

饱和多孔介质的超粘弹性本构理论研究*

胡亚元

(浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310058)

摘要: 为了建立能考虑固体材料、多孔固体与流体可逆和不可逆变形的饱和多孔介质超粘弹性理论,以多孔固相为参考构型,以有效应力、材料真实应力和流相真实孔压作为状态变量,结合混合物均匀化响应原理获得各项均符合热力学功共轭特征的饱和多孔介质能量平衡方程,根据非平衡热力学熵分解理论求得熵流和熵产.结果表明,超弹塑性理论是该理论的一个特例;多孔固体的总变形可分为固相间隙和材料变形两部分,间隙应变与 Terzaghi 有效应力构成功共轭对,材料应变与材料真实应力构成功共轭对.饱和多孔介质的自由能可分为固相和流相两部分.当固相间隙和材料变形解耦时,固相所含的自由能又可分为间隙和材料两部分.证明了 Skempton 有效应力不是饱和多孔介质的基本应力状态变量.

关键词: 饱和多孔介质; 应力分析; 应变分析; 能量方程; 熵产; 本构理论

中图分类号: TU43 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.004

符 号 说 明

$\mathbf{1}$	二阶单位张量	b_α	第 α 组分的外体力密度
$\alpha = \{S, F\}$	组分指征变量	D_S	多孔固体的总应变张量变化率
D_N	与多孔固体间隙有关的应变张量变化率	Δ	耗散率函数
Δ^*, f	功共轭的耗散率势函数	E_S	多孔固体的 Green 应变
E_N	与多孔固体间隙有关的 Green 应变	$\hat{\varepsilon}_\alpha$	第 α 组分的能量供给量
\mathcal{E}_α	第 α 组分的内能密度	η	混合物的熵密度
\mathcal{E}_{SN}	与多孔固体间隙变化有关的内能密度	\mathcal{E}_{S1}	与固相材料(基质)变形有关的内能密度
η_α	第 α 组分的熵密度	η^r	混合物的熵流
η^i	混合物的熵产	ϑ_S	固相材料(基质)体积应变
ϑ_F	流相自身体积应变	K_b	多孔固相的体积模量
K_S	固相材料的体积模量	n	孔隙率
n_α	第 α 组分的体积分数	P_T	总应力张量的球应力

* 收稿日期: 2015-12-18; 修订日期: 2016-02-23

基金项目: 国家自然科学基金(51178419)

作者简介: 胡亚元(1968—),男,副教授,博士(E-mail: huyayuan@zju.edu.cn).

P_S	材料真实应力张量的球应力	P_F	流相的孔隙压力
\hat{p}_α	第 α 组分的动量供给量	q_α	第 α 组分上的热流向量
θ	饱和多孔介质混合物的温度	r_α	第 α 组分上的外热供给量
ρ	饱和多孔介质混合物的总密度	\tilde{T}_S	Piola-Kirchhoff 有效应力
ρ^α	混合物特征单元体内第 α 组分的真实密度	ρ_α	混合物特征单元体内第 α 组分的平均密度
σ	总应力张量	$\tilde{\sigma}$	有效应力张量
W_F	流相相对固相的扩散速度	X_α	第 α 组分上的初始位置坐标
x_α	第 α 组分上的现时位置坐标	u_α	第 α 组分相对混合物质心的扩散速度
$E_N^p, \vartheta_S^p, \vartheta_F^p$	内应变变量		
$\tilde{T}_S^p, P_S^p, P_F^p$	内应力变量		

引 言

多孔介质包括土、岩石、混凝土和动物骨头等材料,当固体中的孔隙被一种流体充满时称为饱和多孔介质。当多孔介质材料变形与骨架变形相比可以忽略不计,如土体,其本构关系可以采用 Terzaghi 有效应力原理来建立,目前已经发展得较为完善。当固体材料变形与多孔固体变形相比不可忽略时(如岩体和混凝土等),Biot 提出 Biot 参数对 Terzaghi 有效应力进行修正,并借鉴超弹性力学理论建立了饱和多孔介质的一般弹性理论^[1]。Geertsma 建立了饱和多孔介质弹性本构模型参数与单相介质模型参数之间的关系^[2],给出了 Biot 参数计算公式,该公式与后来 Skempton 获得的 Biot 参数公式相同。Skempton 研究了岩体和混凝土等多孔介质材料(基质)和骨架(基体)的压缩模量,提出了著名的 Skempton 有效应力公式^[3]。李传亮等^[4]根据物理直觉和多孔介质内部受力机理提出采用本征有效应力和结构有效应力双有效应力概念来建立饱和多孔介质的本构特性。与此同时,一些理性力学专家从力学公理和热力学定律出发,研究了多孔介质的一般本构理论框架。Fillunger^[5]和 Heinrich 等^[6]从 Euler(欧拉)描述出发,首先建立了饱和多孔介质混合物理论^[5]。Bowen 建立了结构严谨逻辑统一的混合物理论^[7]。陈正汉根据混合物理论,融理性力学、不可逆热力学和土力学精华于一身^[8],从 5 个基本定律和 8 个本构原理出发建立岩土的公理化体系。上述这些混合物理论未考虑各组分体积分数之和必须为 1 的约束条件,致使模型参数选择时难以满足这一要求。Morland 首先把各组分的体积分数引入混合物理论,发现建立由 n 种组分组成的混合物完备本构模型(包含相和组分)仅依靠力学公理和热力学定律将缺少 $n-1$ 个本构方程^[9]。de Boer^[10]和 Coussy 等^[11]采用各自的办法试图增补这 $n-1$ 个本构方程,但目前这一问题没有得到合理解决。黄义和张引科^[12]通过 Lagrange 优化方法在热力学熵不等式中引入体积分约束,在假定固液两相不可压缩的条件下,建立了非饱和多孔介质基于热力学过程的完备本构方程,但理论中的 Lagrange 因子的物理含义有待于进一步研究。

de Boer^[10]回顾了多孔介质力学理论研究历史,认为在历史中存在两种明显不同的多孔介质理论体系。一种是 Terzaghi 和 Biot 等开创的“纯宏观”多孔介质理论;另一种为 Fillunger 等开创的混合物理论。Coussy 等(1998)也持有类似的观点^[11]。“纯宏观”多孔介质理论充分考虑了多孔介质力学试验实施的简便性和可操作性。它一般用物质坐标系描述各组分变形,以孔隙中流体的真实压力和有效应力为应力状态变量,以多孔固体为参考构架,以室内和现场试验成果为基础建立多场耦合理论体系。该理论实用性强,易于被工程人员理解,被广泛应用于水利、岩土等工程。混合物理论从连续统力学出发,用 Euler 坐标系描述各组分变形,以平均压力为状态

变量,以混物质心为参考构架,基于力学公理和热力学基本定理建立多场耦合理论体系.该理论概念统一、逻辑一致、适用范围广,受到理性力学界专家的青睐.然而,纯混物质理论也存在缺陷:1)以混物质心作为参考构型,这一要求在实验室中难以实现;2)选用的应力状态变量与土力学和水力学中的有很大不同;3)早期的混物质理论中没有考虑各组分体积分数之和为1这一约束条件,难以阐述在饱和土力学中广泛接受的 Terzaghi 有效应力公式.这些缺陷造成混物质理论在工程界中不易推广,限制了其在工程中的应用.

