

# 特慢扩散的一种分数阶结构导数模型\*

陈文<sup>1,2</sup>, 黑鑫东<sup>1,2</sup>, 梁英杰<sup>1,2</sup>

(1. 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室(河海大学), 南京 210098;  
2. 河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

(我刊编委陈文来稿)

**摘要:** 自然界和工程中存在很多比幂率慢扩散(sub-diffusion)过程更慢的扩散,即特慢扩散(ultra-slow diffusion).特慢扩散难以用传统的反常扩散建模方法来描述.Sinai(西奈)随机模型描述了一种特殊的对数关系特慢扩散.运用 Mittag-Leffler(米塔格-累夫勒)函数的反函数,将 Sinai 扩散拓展为一般的特慢扩散.此外,该文的模型引入初始状态参量,解决了 Sinai 对数扩散不适用于初始时刻附近的问题.作为分数阶导数的一般情况,该文也引入了分数阶结构导数的概念,并用来建立特慢扩散的控制微分方程.

**关键词:** 特慢扩散; Sinai 随机模型; Mittag-Leffler 反函数; 分数阶结构导数; 扩散方程

**中图分类号:** O39; O352; O371; O175.2      **文献标志码:** A  
**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.005

## 引 言

扩散过程通常以均方位移和时间的幂率正比关系式来描述<sup>[1]</sup>,其数学形式如下:

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^\alpha. \quad (1)$$

当参数  $\alpha < 1$  时,上式表示“慢扩散”过程.当参数  $\alpha > 1$  时,上式表示“快扩散”(super-diffusion)过程.正常扩散是参数  $\alpha = 1$  时的特殊情况.

近年来,研究人员在反常扩散的建模研究上做了大量的工作.关于反常扩散领域目前的研究进展可参见专著[2]和文献[3]中的综述.然而,自然界中存在很多比上述慢扩散过程慢得多的特慢扩散现象,如非晶合金熔体的原子扩散<sup>[4]</sup>、高密度胶体的老化<sup>[5-6]</sup>、化学溶剂在聚合介质中的扩散<sup>[7]</sup>等.Sinai 在 1982 年首次提出了对数关系特慢扩散的下列随机模型<sup>[8]</sup>:

$$\langle x^2(t) \rangle \propto (\ln t)^4. \quad (2)$$

Sinai 模型是描述对数关系特慢扩散的一个统计模型,但是它存在以下两个方面的问题:

1) 当  $t$  从 0 单调地变化到 1 时,  $\langle x^2(t) \rangle$  相应地从无穷变到 0,而实际上  $t = 0$  对应的  $\langle x^2(t) \rangle$

\* 收稿日期: 2016-01-25; 修订日期: 2016-03-14

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11372097);111 引智计划(B12032)

作者简介: 陈文(1967—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: chenwen@hhu.edu.cn);  
黑鑫东(1988—),男,博士生(E-mail: heixindong@hhu.edu.cn);  
梁英杰(1988—),男,博士生(E-mail: liangyj1989@126.com).

也应该是 0. 所以 Sinai 模型只适用于刻画长时间尺度的慢扩散, 不能用于刻画初始时刻附近的短时间内的扩散;

2) 适用范围很小, 对很多特慢扩散实验数据拟合不太理想.

文献[8]将 Sinai 对数扩散一般化, 得到一般的对数扩散模型, 如下:

$$\langle x^2(t) \rangle \sim (\ln t)^{2\gamma}. \quad (3)$$

但是以上两个问题仍然没有得到解决.

针对以上两个问题, 本文利用 Mittag-Leffler 函数的反函数  $M_\alpha$  将 Sinai 对数关系扩散一般化, 得到下面的特慢扩散随机模型:

$$\langle x^2(t) \rangle \sim [M_\alpha(\delta + t)]^{2\gamma}, \quad (4)$$

其中  $0 < \alpha < 1, \delta > 0, 0 < \gamma \leq 2$ , 并由此建立特慢扩散的分数阶结构导数模型.

注意到当  $\alpha = 1, \delta = 0, \gamma = 2$  时, 式(4)退化为 Sinai 模型(2).

## 1 预备知识

### 1.1 分数阶微积分

常用的分数阶导数定义有两种, 即 Caputo(开普图)导数和 Riemann-Liouville(黎曼-刘维尔)导数.

