

一种全速域的计算方法及其应用*

王强¹, 姜彭²

(1. 中北大学 机械与动力工程学院, 太原 030051;
2. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 针对原可压缩流动求解器不能用于低速不可压缩流动预测的缺点,采用预处理技术对控制方程特征系统、隐式求解方法进行修正,并采用预处理修正的 AUSM⁺-up 格式离散对流项.采用修正后的求解器对无粘鼓包流动、顶盖驱动粘性方腔流动以及 Laval(拉瓦尔)喷管流动等算例进行数值仿真,并将数值仿真结果与基准解进行对比.结果表明将预处理技术应用于全速域流动问题的求解是可行的,经预处理修正后的求解器能够用于低速、亚音速、跨音速以及超音速流动问题的求解.

关键词: 计算流体力学; 全速域流动; 预处理技术; 时间相关法

中图分类号: O354.9 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.002

引言

目前,时间相关法已经在可压缩流动问题的数值仿真中获得了极其广泛的应用,该方法在流动控制方程组中引入“伪时间”项,将亚音速、跨音速以及超音速流动问题统一转化为双曲型方程,在时间方向上进行推进求解.但是将该方法应用于低 Mach 数不可压缩流动问题中,会碰到“刚性”问题,具体表现为收敛速度很慢,计算不稳定^[1].传统的求解不可压缩流动的算法主要包括“涡量-流函数法”和“SIMPLE”系列算法;但是前者主要应用于二维流动问题,基本不适合三维问题的求解;后者运用于可压缩流动问题的求解时存在收敛性差、求解精度不高的问题,同时程序的设计也比较复杂,实现比较困难^[2].

基于“人工压缩法”的预处理技术在原始的流动控制方程中引入预处理矩阵,在低速流动中,通过改变系数矩阵的特征系统,解决了时间相关法应用于低速流动问题时的“刚性”问题.同时,该方法对现有可压缩算法的计算程序改动较小,程序的设计易实现.预处理技术的关键在于预处理矩阵的构造,运用比较多的有 Choi-Merkle^[3]、Terkel 等^[4]、Weiss-Smith^[5]等形式的矩阵,Terkel 等的预处理矩阵形式较复杂,Weiss-Smith 预处理矩阵在 Choi-Merkle 预处理矩阵基础上改进而来,形式较简单.本文采用该预处理矩阵进行计算.

本文在已有的 LU-SGS 可压缩流动求解器基础上,采用 Weiss-Smith 预处理矩阵以及

* 收稿日期: 2015-11-11; 修订日期: 2016-01-13

基金项目: 中国博士后科学基金(2011M500545)

作者简介: 王强(1982—),男,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者).

E-mail: chuanguang_w@163.com).

AUSM⁺-up 差分格式,对该求解器进行了改进,使之能够适用于全速域的流动求解.然后以无粘鼓包流动、顶盖驱动方腔流动、Laval 喷管等为算例对该求解器进行了数值验证.

1 数值求解方法

以守恒变量为自变量,未经预处理的任意曲线坐标系下无量纲形式的二维 Navier-Stokes (N-S) 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} \right), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{U} = \mathbf{J} \cdot [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad e]^T$ 为守恒形式的变量, \mathbf{J} 为 Jacobi (雅可比) 行列式, 通量 \mathbf{E}, \mathbf{F} 为对流通量, 方程右边则为粘性通量, 对无粘流动, 右边项取 0, 方程转化为 Euler 方程.