为了发挥“纯宏观”多孔介质理论和混物质理论各自的优点,避免各自不足,最近几十年来,在岩土工程领域逐渐形成了能同时兼顾理论严密和工程实用需要的混物质理论,业内称为工程混物质理论.与传统混物质理论相比,工程混物质理论以有效应力和真实孔压为状态应力变量,以多孔固体为参考构型,这便于工程师设计试验方案和测定模型参数.同时,该理论采用 Euler 坐标系描述组分变形,从力学公理和热力学定律出发建立多孔介质场方程和本构方程,具有结构严谨和理论严密的优点.Houlsby 首先从这一理念出发,获得饱和(两相)土和非饱和(三相)土的机械功公式^[13-14].Li 根据非饱和土的机械功公式和热力学第二定律,在忽略多孔介质固相材料变形的条件下,建立了能够考虑固、液和气三相不可逆变形的非饱和土统一本构关系^[15].Borja 在考虑固相材料弹性变形的条件下,获得了采用类似 Skempton 有效应力公式表达的非饱和(三相)多孔介质能量平衡公式^[16](本文所述的非饱和多孔介质均指固液气三相组成的多孔介质,下同).Zhao(赵成刚)等从经典混物质理论出发获得非饱和多孔介质的机械功公式^[17],在不考虑固相材料变形条件下强调气相压力同样会影响多孔固相的变形.与研究非饱和多孔介质本构理论的蓬勃发展相比,从工程混物质理论视角研究饱和多孔介质的一般本构理论的文献比较少见.以 Terzaghi 有效应力原理为基础获得的饱和多孔介质本构理论未考虑固相材料变形的影响,而 Skempton 有效应力公式^[3]虽然能够考虑多孔固体的材料变形,但只适用于固相材料和多孔固体均发生线弹性变形时才成立.当固相材料和多孔固体发生不可逆和非线性变形时,目前的饱和多孔介质理论还未深入研究.因此,仍有必要对饱和多孔介质的一般本构关系进行理论分析^[18-19].

本文采用 Euler 坐标系描述各相组分变形,建立饱和多孔介质的质量和动量平衡方程.以多孔固相为参考构型,结合混合物均匀化响应原理获得饱和多孔介质的能量平衡方程,该能量平衡方程中的各项均符合功共轭特征,能够结合局部平衡假定获得饱和多孔介质的自由能势函数本构关系.由于在能量平衡方程中与自由能相关的功共轭项有3个,根据自由能势函数可以确定3个本构方程,和所有组分体积分数之和为1这一条件一起,构成两个组分混物质理论.由于考虑组分体积分数所需要确定的4个本构方程^[9].在此基础上,根据不可逆热力学中的熵分解理论获得饱和多孔介质的熵流和熵产;再根据熵产的功共轭特性引入耗散率势函数,建立饱和多孔介质的耗散率流势函数本构关系.与以往的饱和多孔介质一般本构理论相比,本文本构理论能够考虑多孔介质和各组分材料的可逆和不可逆变形,包含了多孔介质和各组分材料的粘弹性和弹塑性特性.研究表明,当多孔介质固体的材料变形不可忽略时, Terzaghi 有效应力与间隙变形构成功共轭对,材料真实应力与固体材料变形构成功共轭对,故多孔固体总变形不但与 Terzaghi 有效应力有关,而且与材料真实应力也有关. Skempton 有效应力公式由于已包含了固相材料和多孔固相的本构力学参数,因此不能作为饱和多孔介质能量方程的基本应力状态变量.饱和多孔介质的能量方程表明,需要采用 Terzaghi 应力和材料真实应力这一双应力状态变量才能完全描述饱和多孔介质的变形和强度等力学特性.

1 饱和多孔介质混合物的组分体积分数

饱和多孔介质是由固流两相组成的混合物.固相由 S 表示,流相由 F 表示.假定固流两相

之间不存在化学反应等质量交换作用.令 $\alpha = \{S, F\}$ 为组分指征变量, n_α 为第 α 组分的体积分数, 其定义为特征单元体中第 α 组分所占有的体积与混合物总体积之比. ρ_α 为第 α 组分的密度, ρ^α 为第 α 组分的真实密度, $\rho_\alpha = n_\alpha \rho^\alpha$, 饱和多孔介质混合物的总密度为 $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$. 根据体积分数的定义, 有

$$n_S + n_F = 1. \quad (1)$$

2 质量守恒

假定饱和多孔介质中的固流两相共同连续地占有混合物所在的空间位置. 设第 α 组分的初始位移为 X_α , 当前 t 时刻的空间坐标为 \mathbf{x} , 则每一组分的运动方程可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha(X_\alpha, t) \quad \text{or} \quad X_\alpha = X_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

设 $\tilde{\mathbf{x}}_\alpha$ 为第 α 组分的速率, 则饱和多孔介质混合物的平均速率可定义为

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} (\rho_S \tilde{\mathbf{x}}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{x}}_F). \quad (3)$$

依据经典混合物理论定义的扩散速率为

$$\mathbf{u}_\alpha = \tilde{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}. \quad (4)$$

对于定义在 \mathbf{x} 和 t 上的标量或矢量场 Γ_α (或 Γ^α), 基于 α 组分的物质导数的定义为^[7]

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\alpha \quad \text{or} \quad \tilde{\Gamma}^\alpha = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\alpha. \quad (5)$$

基于混合物平均速率的 Γ_α (或 Γ^α) 的物质导数定义为

$$\dot{\Gamma}_\alpha = \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad \text{or} \quad \dot{\Gamma}^\alpha = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (6)$$

基于多孔固相组分速率的 Γ_α (或 Γ^α) 的物质导数定义为

$$\Gamma'_\alpha = \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}}_S \quad \text{or} \quad (\Gamma^\alpha)' = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial t} + \text{grad } \Gamma^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}}_S. \quad (7)$$

由于假定固流两相不存在质量交换, 故固流两相的质量守恒方程为^[7]

$$\tilde{\rho}_S + \rho_S \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_S = 0, \quad (8a)$$

$$\tilde{\rho}_F + \rho_F \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_F = 0. \quad (8b)$$

利用式(3)、(8a)和(8b)可得

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (9)$$

若 Γ_α 是定义在 α 组分的标量或矢量场, 则基于 Γ_α 的平均场 Γ 的定义为

$$\Gamma = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho_\alpha \Gamma_\alpha. \quad (10)$$

根据式(3)、(5)、(6)、(9)和(10)可得^[7]

$$\rho \dot{\Gamma} = \sum_\alpha [\rho_\alpha \tilde{\Gamma}_\alpha - \text{div}(\rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{u}_\alpha)]. \quad (11)$$

由于工程混合物理论把多孔固相作为本构关系的参考构型, 流相相对固相的扩散速率为 $\mathbf{W}_F = \tilde{\mathbf{x}}_F - \tilde{\mathbf{x}}_S$. 把 \mathbf{W}_F 、式(5)、(6)、(7)和 $\rho_\alpha = n_\alpha \rho^\alpha$ 代入到式(8a)、(8b)得

$$\frac{n_S}{\rho^S} \tilde{\rho}^S + (n_S)' + n_S \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_S = 0, \quad (12a)$$

$$\frac{n_F}{\rho^F} (\rho^F)' + (n_F)' + n_F \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_S + n_F \text{div } \mathbf{W}_F + \frac{1}{\rho^F} \mathbf{W}_F \cdot \text{grad}(n_F \rho^F) =$$

$$\frac{n_F}{\rho} \check{\rho}^F + (n_F)' + n_F \operatorname{div} \check{\mathbf{x}}_S + n_F \operatorname{div} \mathbf{W}_F + \mathbf{W}_F \cdot \operatorname{grad} n_F = 0. \quad (12b)$$

3 动量和动量矩平衡

令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为饱和多孔介质混合物的总 Cauchy (柯西) 应力张量, $\boldsymbol{\sigma}_\alpha (\alpha = \{S, F\})$ 为第 α 组分的 Cauchy 应力张量, 根据混合物理论有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_S + \boldsymbol{\sigma}_F. \quad (13)$$

