quad (1a)$$

$$\dot{X}_+ = -r\dot{X}_-, \quad X = 0, \quad (1b)$$

其中,  $X$  是系统位移,点代表对时间  $\tau$  求导. $M$  代表运动物块的质量,参数  $U_1, U_2$  和  $\alpha_0$  是阻尼系数. $K$  是线性刚度系数, $B_0$  是非线性刚度系数. $\xi_0(\tau)$  是一个遍历随机过程. $r$  是碰撞恢复参数,一般假定为  $0 < r \leq 1$ .当  $0 < r < 1$  时,从方程(1b)可知,碰撞会导致系统的能量损失;特别地,  $r = 1$  时认为碰撞过程中没有能量损失. $\dot{X}_-$  和  $\dot{X}_+$  分别是发生碰撞前和碰撞后系统的速度.

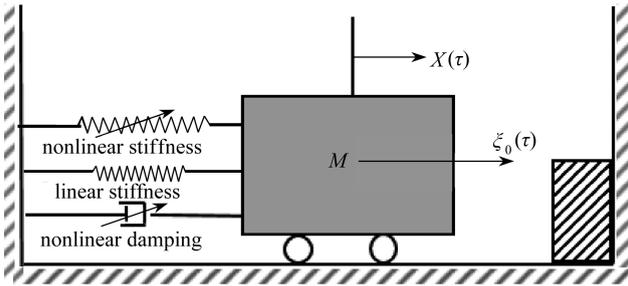


图 1 碰撞振动系统的结构图

Fig. 1 The schematic of the vibro-impact system with a rigid barrier

引入无量纲参数:

$$t = \omega\tau, \quad \omega_0^2 = K/(M\omega^2), \quad \mu_1 = U_1/(M\omega^2), \quad \mu_2 = U_2/(M\omega^2), \\ \alpha = \alpha_0/(M\omega^2), \quad \beta = B_0/(M\omega^2).$$

可以得到下列无量纲方程:

$$\ddot{x}(t) + (\mu_1x^4(t) - \mu_2x^2(t) + \alpha)\dot{x}(t) + \omega_0^2[1 + \xi(t)]x(t) + \beta x^3(t) = 0, \quad x > 0, \quad (2a)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0, \quad (2b)$$

其中  $x$  是无量纲位移,点代表对时间  $t$  的导数.参数  $\mu_1, \mu_2$  和  $\alpha$  是正的,  $\beta$  是非线性刚度系数,  $\xi(t)$  是一个遍历随机过程,  $\dot{x}_-$  和  $\dot{x}_+$  是发生碰撞前和碰撞后系统的无量纲速度.

在方程(2a)中,  $\xi(t)$  是一个具有零均值的遍历随机过程<sup>[18]</sup>:

$$\xi(t) = h\cos(\Omega t + \gamma W(t)), \quad (3)$$

其中  $h$  是随机参激的确定性振幅,满足  $h > 0$ . $\Omega$  是中心频率,  $W(t)$  是标准 Wiener(维纳)过程且  $\gamma \geq 0$  是随机激励强度.对于  $\gamma$  较小情形,  $\xi(t)$  是窄带随机过程,本文仅考虑  $\gamma$  较小情形.

引入 Zhuravlev 非光滑变量代换, 参见文献[19]:

$$x = |y|, \dot{x} = \dot{y} \operatorname{sgn} y, \tag{4}$$

其中 
$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ -1, & y < 0. \end{cases}$$

显然地, 在约束面处原变量  $x$  的速度跃变为  $\Delta \dot{x} = (-r - 1)\dot{x}_-$ , 变换后新变量  $y$  的速度跃变为  $\Delta \dot{y} = (r - 1)\dot{y}_-$ . 因为  $y(t_* \pm 0) = y(t_*) = 0$  且  $\dot{y}_\pm = \dot{y}(t_* \pm 0)$ , 通过引入 Dirac(狄拉克)函数  $\delta(y(t_*)) = \delta(t - t_*) / |\dot{y}|$ , 并且结合  $\dot{y}(t)\delta(t - t_*) = \dot{y}(t_*)\delta(t - t_*)$ , 可以得到脉冲阻尼项:

$$(\dot{y}_- - \dot{y}_+)\delta(t - t_*) = (1 - r)\dot{y}|\dot{y}|\delta(y). \tag{5}$$

根据方程(5), 可以得到下列转化后没有碰撞的系统:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -(\mu_1 |y|^4 - \mu_2 |y|^2 + \alpha)\dot{y} - \beta |y|^3 \operatorname{sgn} y - \omega_0^2 h \cos(\Omega t + \gamma W(t)) |y| \operatorname{sgn} y - (1 - r)\dot{y}|\dot{y}|\delta(y). \tag{6}$$