预处理形式的控制方程自变量一般采用原始变量, 同时需要在时间项左侧乘预处理矩阵:

$$\mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} \right), \quad (2)$$

$\mathbf{Q} = [p \quad u \quad v \quad T]^T$ 为原始变量, 预处理矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 形式如下^[5]:

$$\begin{bmatrix} \Theta + 1/(RT) & 0 & 0 & -\rho/T \\ u[\Theta + 1/(RT)] & \rho & 0 & -\rho u/T \\ v[\Theta + 1/(RT)] & 0 & \rho & -\rho v/T \\ H[\Theta + 1/(RT)] - 1 & \rho u & \rho v & \rho[c_p - H/T] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 $\Theta = 1/U_{\text{ref}}^2 - 1/c^2$, U_{ref} 为参考速度, c 为当地声速, 参考速度计算公式如下:

$$U_{\text{ref}}^2 = \min[c^2, \max(|V|^2, K|V_{\infty}|^2)], \quad (4)$$

其中 V 为当地速度, 下标 ∞ 表示来流参数, $K = 0.25$, 为常系数.

采用预处理技术后, 方程(2)系数矩阵的特征值如下(以 ξ 方向为例):

$$\lambda(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}) = U_{\xi}, U_{\xi}, U'_{\xi} + c', U'_{\xi} - c', \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} U_{\xi} = u\xi_x + v\xi_y, U'_{\xi} = U_{\xi}(1 - \alpha), c' = \sqrt{\alpha^2 U_{\xi}^2 + U_{\text{ref}}^2}, \\ \alpha = (1 - \beta U_{\text{ref}}^2)/2, \beta = \left(\rho_p + \frac{\rho_T}{\rho c_p} \right). \end{cases} \quad (6)$$

对流项差分格式采用 AUSM⁺-up 差分格式^[6], 该格式经过了预处理修正, 适用于全流域的流动计算. 对湍流流动, 采用双方程 $q-\omega$ 模型^[7], 该模型为低 Reynolds (雷诺) 数模型, 具有一定的预测转捩流动的能力.

采用 LU-SGS 隐式求解格式对离散化的代数方程进行求解, 对采用预处理技术的控制方程, 该格式并不需要做较大的改动, 只需将原格式中的 Jacobi 矩阵及其谱半径替换为预处理后的相应参数即可.

2 验证算例与分析

2.1 无粘鼓包流动

无粘鼓包流动常用作检验程序与计算方法的经典算例, 鼓包的尺寸为

$$y = \tau \sin^2(\pi x), \quad x \in (0, 1), \quad (7)$$

对亚音速与跨音速流动, τ 取值为 0.1; 对超音速流动, τ 取值为 0.04. 对该算例, 文献[8]的结果

常用作基准进行对比.该文献中,鼓包尺寸为一段圆弧,为此本文计算中也采用与之相同的几何模型,计算网格节点数目为 121×65 ,采用了均匀网格划分,如图 1 所示.

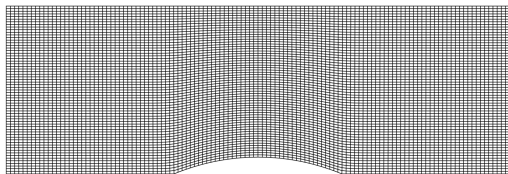


图 1 无粘鼓包流动计算网格

Fig. 1 Computational grids for the bump flow

计算的控制方程为 Euler 方程.计算边界条件为在入口给定 Mach 数、来流压强与来流温度;对亚音速流动,出口给定背压(与来流压强相同),对超音速流动,出口边界值采用内点一阶外插得到;在壁面为不穿透条件.共进行了 5 种 Mach 数流动的计算,分别为 0.001, 0.1, 0.5, 0.675 与 1.65,其中,将来流 Mach 数 0.5, 0.675 与 1.65 的计算结果与文献[8]进行对比,同时给出计算方案得到的压力与 Mach 数等值线图(图 2~4).