设 $\hat{\boldsymbol{p}}_\alpha$ 为动量供给量, \mathbf{b}_α 为外力力密度, 则固流两相的动量守恒方程为

$$\rho_S \check{\mathbf{x}}_S = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_S + \rho_S \mathbf{b}_S + \hat{\boldsymbol{p}}_S, \quad (14a)$$

$$\rho_F \check{\mathbf{x}}_F = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_F + \rho_F \mathbf{b}_F + \hat{\boldsymbol{p}}_F. \quad (14b)$$

利用式 (14a)、(14b) 和当 $\Gamma_\alpha = \check{\mathbf{x}}_\alpha$ 时的式 (11) 得

$$\begin{aligned} \rho \check{\mathbf{x}} &= \sum_\alpha \rho_\alpha \check{\mathbf{x}}_\alpha - \sum_\alpha \operatorname{div} (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) = \\ &= \sum_\alpha [\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) + \rho_\alpha \mathbf{b}_\alpha] + \sum_\alpha \hat{\boldsymbol{p}}_\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

由于混合物的总动量与动量供应量 $\hat{\boldsymbol{p}}_\alpha$ 无关, 由式 (15) 得

$$\sum_\alpha \hat{\boldsymbol{p}}_\alpha = \hat{\boldsymbol{p}}_S + \hat{\boldsymbol{p}}_F = \mathbf{0}. \quad (16)$$

假定第 α 组分的动量矩供应量向量为 $\mathbf{0}$, 根据第 α 组分动量矩平衡可得 $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ 是对称矩阵.

4 能量平衡方程

令 \mathbf{q}_α , r_α 和 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha$ 分别为第 α 组分的热流向量、外热供给量和能量供给量, \mathcal{E}_α 为第 α 组分的内能密度, 则固流两相的能量方程可表示为^[7]

$$\rho_S \check{\mathcal{E}}_S = \boldsymbol{\sigma}_S : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_S - \operatorname{div} \mathbf{q}_S + \rho_S r_S + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S, \quad (17a)$$

$$\rho_F \check{\mathcal{E}}_F = \boldsymbol{\sigma}_F : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_F - \operatorname{div} \mathbf{q}_F + \rho_F r_F + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F. \quad (17b)$$

根据附录 A, 式 (17a)、(17b) 中的 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha (\alpha = \{S, F\})$ 满足^[7]

$$\sum_\alpha (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_\alpha) = 0. \quad (18)$$

流相 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_F$ 和真实孔压 P_F 之间满足 $\boldsymbol{\sigma}_F = -n_F P_F \mathbf{1}$. 利用 $\boldsymbol{\sigma}_F, \mathbf{W}_F$ 和式 (13) 可得

$$\sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_\alpha = \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_S - n_F P_F \operatorname{div} \mathbf{W}_F. \quad (19)$$

把式 (12b) 代入到式 (19) 得

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_\alpha &= \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_S + (n_F)' P_F + n_F P_F \operatorname{div} \check{\mathbf{x}}_S + \\ &= P_F \frac{n_F}{\rho} \check{\rho}^F + P_F \mathbf{W}_F \cdot \operatorname{grad} n_F. \end{aligned} \quad (20)$$

把式 (1)、(12a) 代入到式 (20), 并根据 Terzaghi 应力的定义 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + P_F \mathbf{1}$ 得

$$\sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_S + P_F \frac{n_S}{\rho} \check{\rho}^S + P_F \frac{n_F}{\rho} \check{\rho}^F + P_F \mathbf{W}_F \cdot \operatorname{grad} n_F. \quad (21)$$

把式 (17a) 和 (17b) 相加并利用式 (16)、(18) 和 (21) 得

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \rho_\alpha \check{\mathcal{E}}_\alpha &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad} \check{\mathbf{x}}_S + P_F \frac{n_S}{\rho} \check{\rho}^S + n_F P_F \frac{\check{\rho}^F}{\rho} + \\ &= \sum_\alpha (-\operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha + \rho_\alpha r_\alpha) + \mathbf{W}_F \cdot (P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\boldsymbol{p}}_F). \end{aligned} \quad (22)$$

如图 1 所示,饱和多孔介质承受外荷载时,若饱和单元体中每一点处的真实应变增量(或速率)相等,此时两相混合单元体等效于单相均匀单元体,故饱和单元体中每一点处的真实应力增量(或加荷速率)也应相等,反之亦然.这一特性不但适用于两相组成的饱和多孔介质,也适用于由 n 相组成的多孔介质,由于在多孔介质混合物理论中需要经常使用这一性质,本文把它称为约束混合物整体变形协调所需满足的均匀化响应原理.把上述均匀化响应原理应用于饱和多孔介质的固相组分,Skempton 获得了当固体材料和多孔固体均发生线性变形时饱和多孔介质的 Skempton 有效应力公式^[3];把上述均匀化响应原理应用于非饱和(三相)多孔介质的固相组分,陈正汉获得了当固体材料和多孔固体均发生线性变形时的非饱和多孔介质陈正汉有效应力公式^[8]; Geertsma 把上述均匀化响应原理应用于线弹性饱和多孔介质的固流两相组分,建立了能够考虑固相材料变形的饱和多孔介质弹性本构关系^[2],该本构关系广泛地应用于饱和多孔介质弹性动力响应分析,得到全世界的认同^[20-23].本文认为,这一原理揭示了多相混合体可以等同于单相均匀体的应力应变条件,是实际混合物各组分复杂相互作用的一种理想化近似.符合均匀化响应原理的混合物应当具有某种较简单的受力变形特性,因此令 $\dot{\vartheta}_s = \dot{\rho}^s / \rho^s$,其物理含义为固相材料的体应变, $P_T = -\sigma : \mathbf{1}/3$ 和 $\tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma} : \mathbf{1}/3$; 并利用混合物均匀化响应原理来建立式(22)的功共轭形式.

在分析之前,需注意到 $\sigma, \tilde{\sigma}$ 和 x 以拉为正而 P_T 和 $\dot{\vartheta}_s$ 以压为正.由于流体只能产生孔压和体应变,因此,混合物的“均匀化响应原理”所指的应力是球应力,应变是体应变.根据“均匀化响应原理”,当固相、流相和外荷载的加荷速率相等时,多孔介质中任意一点的真实应变速率也相等.由 $\tilde{\sigma} = \sigma + P_F \mathbf{1}$ 可知,当 $\dot{P}_T = \dot{P}_F$ 时,即流相和外荷载加荷速率相等时, $\dot{\tilde{\sigma}}_m = 0$.同时,由于 $\dot{P}_T = \dot{P}_F$,单元体内每一点的受荷速率是均匀的,作用在固体材料(基质)上的应力也是 \dot{P}_T .由于固体材料的体变形不可忽略,故将发生速率为 $\dot{\vartheta}_s$ 的变形.根据“均匀化响应原理”,此时固相多孔介质中任意一点的真实体应变速率也相等,表现在图 1 上,要求多孔介质材料部分的体应变速率等于孔隙部分的应变速率,故整个单元体也发生了速率为 $\dot{\vartheta}_s$ 的变形;反映在式(22)中,当 $\dot{\tilde{\sigma}}_m = 0$ 时 $\text{grad } \dot{x}_s : \mathbf{1} = -\dot{\vartheta}_s \neq 0$.这说明当固相材料(基质)变形不可忽略时,若把 $\text{grad } \dot{x}_s : \mathbf{1}$ 取为 $\tilde{\sigma}_m$ 的功共轭对,根据功互等定理则 $\dot{\vartheta}_s$ 必然与 $\text{grad } \dot{x}_s : \mathbf{1}$ 存在耦合作用,相应地,以它们为状态变量的混合物自由能就比较复杂.由此可以推论,当把有效球应力为 $\tilde{\sigma}_m$ 的 $\tilde{\sigma}$ 作为 $\text{grad } \dot{x}_s$ 的功共轭对时,相应的混合物自由能则更复杂,较不利于饱和多孔介质本构关系的建立.鉴于此,本文希望在选择热力学“功共轭对”时,对于一些特殊情况(如满足混合物均匀化响应原理等),能够满足当应力 $\tilde{\sigma} = 0$ 时其对偶的应变速率恒为 0 这一关系式(这意味着与 $\tilde{\sigma}$ 对偶的应变只取决于 $\tilde{\sigma}$ 而与其它状态变量解耦,因为只有在此情况下 $\tilde{\sigma} = 0$ 时其对偶的应变速率恒为 0 这一关系式才成立).为了实现上述条件,需要把 $\text{grad } \dot{x}_s + (1/3) \dot{\vartheta}_s \mathbf{1}$ 作为 $\tilde{\sigma}$ 功共轭的对偶项,为此令

$$P_s = \frac{P_T - n_F P_F}{n_s}. \quad (23)$$

根据图 1 中的表达式和式(23)可知, P_s 是作用到固体材料(基质)上的真实压强,本文把它称为固体材料真实球应力, $n_s P_s$ 称为固体材料的平均球应力.