## 2 稳态解及其稳定性分析

假设参数  $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, h$  和  $1 - r$  都与一个小参数成比例, 引入调谐参数  $\eta$ , 且定义  $\eta = \omega_0 - \Omega/2$ , 此外假设  $\eta$  也是一个小参数. 为了使用 Krylov-Bogoliubov 平均方法, 引入下列变换:

$$\begin{cases} y(t) = a(t) \sin \Phi(t), \dot{y}(t) = \omega_0 a(t) \cos \Phi(t), \\ \Phi(t) = \frac{1}{2} \Omega t + \varphi(t), \psi(t) = \gamma W(t), \end{cases} \tag{7}$$

其中  $\varphi(t)$  是一个慢变相位, 因此方程(2)可以转变为如下的一阶方程:

$$\begin{aligned} a' = & -\mu_1 \cos^2 \Phi |a \sin \Phi|^4 a + \mu_2 \cos^2 \Phi |a \sin \Phi|^2 a - \alpha (\cos^2 \Phi) a - \\ & \frac{\beta \cos \Phi |a \sin \Phi|^3 \operatorname{sgn}(\sin \Phi)}{\Omega} - (1 - r) \omega_0 \cos^2 \Phi |a \cos \Phi| \delta(a \sin \Phi) a - \\ & \omega_0 h \cos(2\Phi - 2\varphi + \psi) |a \sin \Phi| \operatorname{sgn}(\sin \Phi), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \varphi' = & \eta + \mu_1 |a \sin \Phi|^4 \sin \Phi \cos \Phi - \mu_2 |a \sin \Phi|^2 \sin \Phi \cos \Phi + \alpha \sin \Phi \cos \Phi + \\ & \frac{\beta |a \sin \Phi|^3 \operatorname{sgn}(\sin \Phi) \sin \Phi}{\Omega a} + (1 - r) \omega_0 \cos \Phi \sin \Phi |a \cos \Phi| \delta(a \sin \Phi) a - \\ & \frac{\omega_0 h \cos(2\Phi - 2\varphi + \psi) |a \sin \Phi| \operatorname{sgn}(\sin \Phi) \sin \Phi}{a}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中  $a' = da/dt, \varphi' = d\varphi/dt$ .

在小参数的假设条件下, 方程(8)和(9)的右边与小参数成比例,  $a'$  和  $\varphi'$  都是小变量,  $a$  和  $\varphi$  是关于时间  $t$  的慢变随机过程,  $\Phi$  是一个快变随机过程, 对快变量  $\Phi$  取平均可得

$$\begin{cases} a' = -\frac{\alpha}{2} a + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} a + \frac{\mu_2}{8} a^3 - \frac{\mu_1}{16} a^5 - \frac{\omega_0 h}{4} \sin(2\varphi - \psi) a, \\ \varphi' = \eta - \frac{\omega_0 h}{4} \cos(2\varphi - \psi) + \frac{3\beta}{8\omega_0} a^2. \end{cases} \tag{10}$$

记  $\Theta(t) = 2\varphi(t) - \psi(t)$ , 则方程(10)可以转变为下列 Itô 微分方程:

$$\begin{cases} da = \left( -\frac{\alpha}{2}a + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi}a + \frac{\mu_2}{8}a^3 - \frac{\mu_1}{16}a^5 - \frac{\omega_0 h}{4}a \sin \Theta \right) dt, \\ d\Theta = \left( 2\eta - \frac{\omega_0 h}{2} \cos \Theta + \frac{3\beta}{4\omega_0} a^2 \right) dt - \gamma dW. \end{cases} \quad (11)$$

## 2.1 平凡解及其稳定性

为了讨论平凡解及其稳定性,引入变量  $\rho = \ln(A)$  和  $\phi = \Theta + \pi/2$ , 忽略非线性项且根据 Itô 公式,方程(11)可转化为下列 Itô 随机微分方程:

$$\begin{cases} d\rho = \left( -\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} + \frac{\omega_0 h}{4} \cos \phi \right) dt, \\ d\phi = \left( 2\eta - \frac{\omega_0 h}{2} \sin \phi \right) dt - \gamma dW. \end{cases} \quad (12)$$

根据方程(12),可以知道  $\phi(t)$  的稳态概率密度  $p(\phi)$  满足下列 Fokker-Plank-Kolmogorov 方程:

$$\frac{d^2 p}{d\phi^2} - \frac{d}{d\phi} [(\bar{\eta} - \bar{h} \cos \phi)p] = 0, \quad (13)$$