阶数为  $q \in (0, 1)$ , 下限为 0 的 Caputo 导数算子的定义式如下:

$${}^c D_{0,t}^q f(t) := \frac{d^q}{dt^q} f(t) = J_0^{1-q} f'(t),$$

其中  $J_0^{1-q}$  为  $1 - q$  阶 Riemann-Liouville 积分算子, 其定义式如下:

$$J_0^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds, \quad \beta > 0.$$

阶数为  $q \in (0, 1)$ , 下限为 0 的 Riemann-Liouville 导数算子的定义式如下:

$${}^L D_{0,t}^q f(t) := D_t^q f(t) = \frac{d}{dt} J_0^{1-q} f(t).$$

### 1.2 Mittag-Leffler 函数及其反函数

单参数的 Mittag-Leffler 函数(简称 M-L 函数)的定义为

$$E(\alpha, 1, z) := E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (5)$$

其中  $\alpha > 0, z \in \mathbf{C}$ .

**注 1** 当  $\alpha = 1$  时, M-L 函数则退化为指数函数  $e^z$ . 对于 M-L 函数的反函数  $M_\alpha(x)$ , 当  $\alpha = 1$  时,  $M_\alpha(x)$  则退化为对数函数  $\ln x$ .

图 1 是单参数 M-L 函数及其反函数. 由图可见当  $x$  超过 1 附近的某个值时, M-L 函数的反函数随时间单调增加的速度要比对数函数慢.

下面我们从数学上严格证明, 当  $\alpha \in (0, 1), t \in [1, +\infty)$  时, M-L 函数的反函数随时间单调增加的速度要比对数函数慢. 首先需要用到以下一个引理.

**引理 1** 设定义域在  $[0, +\infty)$  上的实值光滑函数  $f_1(x), f_2(x)$  满足  $f_1(0) = f_2(0)$ , 且  $f_1^{(n)}(0) > f_2^{(n)}(0)$  对任意的正整数  $n$  成立, 则  $f_1(x) > f_2(x), f_1'(x) > f_2'(x)$  对任意的  $x \in (0,$

$+\infty$ ) 成立.

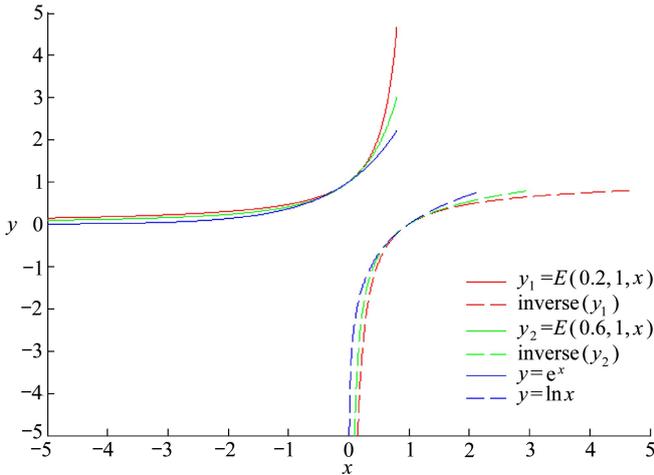


图 1 M-L 函数及其反函数与指(对)数函数的对比图

Fig. 1 The comparative diagram of the M-L function and its inverse

**证明** 对任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 将  $f_1(x) - f_2(x)$  在 0 处进行 Taylor(泰勒)展开得到

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= f_1(0) - f_2(0) + [f_1'(0) - f_2'(0)]x + \\ &\frac{f_1''(0) - f_2''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f_1^{(n)}(0) - f_2^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \\ &[f_1'(0) - f_2'(0)]x + \frac{f_1''(0) - f_2''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f_1^{(n)}(0) - f_2^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots. \end{aligned}$$

于是由条件  $f_1^{(n)}(0) > f_2^{(n)}(0)$  对任意的正整数  $n$  成立, 得

$$f_1(x) - f_2(x) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

同理, 对任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 将  $f_1'(x) - f_2'(x)$  在 0 处进行 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned} f_1'(x) - f_2'(x) &= [f_1'(0) - f_2'(0)] + [f_1''(0) - f_2''(0)]x + \\ &\frac{f_1^{(3)}(0) - f_2^{(3)}(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f_1^{(n+1)}(0) - f_2^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + \dots. \end{aligned}$$

由条件  $f_1^{(n)}(0) > f_2^{(n)}(0)$  对任意的正整数  $n$  成立, 得

$$f_1'(x) > f_2'(x), \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

证毕.