根据 $P_T, \tilde{\sigma}_m, P_s, \dot{\vartheta}_s$ 和式(1)可得

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \text{grad } \dot{x}_s + P_F \frac{n_s}{\rho^s} \dot{\rho}^s = \\ \tilde{\sigma} : \left(\text{grad } \dot{x}_s + \frac{1}{3} \dot{\vartheta}_s \mathbf{1} \right) - \tilde{\sigma} : \frac{1}{3} \dot{\vartheta}_s \mathbf{1} + n_s P_F \dot{\vartheta}_s = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &: \left(\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s + \frac{1}{3} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{1} \right) + (n_s P_F - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m) \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &: \left(\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s + \frac{1}{3} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{1} \right) + n_s \frac{P_T - n_F P_F}{n_s} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &: \left(\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s + \frac{1}{3} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{1} \right) + n_s P_S \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s.
 \end{aligned} \tag{24}$$

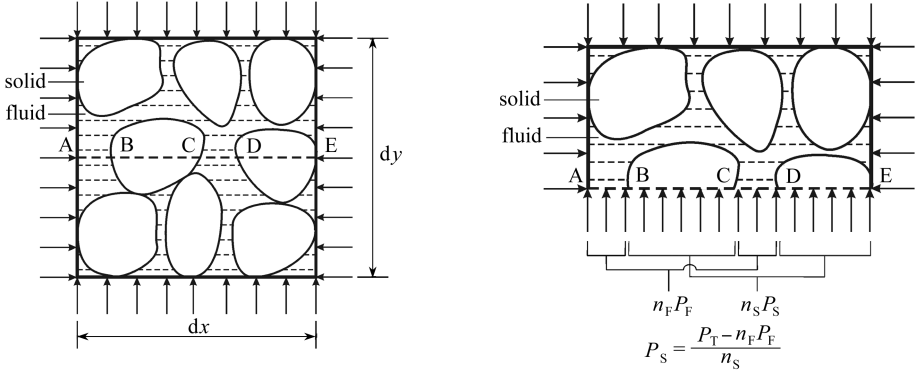


图 1 饱和多孔介质的特征单元体示意图

Fig. 1 The schematic diagram for the representative volume elements of saturated porous media

令 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F = \tilde{\rho}^F / \rho^F$, 把式(24)代入到式(22)得

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\alpha} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s + \frac{1}{3} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{1} \right) + n_s P_S \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s + n_F P_F \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F + \\
 &\sum_{\alpha} (-\text{div } \boldsymbol{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \boldsymbol{W}_F \cdot (P_F \text{grad } n_F - \hat{\boldsymbol{p}}_F).
 \end{aligned} \tag{25}$$

令

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{F}_S &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}_S}, J_S = \det \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}_S} \right], \boldsymbol{E}_S = \frac{1}{2} (\boldsymbol{F}_S^T \cdot \boldsymbol{F}_S - \mathbf{I}), \\
 \tilde{\boldsymbol{T}}_S &= \boldsymbol{F}_S^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{F}_S^{-T}, \tilde{\boldsymbol{E}}_N = \tilde{\boldsymbol{E}}_S + \boldsymbol{F}_S^T \cdot \boldsymbol{F}_S \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s / 3,
 \end{aligned}$$

由式(25)可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\alpha} &= (\tilde{\boldsymbol{T}}_S : \tilde{\boldsymbol{E}}_N + n_s P_S \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s) + n_F P_F \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F + \\
 &\sum_{\alpha} (-\text{div } \boldsymbol{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \boldsymbol{W}_F \cdot (P_F \text{grad } n_F - \hat{\boldsymbol{p}}_F).
 \end{aligned} \tag{26}$$

令

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{1}{2} [\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s + (\text{grad } \tilde{\boldsymbol{x}}_s)^T], \boldsymbol{D}_N = \boldsymbol{D}_S + \frac{1}{3} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{1},$$

则有

$$\boldsymbol{D}_S - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{D}_S \mathbf{1} = \boldsymbol{D}_N - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{D}_N \mathbf{1}, \tag{27a}$$

$$\text{tr } \boldsymbol{D}_N = \text{tr } \boldsymbol{D}_S + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = \text{div}(\tilde{\boldsymbol{x}}_s) + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = -\frac{\tilde{\rho}^S}{\rho^S} - \frac{\tilde{n}_s}{n_s} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = -\frac{\tilde{n}_s}{n_s}. \tag{27b}$$

在式(27b)的推导过程中引用了式(12a)和 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_s = \tilde{\rho}^S / \rho^S$, 该式表明 \boldsymbol{D}_N 的球应变速率与孔隙改变直接相关, 故本文把它称为间隙变形速率. 把式(27a)、(27b)代入式(25)得

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}_N + n_S P_S \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_S + n_F P_F \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F + \\
&\sum_{\alpha} (-\operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \mathbf{W}_F \cdot (P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\mathbf{p}}_F) = \\
\rho_S &\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho_S} : \mathbf{D}_N + \frac{P_S}{\rho_S} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_S \right) + \rho_F \frac{P_F}{\rho_F} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F + \\
&\sum_{\alpha} (-\operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \mathbf{W}_F \cdot (P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\mathbf{p}}_F). \tag{28}
\end{aligned}$$

式(27a)、(27b)和式(28)表明多孔固体总变形速率 \mathbf{D}_S 可分为两部分:固相材料的球应变速率和间隙变形速率.后者是多孔固体总变形速率和固相材料球应变速率之差,它的球应变部分与孔隙率变化率与总孔隙率之比直接相关.通过与非平衡态热力学^[7] 比对可知,间隙变形速率与 Terzaghi 应力形成热力学功共轭对;因为固相材料对应的是固相真实密度,故固相的材料体应变速率与材料真实球应力形成热力学功共轭对.因此,当考虑固相的材料受力变形时,饱和多孔介质的变形特性不但与 Terzaghi 有效应力有关,而且与固体的材料真实球应力也有关.故饱和多孔介质的变形和强度特性一般需要 Terzaghi 有效应力和固体材料真实球应力双应力才能得到合理的反映.