其中  $\bar{\eta} = 4\eta/\gamma^2$ ,  $\bar{h} = \omega_0 h/\gamma^2$ . 并使用周期化和正交化条件<sup>[15]</sup>, 可以得到方程(13)的解为

$$p(\phi) = \frac{\exp[\bar{\eta}(\phi + \pi) + \bar{h} \cos \phi]}{4\pi^2 I_{i\bar{\eta}}(\bar{h}) I_{-i\bar{\eta}}(\bar{h})} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \exp(-\bar{\eta}x - \bar{h} \sin x) dx, \quad (14)$$

其中  $I_n(x)$  是第一类改进的 Bessel 函数,且  $n$  是任意复数或者实数,根据乘法遍历性定理<sup>[20]</sup>, 方程(10)的平凡解的最大 Lyapunov 指数可以写为

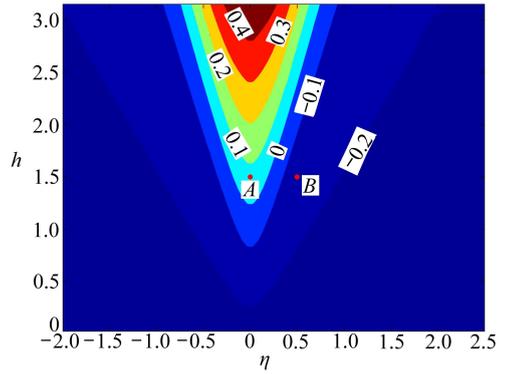
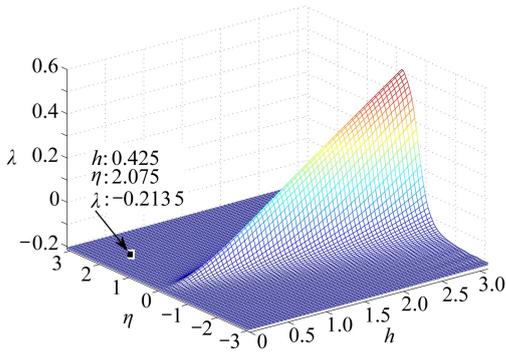
$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{a(t)}{a(0)} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\rho(t) - \rho(0)) = \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} + \frac{\omega_0 h}{4} E[\cos \phi] = \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} + \frac{\omega_0 h}{4} \int_0^{2\pi} \cos \phi p(\phi) d\phi = \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} - \frac{\omega_0 h}{8} \left\{ \frac{I_{1-i\bar{\eta}}(-\bar{h})}{I_{-i\bar{\eta}}(-\bar{h})} + \frac{I_{1+i\bar{\eta}}(-\bar{h})}{I_{i\bar{\eta}}(-\bar{h})} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $E[\cdot]$  代表数学期望,  $I_n(x)$  如前定义.

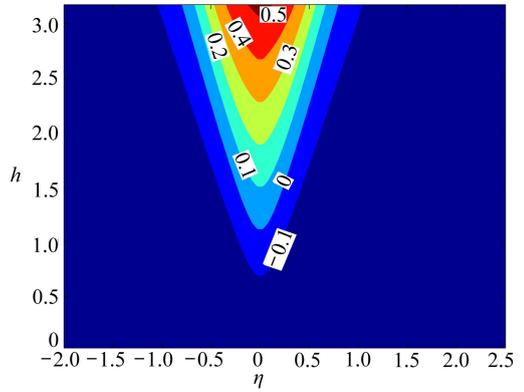
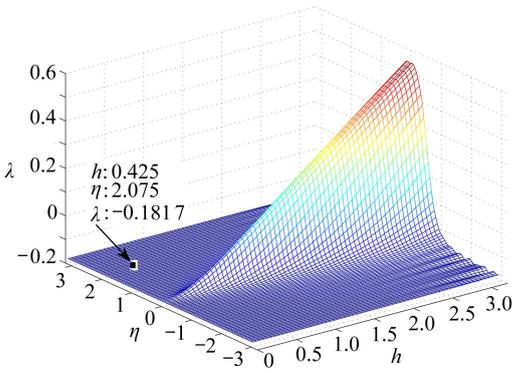
为了验证理论解的正确性,取系统(2)的参数为  $\gamma = 0.8, \alpha = 0.3$ . 当分别取  $r = 0.8$  和  $r = 0.9$  时,图 2 是由方程(15)决定的最大 Lyapunov 指数的网格曲面和等高线弧线. 根据方程(15),  $r$  越大,  $\lambda_{\min}$  越大,而图 2 中的模拟结果也验证了这一点(对于  $r = 0.8$  的情形,有  $\lambda_{\min} = -0.2133$ ; 对于  $r = 0.9$  的情形,有  $\lambda_{\min} = -0.1816$ ). 与没有碰撞的动力学系统相比,例如在文献[15-16, 21]中最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  的最小值是 0, 我们可以看到对于碰撞系统,因为碰撞的存在导致式(15)中存在  $(r-1)\omega_0/\pi$  这一项且恒为负,因此系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  的最小值是负的. 这与文献[22]中的结论是一致的.