**推论 1** 当  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in (0, +\infty)$  时,  $E_\alpha(x) > e^x$ , 且  $\dot{E}_\alpha(x) > e^x$ .

**证明** 当  $\alpha \in (0, 1)$  时, 由 M-L 函数的表达式(5)容易得到

$$E_\alpha(0) = e^0 = 1, \quad E_\alpha^{(1)}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} > 1 = e^0.$$

对于任意的正整数  $n$ , 有

$$E_\alpha^{(n)}(0) = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha + 1)} > 1 = e^0.$$

于是由引理 1 得到  $E_\alpha(x) > e^x$ , 且  $\dot{E}_\alpha(x) > e^x$  对任意的  $x \in (0, +\infty)$  成立, 证毕.

**定理 1** 当  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$  时, M-L 函数的反函数  $M_\alpha(x)$  满足

1)  $M_\alpha(x) < \ln x$ ;

$$2) \dot{M}_\alpha(x) < \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

证明

1) 当  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$  时, 令  $y_1 = M_\alpha(x)$ ,  $y_2 = \ln x$ , 则  $x = E_\alpha(y_1) = e^{y_2}$ , 由于  $x = E_\alpha(y_1) > 1 = E_\alpha(0)$ , 则由  $E_\alpha(x)$  的单调性得到  $y_1 > 0$ , 则由推论 1,  $E_\alpha(y_1) > e^{y_1}$ , 则有  $e^{y_2} = E_\alpha(y_1) > e^{y_1}$ , 由指数函数的单调性得到  $y_2 > y_1$ , 结论得证.

2) 当  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$  时, 令  $y = \ln x$ , 则由函数的反函数导数的性质以及推论 1 得到

$$\dot{M}_\alpha(x) = \frac{1}{\dot{E}_\alpha(y)} < \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

结论得证.

### 1.3 连续时间随机游走

均方位移和时间函数成正比形式的反常扩散定律可以用连续时间随机游走 (continuous-time random walks, 简称 CTRWs) 理论中的概率密度函数, 通过以下关系来导出:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x, t) dx, \quad (6)$$

其中  $P(x, t)$  为 CTRWs 的时间-空间概率密度函数.

对于具有非耦合时间-空间概率密度  $P(x, t) = p(x)\psi(t)$  的连续时间随机游走, 其概率密度函数在 Fourier-Laplace (傅里叶-拉普拉斯) 空间中的形式为<sup>[9]</sup>

$$W(k, u) = \frac{1 - \varphi(s)}{s} \frac{1}{1 - \lambda(k)\varphi(s)}, \quad (7)$$

其中  $\lambda(k)$  为  $p(x)$  的 Fourier 变换

$$\lambda(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} p(x) dx, \quad (8)$$

$\varphi(s)$  为  $\psi(t)$  的 Laplace 变换

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \psi(t) dt. \quad (9)$$

## 2 特慢扩散的分数阶结构导数模型

在以下两个物理假设下:

1) 扩散区域内每个粒子的运动独立于其它粒子的运动;

2) 当考虑的时间区域足够长时, 扩散区域内同个粒子在不同时间区域内的运动互为独立的过程.

Einstein (爱因斯坦) 导出了正常扩散方程<sup>[10]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (10)$$

假设粒子在 0 时刻处在无界区域中的原点位置, 则上述扩散方程解有如下概率密度函数:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4K_1 t}\right). \quad (11)$$

从上式可得到均方位移 (概率密度函数的二阶矩):

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x, t) dx = 2K_1 t. \quad (12)$$

式(12)为正常扩散的随机模型.