5 熵流和熵产

在非平衡态热力学中^[24],熵不等式通常在能量平衡方程和自由能势函数方程基础上根据熵分解理论获得^[24],本文也采用这一方法来获得饱和多孔介质的熵流和熵产,热力学第二定理要求熵产大于或等于0.令饱和多孔介质的固液两相具有相同的温度 θ , η_{α} 为第 α 组分的熵密度.注意到式(26)中与流相有关的共轭量是其压强和体应变,而在绝大多数饱和多孔介质中,孔隙中流体材料的本构关系与其单独存在时的本构关系一致^[1-4,8,17,20-23].利用这一简化假定,把式(26)中固相和流相的自由能 (\mathcal{E}_S 和 \mathcal{E}_F) 表示为 $\mathcal{E}_S(\eta_S, \mathbf{E}_N, \boldsymbol{\vartheta}_S, \mathbf{E}_N^p, \boldsymbol{\vartheta}_S^p)$ 和 $\mathcal{E}_F(\eta_F, \boldsymbol{\vartheta}_F, \boldsymbol{\vartheta}_F^p)$, 式中的 $\mathbf{E}_N^p, \boldsymbol{\vartheta}_S^p$ 和 $\boldsymbol{\vartheta}_F^p$ 分别为多孔固相、固相材料和流相的内应变变量,它们一般可结合材料的力学元件组合结构来解释,由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha} &= \rho_S \left(\frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \eta_S} \tilde{\eta}_S + \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \mathbf{E}_N} \tilde{\mathbf{E}}_N + \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_S} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_S + \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \mathbf{E}_N^p} \tilde{\mathbf{E}}_N^p + \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_S^p} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_S^p \right) + \\
&\rho_F \left(\frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \eta_F} \tilde{\eta}_F + \frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_F} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F + \frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_F^p} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_F^p \right). \tag{29}
\end{aligned}$$

根据热力学局部平衡原理,有

$$\theta = \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \eta_S} = \frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \eta_F}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_S = \rho_S \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \mathbf{E}_N}, \quad P_S = \rho^S \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_S}, \quad P_F = \rho^F \frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_F}, \tag{30a}$$

令

$$\tilde{\mathbf{T}}_S^p = -\rho_S \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \mathbf{E}_N^p}, \quad P_S^p = -\rho_S \frac{\partial \mathcal{E}_S}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_S^p}, \quad P_F^p = -\rho_F \frac{\partial \mathcal{E}_F}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_F^p}, \tag{30b}$$

$\tilde{\mathbf{T}}_S^p, P_S^p$ 和 P_F^p 是内应力.把式(26)代入到式(29)并利用式(30a)、(30b)得

$$\begin{aligned}
\theta \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \tilde{\eta}_{\alpha} &= \mathbf{T}_S^p : \tilde{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_{\alpha}^p + \\
&\sum_{\alpha} (-\operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \mathbf{W}_F \cdot (P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\mathbf{p}}_F), \tag{31}
\end{aligned}$$

利用 $\Gamma_{\alpha} = \eta_{\alpha}$ 时的式(11)由式(31)得

$$\begin{aligned} \theta \rho \dot{\eta} = & \mathbf{T}_S^p \dot{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \dot{\vartheta}_{\alpha}^p + \sum_{\alpha} (-\operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} r_{\alpha}) + \\ & \mathbf{W}_F \cdot (P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\mathbf{p}}_F) - \theta \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\rho_{\alpha} \eta_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}). \end{aligned} \quad (32)$$

令

$$\boldsymbol{\vartheta}_{\theta}^p = \theta \operatorname{grad}(1/\theta), \quad \mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha}, \quad \hat{\mathbf{F}}_F^p = P_F \operatorname{grad} n_F - \hat{\mathbf{p}}_F, \quad (33)$$

利用式(33)由式(32)得

$$\begin{aligned} \rho \dot{\eta} = & \frac{1}{\theta} (\mathbf{T}_S^p \dot{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \dot{\vartheta}_{\alpha}^p + \mathbf{W}_F \cdot \hat{\mathbf{F}}_F^p) + \\ & \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\theta}^p - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \eta_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha} r_{\alpha}}{\theta}. \end{aligned} \quad (34)$$

利用式(6)和式(9)可得^[24]

$$\frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} = \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \dot{\eta} - \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \operatorname{grad} \eta - \eta \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{x}}) = \rho \dot{\eta} - \operatorname{div}(\rho \eta \dot{\mathbf{x}}). \quad (35)$$

借鉴文献[24]中有关非平衡态热力学的推导,把式(34)代入式(35)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} = & - \operatorname{div} \left(\underbrace{\rho \eta \dot{\mathbf{x}} + \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{q}_{\alpha} + \theta \eta_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\theta}}_{\text{熵流}} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha} r_{\alpha}}{\theta} + \\ & \underbrace{\frac{1}{\theta} (\tilde{\mathbf{T}}_S^p \dot{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \dot{\vartheta}_{\alpha}^p)}_{\text{熵产}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{W}_F \cdot \hat{\mathbf{F}}_F^p + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\theta}^p. \end{aligned} \quad (36)$$

根据式(36)和非平衡态热力学的熵分解理论^[24],熵流项为

$$\boldsymbol{\eta}^r = - \operatorname{div} \left(\rho \eta \dot{\mathbf{x}} + \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{q}_{\alpha} + \theta \eta_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\theta} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha} r_{\alpha}}{\theta}, \quad (37)$$

熵产项为

$$\boldsymbol{\eta}^i = \frac{1}{\theta} (\tilde{\mathbf{T}}_S^p \dot{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \dot{\vartheta}_{\alpha}^p) + \frac{1}{\theta} \mathbf{W}_F \cdot \hat{\mathbf{F}}_F^p + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\theta}^p \geq 0, \quad (38)$$

在式(38)的右边,第一项是非弹性变形的熵产,第二项是机械扩散引起的熵产,第三项是热流引起的熵产.根据式(38)和热力学第二定律可得耗散率函数为

$$\mathcal{D} = \theta \boldsymbol{\eta}^i = (\tilde{\mathbf{T}}_S^p \dot{\mathbf{E}}_N^p + \sum_{\alpha} P_{\alpha}^p \dot{\vartheta}_{\alpha}^p) + \mathbf{W}_F \cdot \hat{\mathbf{F}}_F^p + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\theta}^p \geq 0. \quad (39)$$

6 饱和多孔介质的超粘弹性本构关系理论框架

Ziegler^[25]与Collins和Houlsby^[26]认为材料的本构关系可以完全取决于两个热力学势函数:自由能势函数和耗散率势函数.与式(30a)、(30b)有关的自由能势函数可用泛函表示为

$$\min_{\xi \in \xi_S^e} \left[\mathcal{E}_S - \frac{1}{\rho_S} (\theta \eta_S + \tilde{\mathbf{T}}_S^p \mathbf{E}_N + n_S P_S \vartheta_S + \tilde{\mathbf{T}}_S^p \mathbf{E}_N^p + P_S^p \vartheta_S^p) \right], \quad (40a)$$

式中

$$\xi_S^e = (\eta_S, \mathbf{E}_N, \vartheta_S, \mathbf{E}_N^p, \vartheta_S^p); \quad (40b)$$

和

$$\min_{\xi \in \xi_F^e} \left[\mathcal{E}_F - \frac{1}{\rho_F} (\theta \eta_F + n_F P_F \vartheta_F + P_F^p \vartheta_F^p) \right], \quad (41a)$$

式中

$$\xi_F^e = (\eta_F, \vartheta_F, \vartheta_F^p). \quad (41b)$$

根据式(39),假定存在耗散率流势函数 $\varpi^* = \varpi^*(\tilde{\mathbf{E}}_N^p, \tilde{\vartheta}_S^p, \tilde{\vartheta}_F^p, \mathbf{W}_F, \mathbf{q})$, 它满足

$$\tilde{\mathbf{T}}_S^p = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_N^p}, P_S^p = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\vartheta}_S^p}, P_F^p = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\vartheta}_F^p}, \hat{\mathbf{F}}_F^p = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \mathbf{W}_F}, \boldsymbol{\vartheta}_\theta^p = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \mathbf{q}}. \quad (42)$$

式(42)可采用泛函表示为

$$\max_{\xi \in \xi^p} (\varpi^* - \tilde{\mathbf{T}}_S^p \tilde{\mathbf{E}}_N^p - P_S^p \tilde{\vartheta}_S^p - P_F^p \tilde{\vartheta}_F^p - \hat{\mathbf{F}}_F^p \cdot \mathbf{W}_F - \boldsymbol{\vartheta}_\theta^p \cdot \mathbf{q}), \quad (43a)$$