为了进一步验证图 2 中的结果,图 3 给出了系统的时间历程图. 因为图 2(b)中的点  $A(\eta = 0.0, h = 1.5)$  处的平凡解是不稳定的,对应的时间历程图(图 3(a))是混乱的;但是点  $B(\eta = 0.5, h = 1.5)$  处,伴随着  $\eta$  的增加,平凡解是稳定的,即如图 3(b)中所示,随着时间的增加,

系统会渐近稳定到平凡解。



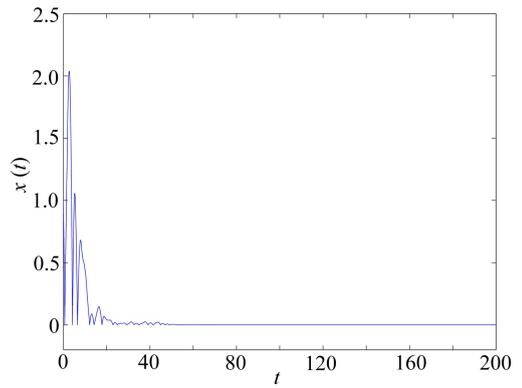
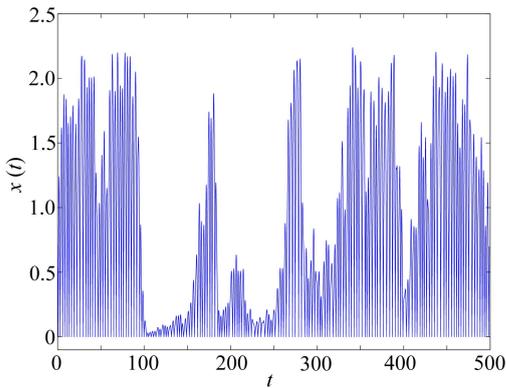
(a)  $r = 0.8$



(b)  $r = 0.9$

图 2 系统的最大 Lyapunov 指数的网格曲面和等高线,  $\alpha = 0.3, \gamma = 0.8$

Fig. 2 The mesh surfaces and isophyses of the largest Lyapunov exponents for  $\alpha = 0.3, \gamma = 0.8$



(a)  $\eta = 0.0$

(b)  $\eta = 0.5$

图 3 不同的调谐系数下系统的时间历程图 ( $h = 1.5$ )

Fig. 3 The time histories of the system with different tuning parameters for  $h = 1.5$

## 2.2 稳态矩

这一小节中,我们主要讨论方程(11)的非平凡稳态解。

当  $\gamma = 0$  时,记系统的稳态解为  $a = a_0$  和  $\Theta = \Theta_0$ ,并利用条件  $a' = 0, \Theta' = 0$  和  $a \neq 0$ ,可以得到

$$\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} + \frac{\mu_2}{8}a_0^2 - \frac{\mu_1}{16}a_0^4\right)^2 + \left(\eta + \frac{3\beta}{8\omega_0}a_0^2\right)^2 = \frac{\omega_0^2 h^2}{16}. \quad (16)$$

因此,可以得到骨架曲线方程:

$$\eta + \frac{3\beta}{8\omega_0}a_0^2 = 0. \quad (17)$$

对方程(16)两边关于  $a_0$  取微分,并令  $d\Omega/da_0 = 0$ ,进而容易取得不稳定性边界所满足的方程:

$$4J_0J_1 + J_2J_3 = 0, \quad (18)$$

其中

$$J_0 = \frac{\mu_2}{4}a_0 - \frac{\mu_1}{4}a_0^3, \quad J_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} + \frac{\mu_2}{8}a_0^2 - \frac{\mu_1}{16}a_0^4,$$

$$J_2 = 2\eta + \frac{3\beta}{4\omega_0}a_0^2, \quad J_3 = \frac{3\beta}{2\omega_0}a_0.$$

进一步,令  $\gamma \neq 0$ ,通过引入扰动项,讨论非平凡解的稳定性:

$$a = a_0 + a_1, \quad \Theta = \Theta_0 + \Theta_1, \quad (19)$$

其中  $a_0$  和  $\Theta_0$  满足方程(16), $a_1$  和  $\Theta_1$  是扰动项.