扩散方程(10)也可以通过从连续随机时间游走理论导出<sup>[11]</sup>.在随机游走理论中, Einstein 假设进一步量化, 等待时间概率分布  $w(t)$  和跳跃步长概率分布函数  $\lambda(x)$  分别符合 Poisson (泊松)分布和正态分布:

$$\begin{cases} w(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau), \\ \lambda(x) = (4\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\sigma^2)). \end{cases} \quad (13)$$

相应的 Laplace 变换和 Fourier 变换分别为

$$\begin{cases} w(u) \sim 1 - u\tau + O(\tau^2), \\ \lambda(k) \sim 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4). \end{cases} \quad (14)$$

文献[8]指出对任意的等待时间概率密度  $w(t)$  和跳跃步长概率密度函数  $\lambda(x)$ , 只要其 Laplace 变换和 Fourier 变换分别满足式(14), 就可以推导出  $w(t)$  和  $\lambda(x)$  所对应的扩散方程为式(10).

Einstein 假设认为每个粒子的时间和空间都是独立的, 而我们一般认为反常扩散是有记忆、路径依赖的非局域过程. 如文献[9]就指出如果等待时间概率分布  $w(t)$  和跳跃步长概率分布函数  $\lambda(x)$  分别符合幂律分布和正态分布:

$$\begin{cases} w(t) \sim A_\alpha (\tau/t)^{1+\alpha}, \\ \lambda(x) = (4\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\sigma^2)), \end{cases} \quad (15)$$

则它们的 Laplace 变换和 Fourier 变换分别满足

$$\begin{cases} w(u) \sim 1 - (u\tau)^\alpha + O(\tau^2), \\ \lambda(k) \sim 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4). \end{cases} \quad (16)$$

由此推导出对应的反常扩散方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K_\alpha D_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (17)$$

在方程(17)两边同时作用二阶矩算子  $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2$ , 即可得到如形式(1)的反常扩散定律.

方程(17)中的 Riemann-Liouville 分数阶导数算子  $D_t^{1-\alpha}(\cdot)$  中的幂率积分核  $M(t) \propto t^{\alpha-1}$  表明由方程(17)定义的是非 Markov(马尔可夫)的、带有记忆的反常扩散行为.

受反常扩散方程(17)、文献[12]以及文献[13]的启发, 我们推测 M-L 逆函数形式的特慢扩散定律对应的扩散方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = H_\alpha \cdot {}_0K_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (18)$$

其中  $H_\alpha$  为待定系数,  ${}_0K_t^{1-\alpha}(\cdot)$  为分数阶结构导数算子, 其定义为

$${}_0K_t^{1-\alpha} f(t) = Q_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t k_{\alpha-1}(\delta + t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (19)$$

其中  $Q_\alpha$  为待定系数. 注意到, 当奇异核为幂率形式  $k_\alpha(t) = t^\alpha$ , 且  $\delta = 0$ ,  $Q_\alpha = 1/\Gamma(\alpha)$  时, 上式便退化为传统的 Riemann-Liouville 分数阶导数算子的定义.

下面来推导特慢扩散对应的扩散方程中  ${}_0K_t^{1-\alpha}$  核导数中奇异核  $k_\alpha$  的具体形式.

在方程(18)两边同时作用二阶矩算子  $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2$  得到

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = {}_0K_t^{1-\alpha} 2H_\alpha. \quad (20)$$

在式(4)中添加比例系数  $T_\alpha$  将其转化为等式,且取  $y = 2$ , 得到

$$\langle x^2(t) \rangle = T_\alpha [M_\alpha(\delta + t)]^4. \quad (21)$$

在上式中两边同时对  $t$  求导,得到

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = 4T_\alpha [M_\alpha(\delta + t)]^3 \dot{M}_\alpha(\delta + t). \quad (22)$$

取  $H_\alpha = (1/2)(T_\alpha/Q_\alpha)$ , 将式(20)、(22)联立,得到

$$\frac{1}{Q_\alpha} {}_0K_t^{1-\alpha}(1) = 4[M_\alpha(\delta + t)]^3 \dot{M}_\alpha(\delta + t). \quad (23)$$

在上式中两边同时求 0 到  $t$  区间上的积分,得到

$$\int_0^t k_{\alpha-1}(\delta + t - \tau) d\tau = [M_\alpha(\delta + t)]^4 - [M_\alpha(\delta)]^4. \quad (24)$$