式中

$$\xi^p = (\tilde{\mathbf{E}}_N^p, \tilde{\vartheta}_S^p, \tilde{\vartheta}_F^p, \mathbf{W}_F, \mathbf{q}). \quad (43b)$$

由于 $(\tilde{\mathbf{E}}_N^p, \tilde{\vartheta}_S^p, \tilde{\vartheta}_F^p, \mathbf{W}_F, \mathbf{q})$ 均是与速率有关的物理量,故根据式(42)(或式(43a))确定的本构关系是粘性本构关系,与式(40a)~(41a)一起构成粘弹性本构方程.若 $\varpi^* = D^*(\tilde{\mathbf{E}}_N^p, \tilde{\vartheta}_S^p, \tilde{\vartheta}_F^p, \mathbf{W}_F, \mathbf{q})$ 是关于 $(\tilde{\mathbf{E}}_N^p, \tilde{\vartheta}_S^p, \tilde{\vartheta}_F^p, \mathbf{W}_F, \mathbf{q})$ 的 n 阶齐次 Euler 函数,则有

$$n\varpi^* = \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_N^p} \tilde{\mathbf{E}}_N^p + \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\vartheta}_S^p} \tilde{\vartheta}_S^p + \frac{\partial \varpi^*}{\partial \tilde{\vartheta}_F^p} \tilde{\vartheta}_F^p + \frac{\partial \varpi^*}{\partial \mathbf{W}_F} \mathbf{W}_F + \frac{\partial \varpi^*}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} = (\tilde{\mathbf{T}}_S^p \tilde{\mathbf{E}}_N^p + P_S^p \tilde{\vartheta}_S^p + P_F^p \tilde{\vartheta}_F^p) + \mathbf{W}_F \cdot \hat{\mathbf{F}}_F^p + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_\theta^p = \varpi^* \geq 0. \quad (44)$$

若 ϖ^* 可分为 M 个独立耗散机制,即 $\varpi^* = \sum_{k=1}^M \varpi_k^*$, $\varpi_k^* \geq 0$ 为第 k 个耗散率流势函数, $\mathbf{E}_{Nk}^p, \vartheta_{Sk}^p, \vartheta_{Fk}^p, \mathbf{W}_{Fk}$ 和 \mathbf{q}_k 是与第 k 个耗散机制有关的广义热力学流.如果 $\varpi_k^* = \varpi_k^*(\tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p, \tilde{\vartheta}_{Sk}^p, \tilde{\vartheta}_{Fk}^p, \mathbf{W}_{Fk}, \mathbf{q}_k)$ 是关于 $(\tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p, \tilde{\vartheta}_{Sk}^p, \tilde{\vartheta}_{Fk}^p, \mathbf{W}_{Fk}, \mathbf{q}_k)$ 的一次 Euler 齐次方程,则有

$$\varpi_k^* = \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p} \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p + \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\vartheta}_{Sk}^p} \tilde{\vartheta}_{Sk}^p + \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\vartheta}_{Fk}^p} \tilde{\vartheta}_{Fk}^p + \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \mathbf{W}_{Fk}} \mathbf{W}_{Fk} + \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{q}_k = \tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p + P_{Sk}^p \tilde{\vartheta}_{Sk}^p + P_{Fk}^p \tilde{\vartheta}_{Fk}^p + \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p \cdot \mathbf{W}_{Fk} + \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p \cdot \mathbf{q}_k \geq 0, \quad (45)$$

式中 $\tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p, P_{Sk}^p, P_{Fk}^p, \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p$ 和 $\boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p$ 是与 $\mathbf{E}_{Nk}^p, \vartheta_{Sk}^p, \vartheta_{Fk}^p, \mathbf{W}_{Fk}$ 和 \mathbf{q}_k 关于 ϖ_k^* 耗散率共轭的广义热力学力,故第 k 个耗散率力势函数根据 Legendre 变换为

$$f_k(\mathbf{T}_{Sk}^p, P_{Sk}^p, P_{Fk}^p, \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p, \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p) = \varpi_k^* - \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p} \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p - \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\vartheta}_{Sk}^p} \tilde{\vartheta}_{Sk}^p - \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \tilde{\vartheta}_{Fk}^p} \tilde{\vartheta}_{Fk}^p - \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \mathbf{W}_{Fk}} \mathbf{W}_{Fk} - \frac{\partial \varpi_k^*}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{q}_k = \varpi_k^* - \tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p - P_{Sk}^p \tilde{\vartheta}_{Sk}^p - P_{Fk}^p \tilde{\vartheta}_{Fk}^p - \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p \cdot \mathbf{W}_{Fk} - \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p \cdot \mathbf{q}_k = 0. \quad (46)$$

式(46)联合式(43a)、(43b)可得第 k 个耗散率流势函数的泛函表达式为

$$\max_{\xi \in \xi^p} (f_k - \tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p \tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p - P_{Sk}^p \tilde{\vartheta}_{Sk}^p - P_{Fk}^p \tilde{\vartheta}_{Fk}^p - \mathbf{W}_{Fk} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p - \mathbf{q}_k \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p), \quad (47a)$$

$$\text{s.t. } f_k(\mathbf{T}_{Sk}^p, P_{Sk}^p, P_{Fk}^p, \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p, \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p) = 0. \quad (47b)$$

式(47a)、(47b)类似于 Hill 最大塑性功原理^[27].根据式(47a)、(47b)可得

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p}; \tilde{\vartheta}_{Sk}^p = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial P_{Sk}^p}; \tilde{\vartheta}_{Fk}^p = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial P_{Fk}^p}; \mathbf{W}_{Fk} = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p}; \mathbf{q}_k = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p}, \quad (48)$$

λ_k^p 为塑性因子.若 f_k 与 $P_{Sk}^p, P_{Fk}^p, \hat{\mathbf{F}}_{Fk}^p$ 和 $\boldsymbol{\vartheta}_{\theta k}^p$ 无关,则式(46)可简化为 $f_k(\tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p)$, 由式(48)得

$$\tilde{\mathbf{E}}_{Nk}^p = \lambda_k^p \frac{\partial f_k}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{Sk}^p}. \quad (49)$$

式(49)等同于经典塑性力学的塑性势公式.式(45)~(49)推导表明,经典塑性理论是式(43a)确定的粘性本构关系的一个特例.

上述理论分析并未假定 \mathbf{D}_N 与 ϑ_s 之间必须解耦,实际上是考虑了 \mathbf{D}_N 与 ϑ_s 之间可能存在的耦合作用.式(22)、(23)之间的分析文字表明,当混合物均匀化响应原理成立时,饱和多孔介质中多孔固相的间隙变形和材料体应变之间不存在相互耦合作用,此时式(29)中固相的自由能 $\mathcal{E}_s(\eta_s, \mathbf{E}_N, \vartheta_s, \mathbf{E}_N^p, \vartheta_s^p)$ 可进一步表示为与间隙变形有关的自由能 $\mathcal{E}_{SN}(\eta_{SN}, \mathbf{E}_N, \mathbf{E}_N^p)$ 和与材料变形有关的自由能 $\mathcal{E}_{SI}(\eta_{SI}, \vartheta_s, \vartheta_s^p)$ 之和:

$$\mathcal{E}_s(\eta_s, \mathbf{E}_N, \vartheta_s, \mathbf{E}_N^p, \vartheta_s^p) = \mathcal{E}_{SN}(\eta_{SN}, \mathbf{E}_N, \mathbf{E}_N^p) + \mathcal{E}_{SI}(\eta_{SI}, \vartheta_s, \vartheta_s^p), \quad (50)$$

式(50)中的 $\eta_s = \eta_{SN} + \eta_{SI}$.把式(50)代入到式(30a)得

$$\theta = \frac{\partial \mathcal{E}_{SN}}{\partial \eta_{SN}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{SI}}{\partial \eta_{SI}}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_s = \rho_s \frac{\partial \mathcal{E}_{SN}}{\partial \mathbf{E}_N}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_s^p = -\rho_s \frac{\partial \mathcal{E}_{SN}}{\partial \mathbf{E}_N^p}, \quad (51a)$$

$$P_s = \rho^s \frac{\partial \mathcal{E}_{SI}}{\partial \vartheta_s}, \quad P_s^p = -\rho_s \frac{\partial \mathcal{E}_{SI}}{\partial \vartheta_s^p}. \quad (51b)$$

此时,从式(50)和式(51a)可知与间隙相关的自由能取决于间隙变形和内间隙变形,它们与 Terzaghi 有效应力和内有效应力相联结,从式(50)和式(51b)可知与材料相关的自由能取决于材料体应变和内材料体应变,它们与材料真实球应力和材料内真实球应力相联结.