把方程(19)代入方程(11)并忽略非线性项,可以取得方程(11)在  $a_0$  和  $\Theta_0$  的线性化方程:

$$\begin{cases} da_1 = \left( \left( \frac{\mu_2}{4}a_0^2 - \frac{\mu_1}{4}a_0^4 \right) a_1 - \frac{\omega_0 h a_0 \cos \Theta_0}{4} \Theta_1 \right) dt, \\ d\Theta_1 = \left( \frac{3\beta}{2\omega_0}a_0 a_1 + \frac{\omega_0 h \sin \Theta_0}{2} \Theta_1 \right) dt - \gamma dW. \end{cases} \quad (20)$$

结合矩方法<sup>[23]</sup>和  $dEa_1/dt = dE\Theta_1/dt = dEa_1^2/dt = dE\Theta_1^2/dt = dE(a_1\Theta_1)/dt = 0$ ,在方程(20)两边取数学期望,有  $Ea_1 = E\Theta_1 = 0$ ,且二阶稳态矩  $Ea_1^2, E(a_1\Theta_1)$  和  $E\Theta_1^2$  满足

$$\begin{cases} -2\bar{\alpha}Ea_1^2 - J_2a_0E(a_1\Theta_1) = 0, \\ (-\bar{\alpha} + 2J_1)E(a_1\Theta_1) - \frac{J_2a_0}{2}E\Theta_1^2 + J_3Ea_1^2 = 0, \\ 2J_3E(a_1\Theta_1) + 4J_1E\Theta_1^2 + \gamma^2 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\bar{\alpha} = -\mu_2 a_0^2 / 4 + \mu_1 a_0^4 / 4.$$

因此,容易得到

$$\begin{aligned} E(a_1\Theta_1) &= \frac{-\bar{\alpha}J_2a_0\gamma^2}{-8\bar{\alpha}^2J_1 + 16\bar{\alpha}J_1^2 + 2\bar{\alpha}J_2J_3a_0 - 4J_1J_2J_3a_0}, \\ Ea_1^2 &= \frac{J_2^2a_0^2\gamma^2}{-16\bar{\alpha}^2J_1 + 32\bar{\alpha}J_1^2 + 4\bar{\alpha}J_2J_3a_0 - 8J_1J_2J_3a_0}, \\ E\Theta_1^2 &= -\frac{\gamma^2}{4J_1} + \frac{\bar{\alpha}J_2J_3a_0\gamma^2}{(-16\bar{\alpha}^2J_1 + 32\bar{\alpha}J_1^2 + 4\bar{\alpha}J_2J_3a_0 - 8J_1J_2J_3a_0)J_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

结合方程(19)和(22),可以取得方程(11)的非平凡解的一阶和二阶稳态矩:

$$Ea = E(a_0 + a_1) = a_0, \tag{23}$$

$$Ea^2 = a_0^2 + Ea_1^2 = a_0^2 + \frac{J_2^2 a_0^2 \gamma^2}{-16\bar{\alpha}^2 J_1 + 32\bar{\alpha} J_1^2 + 4\bar{\alpha} J_2 J_3 a_0 - 8J_1 J_2 J_3 a_0}. \tag{24}$$

图 4 和图 5 是由理论解 (23) 和 (24) 决定的一阶和二阶稳态矩, 数值解是用四阶 Runge-Kutta 算法进行计算的, 其中系统参数取为  $\alpha = 0.1$ ,  $r = 0.8$ ,  $\mu_1 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\omega_0 = 1.0$  和  $\gamma = 0.2$ . 因为  $\beta > 0$ , 稳态响应显示硬刚度特性. 可以发现, 频响曲线会有二值响应 (其中一支是稳定的, 另外一支是不稳定的. 实际上系统的响应是三值的, 包括一个稳定非平凡解, 一个稳定平凡解和一个不稳定非平凡解). 此外, 可以看出当激励振幅较小时, 响应是一个闭环. 实际上, 如果我们把平凡解考虑在内, 即为频率岛响应 (frequency island), 其中经过计算得到  $h = 0.4547$  (如图 5 中所示) 是出现频率岛现象和传统的频率响应 (如在  $h = 0.5$  处) 的临界值.

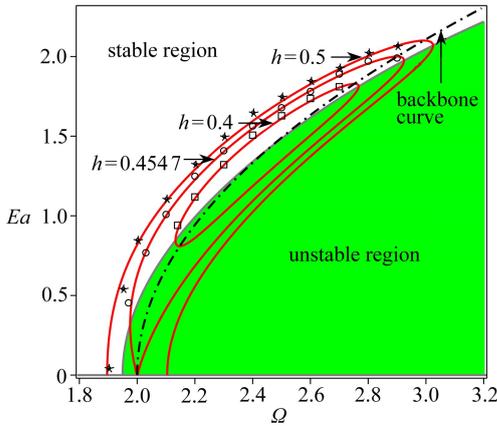


图 4 系统非平凡稳态矩的一阶矩

Fig. 4 The 1st-order non-trivial steady-state moments of the system

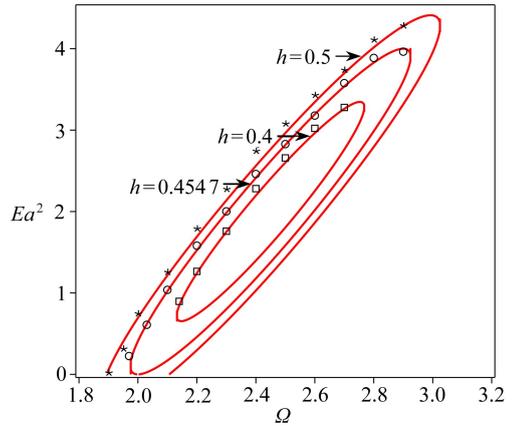


图 5 系统非平凡稳态矩的二阶矩 ( $\gamma = 0.2$ )