在上式中两边同时进行 Laplace 变换并整理得到

$$L[k_{\alpha-1}(\delta + t)] = sL\{[M_\alpha(\delta + t)]^4\} - [M_\alpha(\delta)]^4.$$

在上式中两边同时进行 Laplace 逆变换得到奇异核的形式为

$$k_{\alpha-1}(\delta + t) = 4[M_\alpha(\delta + t)]^3 \dot{M}_\alpha(\delta + t). \quad (25)$$

### 3 特慢扩散定律的概率

本节通过引入下面两个概率假设来导出本文提出的特慢扩散定律(4)。

**假设 1** 扩散区域内偏移场覆盖长度的概率分布为如下幂率关系:

$$P(k) = k^{-\beta}, \quad (26)$$

其中  $\beta > 1$ .

**假设 2** 扩散区域内粒子受到的偏移场对时间的变化率由去奇异的 M-L 函数的反函数的导数来控制,即

$$\dot{E} = \dot{M}_\alpha(\delta + t), \quad (27)$$

其中  $\alpha$  为表征扩散粒子活性的参数(待拟合),  $\delta$  为控制初始时刻的偏移场变化率的参数(可从实验数据中获得)。

**注 2** 在以上假设中,如果限定  $\beta > 2, \alpha = 1, \delta = 0$ , 则  $\dot{E} = 1/t$ , 由此得到  $t \sim e^E$ , 由此可以推导出 Sinai 扩散定律(见文献[8])。

在式(27)两边同时积分得到

$$E \sim M_\alpha(\delta + t). \quad (28)$$

两边同时作用 M-L 算子  $E_\alpha$ , 于是我们将逃逸时间与区域向内偏移场的关系一般化为如下修正的 M-L 函数型关系:

$$t_{\text{exit}} \sim E_\alpha[E] - \delta, \quad (29)$$

其中  $E_\alpha$  为 M-L 函数,  $E$  为区域内的总偏移场. 区域是由  $S$  串位移点组成, 其中每串位移点中的偏移场相同。

利用 Lévy flight 的性质, 可以得到<sup>[8]</sup>

$$E \sim \begin{cases} l^{(\beta-1)/\beta}, & 1 < \beta < 2, \\ l^{1/2}, & \beta \geq 2. \end{cases} \quad (30)$$

将上式代入到式(29)整理后即可得到

$$\langle x^2(t) \rangle \sim [M_\alpha(\delta + t)]^{2y}, \quad (31)$$

其中

$$y = \begin{cases} \beta/(\beta - 1), & 1 < \beta < 2, \\ 2, & \beta \geq 2. \end{cases}$$

## 4 特慢扩散行为

首先我们从图像上来观察本文基于 M-L 逆函数提出的特慢扩散和 Sinai 对数扩散之间的区别.

首先分别在式(31)中取  $\alpha = 0.5, 0.8, \delta = 1$ , 且偏移场分布因子  $\beta = 2$  时, 特慢扩散和 Sinai 对数扩散短时间的扩散过程对比如图 2.