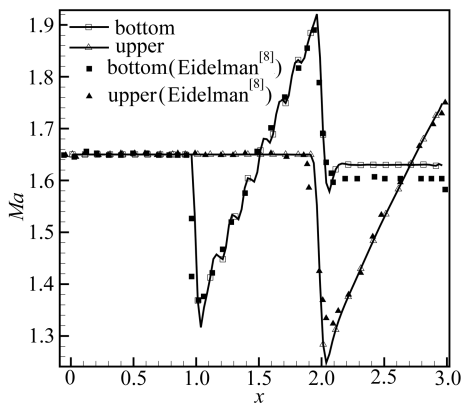


图 2 壁面 Mach 数对比 ($Ma_\infty = 1.65$)

Fig. 2 The Mach number at the bump wall ($Ma_\infty = 1.65$)

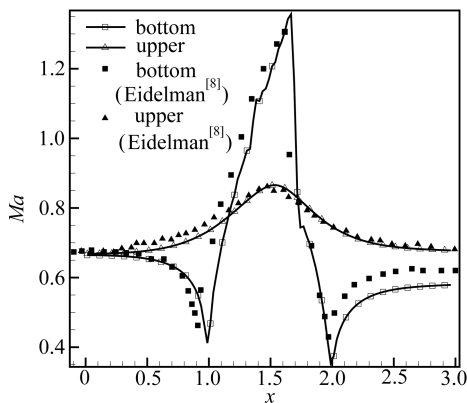


图 3 壁面 Mach 数对比 ($Ma_\infty = 0.675$)

Fig. 3 The Mach number at the bump wall ($Ma_\infty = 0.675$)

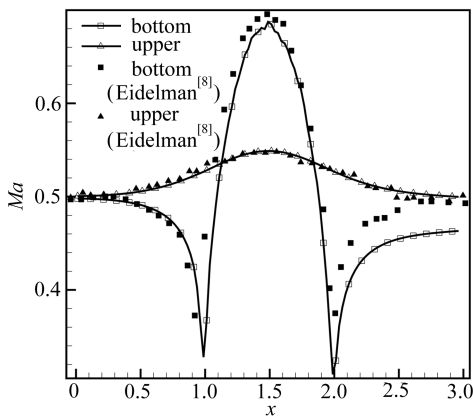


图 4 壁面 Mach 数对比 ($Ma_\infty = 0.5$)

Fig. 4 The Mach number at the bump wall ($Ma_\infty = 0.5$)

对比结果表明,本文开发的求解器在绝大部分区域能够与文献[8]计算结果吻合良好,但是在下壁面鼓包下游,亚音速区域计算的 Mach 数略低于文献计算值,这可能是由于差分格式所预测的膨胀流动程度比文献低导致的。

图 5 和图 6 给出各来流 Mach 数计算的的压力与 Mach 数等值线图.结果表明:经过预处理之后,求解器具备了求解低速、亚音速、跨音速以及超音速流动的能力;在低速流动中,计算得到的压力与 Mach 数等值线图具有较好的对称性,该趋势与文献[8-9]所得结果相同。