Fig. 5 The 2nd-order non-trivial steady-state moments of the system for  $\gamma = 0.2$

### 3 碰撞振动系统中的随机跳现象和分岔

因为随机跳的出现和双峰概率的出现相关, 随机跳的出现和消失也叫随机分岔. 这一节将使用有限差分法<sup>[24]</sup> 讨论分析随机激励诱导的随机跳现象. 当  $\gamma \neq 0$  时, 方程 (11) 是一个二维的 Itô 随机微分方程, 因此, 对应的 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}(g_1(a, \Theta)p) - \frac{\partial}{\partial \Theta}(g_2(a, \Theta)p) + \frac{\gamma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}(p), \tag{25}$$

其中  $p(a, \Theta, t)$  是转移概率密度,

$$g_1(a, \Theta) = -\frac{\alpha}{2} a + \frac{(r-1)\omega_0}{\pi} a + \frac{\mu_2}{8} a^3 - \frac{\mu_1}{16} a^5 - \frac{\omega_0 h}{4} a \sin \Theta,$$

$$g_2(a, \Theta) = 2\eta - \frac{\omega_0 h}{2} \cos \Theta + \frac{3\beta}{4\omega_0} a^2.$$

取边界条件为自然边界条件, 假设初始条件是具有如下 Gauss 型的概率密度<sup>[25]</sup>:

$$p(a(0), \Theta(0)) = \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \exp\left\{-\frac{(a(0) - \mu_1)^2}{2s_1^2} - \frac{(\Theta(0) - \mu_2)^2}{2s_2^2}\right\}, \tag{26}$$

其中

$$\mu_1 = (a_{\text{up}} + a_{\text{below}})/2.0, \mu_2 = (\Theta_{\text{up}} + \Theta_{\text{below}})/2.0, s_1 = 0.1, s_2 = 0.2.$$

系统参数与第2节的选择一致,取 $\Omega = 2.05, h = 0.4$ .我们取状态空间 $[0.0, 2.0] \times [-10.0, 10.0]$ 作为研究范围.通过计算发现,选取迭代步长为 $\Delta t = 0.01$ ,联合概率密度 $T \geq 15$ 时即可达到稳态,因此我们取积分时间为 $T = 20$ 即可.此外,采用足够准确的迎风策略来处理对流项,使用中心微分策略处理扩散项.图6是在不同带宽 $\gamma$ 下,通过对方程(25)使用有限差分法,得到的振幅和相位的联合概率密度.