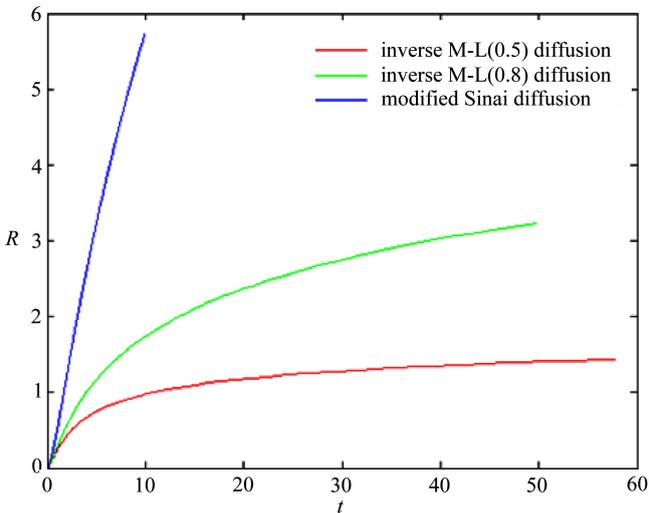


图 2 特慢扩散与和 Sinai 对数扩散在短时间内的行为

Fig. 2 Short-term behaviors of the ultra-slow diffusion and the Sinai diffusion

图 2 中纵坐标  $R$  为均方根位移, inverse M-L(0.5) diffusion 表示 M-L 逆函数参数  $\alpha = 0.5$  的特慢扩散, inverse M-L(0.8) diffusion 表示  $\alpha = 0.8$  时的特慢扩散, modified Sinai diffusion 表示  $\alpha = 1$  时特慢扩散退化为加入初值参数  $\delta = 1$  后的 Sinai 对数扩散. 从图中可以明显地看出, 特慢扩散要比 Sinai 对数扩散的扩散速度慢得多, 所以能够用来刻画比 Sinai 对数扩散更慢的扩散.

基于 M-L 逆函数的特慢扩散与 Sinai 对数扩散长时间的扩散行为对比, 分别取  $\alpha = 0.9, 0.95, \delta = 1$ , 且偏移场分布因子  $\beta = 2$  时, 则基于 M-L 逆函数的特慢扩散和 Sinai 对数扩散长时间行为如图 3.

图 3 中标注纵坐标  $R$  为均方根位移, inverse M-L(0.9) diffusion 表示  $\alpha = 0.9$  时的特慢扩散, inverse M-L(0.95) diffusion 表示  $\alpha = 0.95$  时的特慢扩散, modified Sinai diffusion 表示  $\alpha = 1$  时特慢扩散退化为加入初值参数  $\delta = 1$  的 Sinai 对数扩散. 从图 3 显示, 当  $\alpha$  不断接近于 1 时, 基于 M-L 逆函数的特慢扩散逐渐收敛于 Sinai 对数扩散.

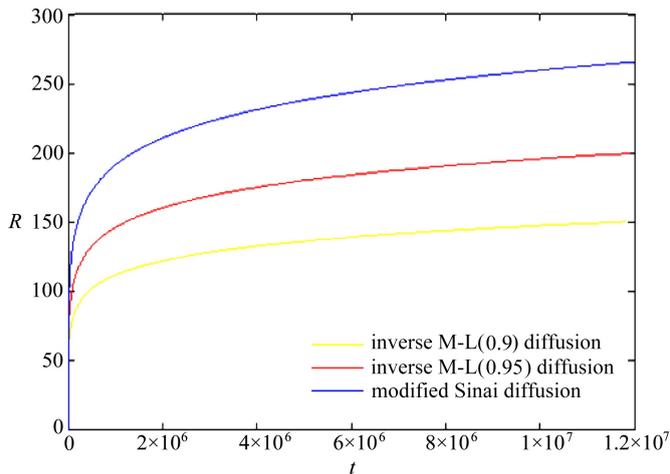


图3 特慢扩散与 Sinai 对数扩散的长时间行为

Fig. 3 Long-term behaviors of the ultra-slow diffusion and the Sinai diffusion

## 5 结论与展望

本文利用 M-L 函数的反函数,将 Sinai 扩散拓展为更一般的特慢扩散,引入了初始状态参量,解决了 Sinai 扩散在初始时刻附近的奇异性问题.另一方面,我们的特慢扩散模型的适用范围比 Sinai 扩散更加广泛.

本文还通过引入分数阶结构导数的概念,建立了特慢扩散的分数阶结构导数模型,导出了特慢扩散控制方程的奇异核表达式.

本文所建立的特慢扩散分数阶结构导数模型还有 3 个方面的工作需要深入研究:

- 1) 从随机游走理论的角度,通过非耦合时间-空间概率密度函数导出奇异核形式为式(25)的分数阶结构导数扩散方程;
- 2) 与幂率核的分数阶对流扩散方程的数值解法<sup>[14]</sup>对应的、奇异核的形式为式(25)的分数阶结构导数扩散方程的数值求解算法;
- 3) 局部结构函数导数建模方法与非局部结构函数导数建模方法的区别和联系.