Borja^[16]受 Skempton 有效应力公式^[3]的影响把式(22)中右式的前两项写为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_s + P_F n_s \frac{\tilde{\rho}_s^s}{\rho^s} = \left[\boldsymbol{\sigma} + \left(1 - \frac{K_b}{K_s} \right) P_F \mathbf{1} \right] : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_s, \quad (52)$$

由式(52)和 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + P_F \mathbf{1}$ 可得

$$n_s \tilde{\vartheta}_s = -\frac{K_b}{K_s} \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_s : \mathbf{1} = -\frac{K_b}{K_s} \text{div}(\tilde{\mathbf{x}}_s). \quad (53)$$

然而,式(53)在大多数情况下是不成立的,例如,在小应变线弹性条件下根据式(50)、(51a)和(51b)很容易得到

$$\text{div } \tilde{\mathbf{x}}_s + \tilde{\vartheta}_s = \frac{1}{K_N} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m; \quad \tilde{\vartheta}_s = \frac{1}{K_s} \tilde{P}_s, \quad (54)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1}/3$.注意到多孔介质的压缩模量 K_b 是在孔压等于0的条件下测定的,由此可得

$$\frac{1}{K_N} = \frac{1}{K_b} - \frac{1}{n_s K_s}. \quad (55)$$

注意到小应变条件下 n_s 和 n_F 可视为常数,把式(55)代入到式(54)并利用 $P_T = P_F - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m$ 得

$$\begin{aligned} \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_s &= \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{n_s K_s} \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m - \tilde{\vartheta}_s = \\ &= \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{n_s K_s} \right) (\tilde{P}_F - \tilde{P}_T) - \frac{1}{n_s K_s} (\tilde{P}_T - n_F \tilde{P}_F) = -\frac{1}{K_b} \left[\tilde{P}_T - \left(1 - \frac{K_b}{K_s} \right) \tilde{P}_F \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

式(56)等同于 Skempton 有效应力公式^[3],但即使在这样的条件下以下不等式依然成立:

$$\begin{aligned} n_s \tilde{\vartheta}_s &= \frac{(\tilde{P}_T - n_F \tilde{P}_F)}{K_s} \neq \frac{K_b}{K_s} \frac{1}{K_b} \left[\tilde{P}_T - \left(1 - \frac{K_b}{K_s} \right) \tilde{P}_F \right] = \\ &= -\frac{K_b}{K_s} \text{div } \tilde{\mathbf{x}}_s = -\frac{K_b}{K_s} \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_s : \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (57)$$

式(57)不等式成立,这表明式(53)的等式不成立,因而式(52)也不成立.这一结论表明即使 Skempton 有效应力公式^[3]作为一个本构方程是成立的,但饱和多孔介质的能量平衡方程式(22)依然不能用 Skempton 有效应力公式^[3]来表达.

7 结 论

本文根据工程混合物理论,建立了能够同时考虑固体材料、多孔固体和流体不可逆变形的饱和多孔介质超粘弹性本构理论,得出了以下结论:

1) 提出混合物的均匀化响应原理.基于这一原理,建立了各项均符合功共轭的饱和多孔介质能量平衡方程,为在非平衡态热力学框架内建立饱和多孔介质超粘弹性本构理论的一般框架打下较坚实的数理基础.

2) 按照 Morland 等的研究成果,考虑体积分数的饱和多孔介质需要 4 个本构方程才能构成完备的本构理论,依靠这 4 个本构方程可以分别确定多孔固相应变张量,流相应变和固流两相的体积分数这 4 个广义应变变量.在本文的饱和多孔介质能量公式中,与自由能相关的应变状态变量有 3 个:分别是间隙应变张量 \mathbf{E}_N ,固相材料体应变 ϑ_S 和流相体应变 ϑ_F ,由此确定的 3 个本构方程与混合物总体积分数之和等于 1 这一约束条件一起,构成饱和多孔介质的 4 个本构方程.本构方程的数目与考虑组分体积分数后饱和多孔介质需要确定的状态变量数目恰好一致,因此本文的本构方程是一个封闭的完备化的本构理论体系.

3) 根据饱和多孔介质的能量平衡方程,利用非平衡热力学中的局部平衡假定,建立了自由能势函数方程;然后根据非平衡热力学中的熵分解理论,推导了饱和多孔介质受力过程中的熵流和熵产;再根据熵产公式建立了耗散率势函数方程,建立了反映不可逆过程熵增规律的耗散率势函数方程;证明了经典的塑性理论是其中的一个特例.上述理论分析证明,考虑固相材料变形的饱和多孔介质本构理论需要 Terzaghi 有效应力和材料真实应力两个应力状态变量才能得到完善合理的描述.

4) 根据本文小应变条件下饱和多孔介质的线弹性本构方程,获得如下结论:尽管 Skempton 有效应力作为一个本构关系在线弹性饱和多孔介质模型中成立,但饱和多孔介质能量平衡方程不能表示成 Skempton 有效应力表示的形式.因此 Skempton 有效应力不是饱和多孔介质本构理论框架中的基本状态变量.

附 录 A

根据式(17a)、(17b),固体和流体的能量方程可表示为

$$\rho_S \dot{\mathcal{E}}_S = \boldsymbol{\sigma}_S : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_S - \text{div } \mathbf{q}_S + \rho_S r_S + \hat{\mathcal{E}}_S, \quad (\text{A1a})$$

$$\rho_F \dot{\mathcal{E}}_F = \boldsymbol{\sigma}_F : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_F - \text{div } \mathbf{q}_F + \rho_F r_F + \hat{\mathcal{E}}_F, \quad (\text{A1b})$$

利用式(A1a)、(A1b)和 $\Gamma_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$ 时的式(11)得

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathcal{E}} &= \sum_\alpha [\rho_\alpha \dot{\mathcal{E}}_\alpha - \text{div}(\rho_\alpha \mathcal{E}_\alpha \mathbf{u}_\alpha)] = \\ &= \sum_\alpha [\boldsymbol{\sigma}_\alpha : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha - \text{div}(\mathbf{q}_\alpha + \rho_\alpha \mathcal{E}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \rho_\alpha r_\alpha] + \sum_\alpha (\hat{\mathcal{E}}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha), \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_\alpha [\boldsymbol{\sigma}_\alpha : \text{grad } \tilde{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha] &= \\ \sum_\alpha (\boldsymbol{\sigma}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} - \sum_\alpha [\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \ddot{\mathbf{x}}_\alpha - (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) : \text{grad } \dot{\mathbf{x}}] &+ \\ \text{div} \sum_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha. & \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