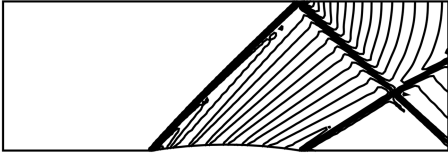
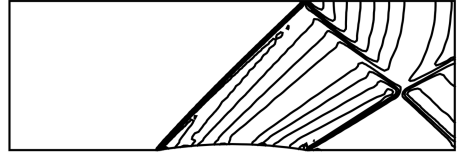
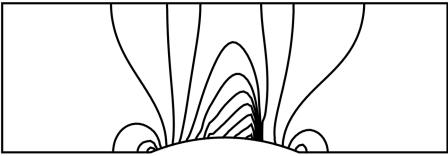
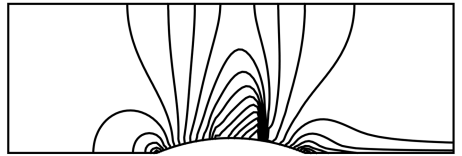
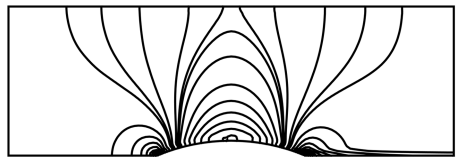
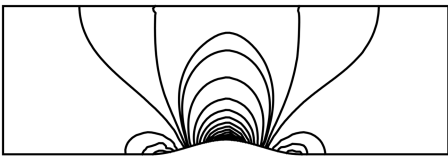
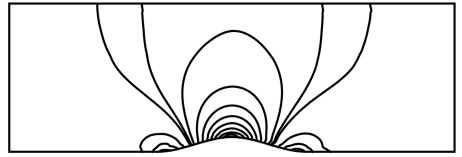
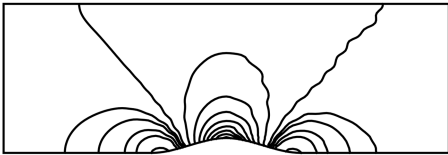
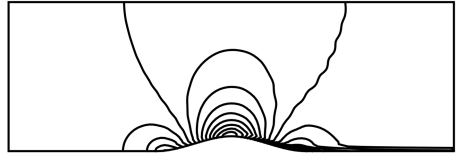
(a) $Ma_\infty = 1.65$ (a) $Ma_\infty = 1.65$ (b) $Ma_\infty = 0.675$ (b) $Ma_\infty = 0.675$ (c) $Ma_\infty = 0.5$ (c) $Ma_\infty = 0.5$ (d) $Ma_\infty = 0.1$ (d) $Ma_\infty = 0.1$ (e) $Ma_\infty = 0.001$ (e) $Ma_\infty = 0.001$

图 5 压力等值线图

图 6 Mach 数等值线图

Fig. 5 The pressure contour

Fig. 6 The Mach number contours

2.2 顶盖驱动方腔流动

顶盖驱动方腔流动经常用于检验不可压缩算法, Ghia 等^[10]采用涡量-流函数法对不同 Reynolds 数的算例进行了计算,其结果具有较高的可信度.该算例的来流 Mach 数为 0.04,来流

Reynolds 数 (Re) 分别为 100, 400 和 1 000, 采用层流进行计算 (图 7), 计算网格节点数目为 61×61 , 均匀划分计算域, 计算域尺寸参照文献 [10].

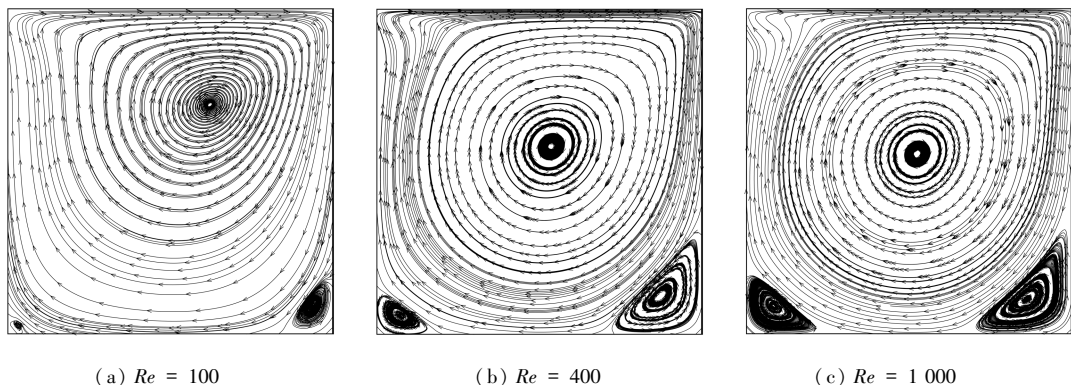


图 7 方腔内流线分布

Fig. 7 Streamlines in the square cavity

计算结果 (见图 8、9) 表明, 随着 Reynolds 数的提高, 方腔中主涡逐步向左移动, 两个壁角涡的强度也逐渐提高, 该分布趋势与文献 [10] 相同。下面给出 3 种 Reynolds 数方案在方腔流向对称线上速度 u (x 方向速度分量) 随方腔深度的变化曲线以及垂直对称线上速度 v (y 方向速度分量) 随流向位置的变化曲线, 并与文献 [10] 结果进行了对比。从图中可以看出本文计算结果与文献结果差异很小, 这也证明了本文程序应用于粘性低速流动的可行性。