### 参考文献 (References):

- [1] Metzler R, Jeon J H, Cherstvy A G, Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking [J]. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2014, **16**(44): 24128-24164.
- [2] 陈文, 孙洪广, 李西成, 叶霖娟, 胡帅, 张晓棣, 成亮. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (CHEN Wen, SUN Hong-guang, LI Xi-cheng, YE Lin-juan, HU Shuai, ZHANG Xiao-di, CHENG Liang. *Fractional Derivative Modeling in Mechanical and Engineering Problems*[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))
- [3] 庞国飞, 陈文, 张晓棣, 孙洪广. 复杂介质中扩散和耗散行为的分数阶导数唯象建模[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(11): 1117-1134. (PANG Guo-fei, CHEN Wen, ZHANG Xiao-di, SUN Hong-guang. Fractional differential phenomenological modeling for diffusion and dissipation

- behaviors of complex media[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(11): 1117-1134. (in Chinese)
- [4] 胡金亮, 朱纯傲, 耿永亮, 张博. 非晶合金熔体的原子扩散[J]. 中国材料进展, 2014, **33**(5): 282-288. (HU Jin-liang, ZHU Chun-ao, GENG Yong-liang, ZHANG Bo. Atomic diffusion in amorphous alloy melts[J]. *Materials China*, 2014, **33**(5): 282-288. (in Chinese))
- [5] Boettcher S, Sibani P. Ageing in dense colloids as diffusion in the logarithm of time[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2011, **23**(6): 540-545.
- [6] Courtland R E, Weeks E R. Direct visualization of ageing in colloidal glasses[J]. *Journal of Physics Condensed Matter*, 2003, **15**(15): S359-S365.
- [7] Longmire M L, Watanabe M, Zhang H, Wooster T T, Murray R W. Voltammetric measurement of ultraslow diffusion rates in polymeric media with microdisk electrodes[J]. *Analytical Chemistry*, 1990, **62**(7): 747-752.
- [8] Marquardt P, Nimitz G, Weiss W. Generalisation of the Sinai anomalous diffusion law[J]. *Journal of Physics A: Mathematical & General*, 1987, **20**(18): 6637.
- [9] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach[J]. *Physics Reports*, 2000, **339**(1): 1-77.
- [10] Einstein A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*[M]. New York: Courier Corporation, 1956.
- [11] Klafter J, Klafter J. *First Steps in Random Walks*[M]. New York: Oxford University Press, 2011.
- [12] Caputo M, Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel[J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2015, **1**(2): 73-85.
- [13] 陈文. 复杂科学与工程问题仿真的隐式微积分建模[J]. 计算机辅助工程, 2014, **23**(5): 1-6. (CHEN Wen. Implicit calculus modeling for simulation of complex scientific and engineering problems[J]. *Computer Aided Engineering*, 2014, **23**(5): 1-6. (in Chinese))
- [14] PANG Guo-fei, CHEN Wen, FU Zhuo-jia. Space-fractional advection-dispersion equations by the Kansa method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, **293**: 280-296.

# A Fractional Structural Derivative Model for Ultra-Slow Diffusion

CHEN Wen<sup>1,2</sup>, HEI Xin-dong<sup>1,2</sup>, LIANG Ying-jie<sup>1,2</sup>

(1. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering(Hohai University)*, Nanjing 210098, P.R.China;

2. *College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, P.R.China*)

(Contributed by CHEN Wen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The ultra-slow diffusion is even more slow than the power-law sub-diffusion and is widely observed in a variety of natural and engineering fields. The ultra-slow diffusion cannot be well described with the traditional anomalous diffusion models. The Sinai's law of diffusion depicts a special type of ultra-slow diffusion which is characterized by a logarithmic stochastic relationship. In this study, the Sinai diffusion was extended to a general ultra-slow diffusion. In addition, in the proposed model the initial parameters were introduced to remedy the perplexing issue that the Sinai diffusion was not feasible around the initial period of the ultra-slow diffusion. As a generalized fractional-order derivative, the concept of the fractional structural derivative was also presented to establish the partial differential equation governing the ultra-slow diffusion.

**Key words:** ultra-slow diffusion; Sinai stochastic model; inverse Mittag-Leffler function; fractional structural derivative; diffusion equation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11372097)

---

引用本文/Cite this paper:

陈文, 黑鑫东, 梁英杰. 特慢扩散的一种分数阶结构导数模型[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 599-608.

CHEN Wen, HEI Xin-dong, LIANG Ying-jie. A fractional structural derivative model for ultra-slow diffusion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 599-608.