令 $u_\alpha^2 = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$, $\Gamma_\alpha = u_\alpha^2/2$ 并使用式(11)得^[7]

$$\rho \sum_\alpha \frac{1}{2} \frac{\rho_\alpha}{\rho} \dot{u}_\alpha^2 = \sum_\alpha \left[\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{u}}_\alpha - \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho_\alpha u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha \right) \right] =$$

$$\sum_{\alpha} [\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \rho_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}) : \text{grad } \dot{\mathbf{x}}] - \text{div} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} u_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\alpha} . \quad (\text{A4})$$

把式(A4)代入到式(A3)得

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}) &= \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}) : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} - \rho \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2\rho} u_{\alpha}^2 - \\ \text{div} \sum_{\alpha} \left(-\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{1}{2} \rho_{\alpha} u_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\alpha} \right) &+ \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{\alpha} , \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

把式(A5)代入到式(A2)得^[7]

$$\begin{aligned} \rho \left(\mathcal{E} + \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2\rho} u_{\alpha}^2 \right) &= \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}) : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} - \\ \text{div} \sum_{\alpha} \left(\mathbf{q}_{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{1}{2} \rho_{\alpha} u_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\alpha} \right) &+ \\ \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} r_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}) . \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

由于整个混合物的能量与内部作用无关,由式(A6)得^[7]

$$\sum_{\alpha} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}) = 0, \quad (\text{A7})$$

把式(A7)代入到式(A2)得

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = \sum_{\alpha} [\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} - \text{div}(\mathbf{q}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) + \rho_{\alpha} r_{\alpha}] . \quad (\text{A8})$$

参考文献 (References) :

- [1] Boit M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. *Journal of Applied Physics*, 1955, **26**(2) : 182-185.
- [2] Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks[J]. *Society of Petroleum Transactions*, 1957, **210**: 331-339.
- [3] Skempton A W. *Effective Stress in Soils, Concrete and Rocks*[M]. London, UK: Butterwoths, 1961: 4-16.
- [4] 李传亮, 孔祥言, 徐献芝, 李培超. 多孔介质的双重有效应力[J]. 自然杂志, 1999, **21**(5) : 288-291. (LI Chuan-liang, KONG Xiang-yan, XU Xian-zhi, LI Pei-chao. Double effective stresses of porous media[J]. *Ziran Zazhi*, 1999, **21**(5) : 288-291. (in Chinese))
- [5] Fillunger P. Der Kapillardruck in Talperren[J]. *Die Wasserwirtschaft*, 1934, **27**(13/14) : 129-131.
- [6] Heinrich V G, Desoyer K. Theorie dreidimensionaler Setzungs Vorgänge in Tonschichten[J]. *Ingenieur-Archiv*, 1961, **30**: 225-253.
- [7] Bowen R M. 混合物理论[M]. 徐慧己, 张志新, 李如庆, 王清泉, 金和, 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1983: 1-48. (Bowen R M. *Theory of Mixtures*[M]. XU Hui-yi, ZHANG Zhi-xin, LI Ru-qing, WANG Qing-guan, JIN He, transl. Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1983: 1-48. (Chinese version))
- [8] 陈正汉. 岩土力学的公理化理论体系[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(10) : 901-910. (CHEN Zheng-han. An axiomatic of geomechanics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **15**(10) : 901-910. (in Chinese))
- [9] Morland L W. A simple constitutive theory for a fluid-saturated porous solid[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1972, **77**(5) : 890-900.
- [10] de Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(4) : 201-262.

- [11] Coussy O, Dormieux L, Detournay E. From mixture theory to Biot's approach for porous media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(34/35): 4619-4635.
- [12] 黄义, 张引科. 非饱和土本构关系的混合物理论(I)——非线性本构方程和场方程[J]. *应用数学和力学*, 2003, **24**(2): 111-123. (HUANG Yi, ZHANG Yin-ke. Constitutive relation of unsaturated soil by use of the mixture theory(I)—nonlinear constitutive equations and field equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, **24**(2): 111-123. (in Chinese))
- [13] Houlsby G T. The work input to a granular material[J]. *Géotechnique*, 1979, **29**(3): 354-358.
- [14] Houlsby G T. The work input to an unsaturated granular material[J]. *Géotechnique*, 1997, **47**(1): 193-196.
- [15] Li X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils—1: theory[J]. *Géotechnique*, 2007, **57**(5): 411-422.
- [16] Borja R I. On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**: 1764-1786.
- [17] Zhao C G, Liu Y, Gao F P. Work and energy equations and the principle of generalized effective stress for unsaturated soils [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics*, 2010, **34**(9): 881-990.
- [18] 刘雪梅, 邓子辰, 胡伟鹏. 不可压饱和和多孔弹性杆动力响应的多辛方法[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(3): 242-251. (LIU Xue-mei, DENG Zi-chen, HU Wei-peng. A multi-symplectic method for dynamic responses of incompressible saturated poroelastic rods [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(3): 242-251. (in Chinese))
- [19] 庞国飞, 陈文, 张晓棣, 孙洪广. 复杂介质中扩散和耗散行为的分数阶导数唯象建模[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(11): 1117-1134. (PANG Guo-fei, CHEN Wen, ZHANG Xiao-di, SUN Hong-guang. Fractional differential phenomenological modeling for diffusion and dissipation behaviors of complex medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(11): 1117-1134. (in Chinese))
- [20] Geertsma J, Smit D C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid[J]. *Geophysics*, 1961, **26**(2): 169-181.
- [21] Berrman J G. Confirmation of Biot's theory[J]. *Applied Physics Letters*, 1980, **37**(4): id382. doi: 10.1063/1.91951.
- [22] Philippacopoulos A J. Lamb's problem for fluid-saturated, porous media[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1988, **78**(2): 908-923.
- [23] Chen J. Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, **31**(2): 169-202.
- [24] 李如生. 非平衡态热力学和耗散结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986: 76-106. (LI Ru-sheng. *Nonequilibrium Thermodynamics and Dissipative* [M]. Beijing: Tsinghua Press, 1986: 76-106. (in Chinese))
- [25] Ziegler H. *An Introduction to Thermomechanics* [M]. 2nd ed. North-Holland: Amsterdam, 1983.
- [26] Collins I F, Houlsby G T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1997, **453**(1964): 1975-2001.
- [27] Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity* [M]. Oxford, 1950: 50-52.

Study on the Super Viscoelastic Constitutive Theory for Saturated Porous Media

HU Ya-yuan

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University,
Hangzhou 310058, P.R.China)

Abstract: In order to establish the super viscoelastic constitutive framework for saturated porous media in view of the reversible and irreversible deformations of solids, porous solids and fluids, an energy balance equation of which all terms were in the thermodynamically power-conjugated form, was built for saturated porous media according to the principle of homogeneous mixture response, with the porous solid selected as the reference configuration and the effective stress tensor, the material's real hydrostatic stress and the fluid's real pore pressure chosen as the state variables. The entropy flux and entropy production of the saturated porous medium were derived based on the decomposing principle of entropy in the non-equilibrium thermodynamics. The work shows that the super elastoplastic constitutive theory is only a special case of the proposed theory. The deformation rate of a porous solid is composed of 2 parts: the solid-phase interstice and the material deformation, of which the former is power-conjugated with the Terzaghi effective stress tensor and the latter with the material's real hydrostatic stress. The free energy of a saturated porous medium consists of 2 parts: the porous solid-phase part and the fluid-phase part. If the solid-phase interstice is decoupled from the material deformation, the free energy of the solid can be further divided into 2 parts: the material strain and the interstitial change. The Skempton-type effective stress is proved not to be a basic state variable for saturated porous media.

Key words: saturated porous medium; stress analysis; strain analysis; energy equation; entropy production; constitutive relation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51178419)

引用本文/Cite this paper:

胡亚元. 饱和多孔介质的超粘弹性本构理论研究[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 584-598.

HU Ya-yuan. Study on the super viscoelastic constitutive theory for saturated porous media[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 584-598.