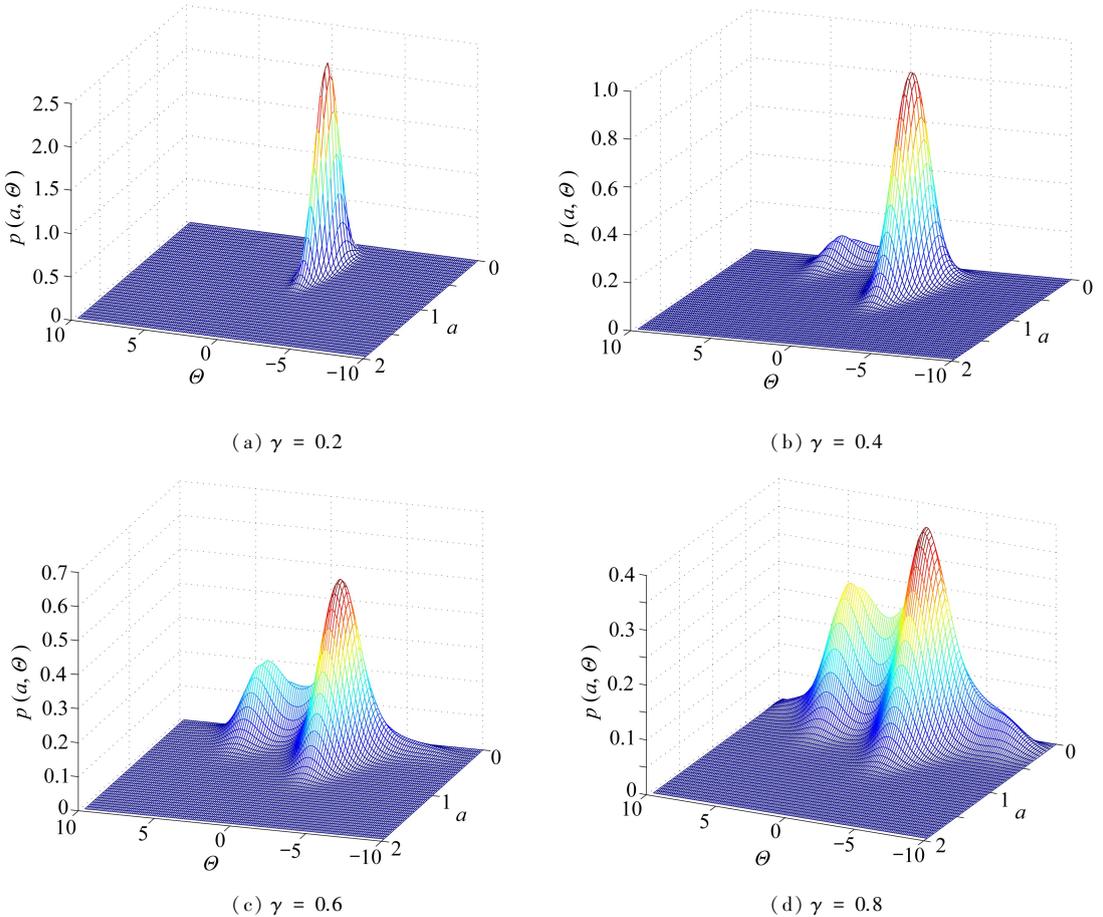


图6 系统(2)的联合密度曲面

Fig. 6 The surfaces of the joint probability density for system (2)

可以看出在图6(a)中,当 $\gamma = 0.2$ 时,稳态联合概率密度主要集中于非平凡解,伴随着 $\gamma$ 增加,当 $\gamma = 0.4$ 时在图6(b)中,非平凡解有向平凡解跳的趋势. $\gamma = 0.6$ (图6(c)) and  $\gamma = 0.8$ (图6(d))时这种现象更明显.图6中的跳现象显示,随着噪声强度的增加,非平凡解将发生耗散现象,同时稳态解的概率密度从非平凡解向平凡解转移.因此,伴随着随机激励的改变,稳态概率密度会从单峰变双峰,有跳现象发生<sup>[26]</sup>.

## 4 结 论

本文借助 Krylov-Bogoliubov 平均法讨论了窄带噪声作用下非线性碰撞振动系统的随机响应.首先,根据相应的 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程,利用平凡稳态解的最大 Lyapunov 指数,

分析了系统的几乎确定稳定性.进一步,得到了非平凡解的一阶和二阶稳态矩.研究发现,碰撞振动系统的最大 Lyapunov 指数的最小值是负的,这是不同于非碰撞系统的响应特性.此外还发现,噪声强度越大,碰撞系统的最大 Lyapunov 指数的最小值越大.最后,使用有限差分方法,讨论了碰撞振动系统中存在的随机跳现象.

### 参考文献(References):

- [1] Babitsky V I. *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [2] Ibrahim R A. *Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [3] XU Wei, HUANG Dong-mei, XIE Wen-xian. Multi-valued responses and dynamic stability of a nonlinear vibro-impact system with a unilateral non-zero offset barrier[J]. *Chinese Physics B*, 2016, **25**(3): 030502. doi:10.1088/1674-1056/25/3/030502.
- [4] de Weger J, Binks D, Molenaar J, Van de Water W. Generic behavior of grazing impact oscillators[J]. *Physical Review Letters*, 1996, **76**(21): 3951-3954.
- [5] Budd C, Dux F. Chattering and related behaviour in impact oscillators[J]. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, 1994, **347**(1683): 365-389.
- [6] Wagg D J. Rising phenomena and the multi-sliding bifurcation in a two-degree of freedom impact oscillator[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2004, **22**(3): 541-548.
- [7] LUO Guan-wei, CHU Yan-dong, ZHANG Yan-long, ZHANG Jian-gang. Double Neimark-Sacker bifurcation and torus bifurcation of a class of vibratory systems with symmetrical rigid stops[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **298**(1/2): 154-179.
- [8] Dimentberg M F, Iourtchenko D V. Random vibrations with impacts; a review[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **36**(2): 229-254.
- [9] Namachchivaya N S, Park J H. Stochastic dynamics of impact oscillators[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2005, **72**(6): 862-870.
- [10] 武娟, 许勇. 加性二值噪声激励下 Duffing 系统的随机分岔[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(6): 593-599.(WU Juan, XU Yong. Stochastic bifurcations in a Duffing system driven by additive dichotomous noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 593-599.(in Chinese))
- [11] FENG Jin-qian, XU Wei, WANG Rui. Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **309**(3/5): 730-738.
- [12] RONG Hai-wu, WANG Xiang-dong, XU Wei, FANG Tong. Subharmonic response of a single-degree-of-freedom nonlinear vibro-impact system to a narrow-band random excitation[J]. *Physics Review E*, 2009, **80**: 026604.
- [13] 李倩, 刘俊卿, 陈诚诚. 随机激励下四自由度车辆-道路耦合系统动力分析[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(5): 460-473.(LI Qian, LIU Jun-qing, CHEN Cheng-cheng. Dynamic analysis of the 4-DOF vehicle-road coupling system under random excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 460-473.(in Chinese))
- [14] HUANG Dong-mei, XU Wei, LIU Di, HAN Qun. Multi-valued responses of a nonlinear vibro-impact system excited by random narrow-band noise[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2014. doi: 10.1177/1077546314546512.