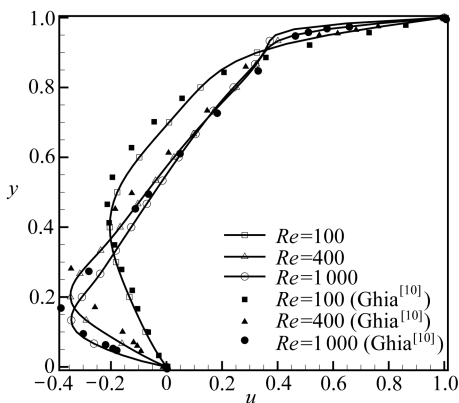


图 8 流向速度随方腔流向对称线分布

Fig. 8 Velocity u along the flow symmetric line

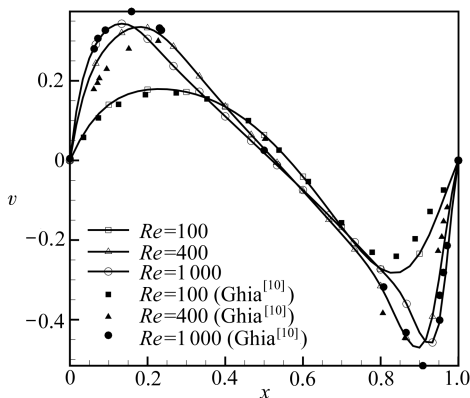


图 9 垂直速度随方腔垂直对称线分布

Fig. 9 Velocity v along the vertical symmetric line

2.3 Laval 喷管流动

Laval 喷管流动范围较宽, 从低速至超音速流域, 故该算例在一定程度上可以对程序的全速域流动仿真能力进行验证。该算例模型如图 10 所示, 计算网格节点数目为 325×121 , 为了准确模拟边界层流动, 对壁面网格进行了加密。进口面积与喉口面积比值为 12。

进口给定总温 540 K、总压 673 685 Pa, 垂直进气方向; 出口给定超音速出口; 壁面给定无滑移条件。

首先给出了 Mach 数分布等值线图 (图 10), 可以看到入口 Mach 数最小, 仅为 0.05, 出口达到了超音速, Mach 数在 2.2 以上, 即求解器可以对包含低速、亚音速、跨音速以及超音速的全速域流动进行仿真。

然后给出了沿流向截面平均 Mach 数的分布(图 11),并把结果与等熵流动结果进行了对比,其中等熵流动值采用下式进行计算:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2, \quad (8)$$

可以看出两者的差异很小,这在一定程度上验证了本求解器的计算能力.