- [15] RONG Hai-wu, MENG Guang, WANG Xiang-dong, XU Wei, FANG Tong. Invariant measures and Lyapunov exponents for stochastic Mathieu system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, **30**(4): 313-321.
- [16] FENG Zhi-hua, LAN Xiang-jun, ZHU Xiao-dong. Principal parametric resonances of a slender cantilever beam subject to axial narrow-band random excitation of its base[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, **42**(10): 1170-1185.
- [17] 徐伟, 戎海武, 方同. 谐和与有界噪声联合参激作用下的 visco-elastic 系统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 963-972. (XU Wei, RONG Hai-wu, FANG Tong. Visco-elastic systems under both deterministic and bound random parametric excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, **24**(9): 963-972. (in Chinese))
- [18] Wedig W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations[J]. *Structural Safety*, 1990, **8**(1/4): 13-25.
- [19] Zhuravlev V F. A method for analyzing vibration-impact systems by means of special functions [J]. *Mechanics of Solids*, 1976, **11**(2): 23-27.
- [20] Oseledec V L. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1968, **19**: 197-231.
- [21] RONG Hai-wu, MENG Guang, WANG Xiang-dong, XU Wei, FANG Tong. Largest Lyapunov exponent for second-order linear systems under combined harmonic and random parametric excitations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **283**(3/5): 1250-1256.
- [22] 戎海武, 王向东, 罗旗帜, 徐伟, 方同. 有界随机噪声激励下碰撞系统的最大 Lyapunov 指数 [J]. 应用力学学报, 2013, **30**(5): 752-755. (RONG Hai-wu, WANG Xiang-dong, LUO Qi-zhi, XU Wei, FANG Tong. Maximal Lyapunov exponent of a single-degree-of-freedom linear vibro-impact system to a boundary random parametric excitation[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, **30**(5): 752-755. (in Chinese))
- [23] Lin Y K, Cai G Q. *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications* [M]. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [24] HUANG Zhi-long, ZHU Wei-qiu. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems under bounded noise excitations [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, **19**(3): 219-228.
- [25] Yu J S, Lin Y K. Numerical path integration of a non-homogeneous Markov process[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(9): 1493-1500.
- [26] ZHU Wei-qiu, Lu M Q, Wu Q T. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow-band excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **165**(2): 285-304.

# Dynamic Responses of Nonlinear Vibro-Impact Systems Under Narrow-Band Random Parametric Excitation

HUANG Dong-mei, XU Wei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,  
Xi'an 710072, P.R.China)

(Recommended by XIE Gong-nan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The stochastic responses of nonlinear vibro-impact systems under random parametric excitation were investigated. Based on the Krylov-Bogoliubov averaging method, the largest Lyapunov exponent deciding the almost sure stability of the trivial solution was derived. Results show that the characteristics of the largest Lyapunov exponent of the vibro-impact system was different from that of the system without impact. Meanwhile, the backbone curve and the critical equation for the unstable region were also derived in the deterministic case. Then, the 1st- and 2nd-order non-trivial steady-state moments of the system were discussed, and the frequency island phenomenon was also found. Finally, the phenomenon of stochastic jump was analyzed via the finite difference method. The basic jump phenomena indicate that, under the conditions of system parameters within a smaller bandwidth, the most probable motion is around the non-trivial branch of the amplitude response curve, whereas within a larger bandwidth, the most probable motion is around the trivial one of the amplitude response curve.

**Key words:** vibro-impact system; non-smooth transformation; steady-state behavior; stochastic jump; narrow-band random noise

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11472212;11532011)

---

引用本文/Cite this paper:

黄冬梅, 徐伟. 随机窄带噪声作用下非线性碰撞振动系统的稳态响应研究[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 633-643.

HUANG Dong-mei, XU Wei. Dynamic responses of nonlinear vibro-impact systems under narrow-band random parametric excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 633-643.