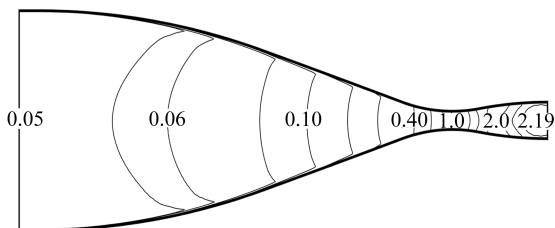


图 10 Mach 数等值线图
Fig. 10 The Mach number contour

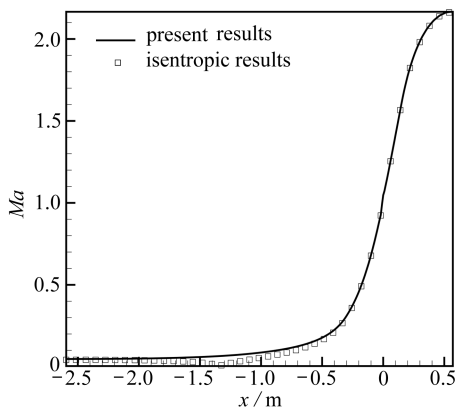


图 11 截面平均 Mach 数分布
Fig. 11 The cross-sectional average Mach number distributions

3 结 论

对原 LU-SGS 可压缩流动求解器进行了预处理修正,改进了控制方程系数矩阵及其特征值系统以及对流项差分格式等,使之能够用于低速、亚音速、跨音速以及超音速的无粘、有粘流动计算,并以无粘鼓包流动、顶盖驱动方腔粘性流动和 Laval 喷管流动为例对修正后的流动求解器进行了验证.结果表明将预处理技术应用于该求解器的修正是可行的,修正后的求解器具备全速域流动的预测能力.

参考文献 (References):

- [1] Briley W R, Taylor L K, Whitfield D L. High-resolution viscous flow simulations at arbitrary Mach number[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **184**(1): 79-105.
- [2] 廖守亿, 王正华, 王承尧. 预处理方法在低速粘性流动中的应用[J]. 国防科学技术大学学报, 2000, **22**(1): 89-93. (LIAO Shou-yi, WANG Zheng-hua, WANG Cheng-yao. The application of preconditioning in viscous flow at low speeds[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2000, **22**(1): 89-93. (in Chinese))
- [3] Choi Y H, Merkle C L. The application of preconditioning in viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **105**(2): 207-223.
- [4] Turkel E, Radespiel R, Kroll N. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics[J]. *Computer & Fluids*, 1997, **26**(6): 613-634.
- [5] Weiss J M, Smith W A. Preconditioning applied to variable and constant density flows[J]. *AIAA Journal*, 1995, **33**(11): 2050-2057.
- [6] Liou M S. A sequel to AUSM—part II: AUSM⁺-up for all speeds[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, **214**(11): 137-170.

- [7] Coakley T J. Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations[C]// *AIAA 16th Fluid and Plasmadynamics Conference*. Danvers, Massachusetts, 1983.
- [8] Eidelman S, Colella P, Shreeve R P. Application of the Godunov method and its second-order extension to cascade flow modeling[J]. *AIAA Journal*, 1984, **22**(11): 1609-1615.
- [9] Edwards J R, Liou M S. Low-diffusion flux splitting methods for flows at all speeds[J]. *AIAA Journal*, 1998, **36**(9): 1610-1617.
- [10] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-*Re* solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, **48**(3): 387-411.

A Modified Numerical Method for Arbitrary Mach Number Flows Based on the Preconditioning Technique

WANG Qiang¹, JIANG Peng²

(1. *School of Mechanical and Power Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, P.R.China;*

2. *School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P.R.China)*

Abstract: The preconditioning technique was applied to modify the existent LU-SGS solver for compressible flows, which was unsuitable for the prediction of low-speed incompressible flows. The preconditioning modification included treatment of the eigen system of the governing equations, improvement of the implicit solving method and discretization of the convection terms with the low-diffusion difference scheme and the AUSM⁺-up scheme. The modified solver was applied to numerical simulations of inviscid bump flows, lid-driven square cavity viscous flows and Laval nozzle flows. The comparison between the present results and those in the previous literatures proves the feasibility of the preconditioning-modified numerical method in the simulation of arbitrary Mach number flows, including the low-speed, the subsonic, the transonic and the supersonic inviscid or viscous flows.

Key words: computational fluid dynamics; arbitrary Mach number flow; preconditioning technique; time-dependent method

Foundation item: China Postdoctoral Science Foundation(2011M500545)

引用本文/Cite this paper:

王强, 姜彭. 一种全速域的计算方法及其应用[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(6): 567-573.

WANG Qiang, JIANG Peng. A modified numerical method for arbitrary Mach number flows based on the preconditioning technique[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(6): 567-573.