

# 时变系统流场动量定理的积分形式及其在流体动力系数分析中的应用\*

林献武<sup>1</sup>, 兰维瑶<sup>1</sup>, 李智斌<sup>2</sup>, 李赫<sup>1</sup>

(1. 厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005;

2. 北京控制工程研究所, 北京 100190)

(我刊编委符松推荐)

**摘要:** 为解决飞艇的非定常流体动力系数的计算问题,利用准平衡假设在涡量流体力学理论的基础上构建了一种流体动力系数计算方法.首先提出了时变系统的概念及其与流场空间区域的对应关系,在此基础上建立了时变系统的输运方程和流场动量定理积分形式为后面的讨论做准备.其次,将动量定理应用于一个由无穷远固定边界和物面所包含的流体系统,将流体动力表征为流场扰动动量总和变化率的函数.进而提出准平衡假设的概念,将有粘流中流场扰动速度、第一涡量矩和扰动动量表示为运动体速度和角速度的函数.最后,采用 CFD 技术,数值确定了这种关系并代入流体动力表达式,得到有粘流中流体动力系数的计算方法.研究结果还表明,由于考虑了系统的时变性,在得到的流体动力表达式中将多出一个稳态流体动力项.这个稳态流体动力项,在无粘流的情况下刚好等于零,与 d'Alembert(达朗伯)佯谬的结论一致,在有粘流的情况下不等于零,与实际情况一致.

**关键词:** 流场动量定理; 时变系统; 输运方程; 非定常流体动力; 飞艇

**中图分类号:** O357.4<sup>+</sup>1 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.06.001

## 引言

在流体介质中运动物体的流体动力(可以是气动力或水动力)计算是研究其运动特性的重要基础.1879年,Lamb在Thomson,Tait与Kirchhoff,Green等工作的基础上,总结了一套无粘流情况下运动体的流体动力计算方法<sup>[1-2]</sup>.其主要思想包含如下几个关键步骤:

- 1) 构建一个流体系统  $\Omega(t)$ , 它是由运动体表面和无穷远处的固定边界所包含体积空间中的流体的总和.
- 2) 证明在无粘流体情况下这个系统中流体冲量(Kelvin 意义上的冲量,实际上指流场的扰动动量)的变化率等于合外力.
- 3) 合外力由两部分组成,一部分为运动体所受流体动力的反作用力,另一部分为无穷远

\* 收稿日期: 2016-01-27; 修订日期: 2016-04-15

基金项目: 国家自然科学基金(11072028;61273199);福建省自然科学基金(2016J01030);中央高校基本科研业务费专项资金(20720150177)

作者简介: 林献武(1975—),男,博士(通讯作者). E-mail: linxianw@xmu.edu.cn.

处固定边界上流体切应力的总和, Lamb 证明了后面这部分力针对无粘流场等于零。

4) 通过势流理论计算定常流场的动能, 然后根据流场动能与动量之间的关系得到流场扰动动量。

5) 将所得的动量代入步骤 2) 中的结论获得流体动力的计算方法。

当运动体作匀速直线运动的时候, 使用这个方法所获得的流体动力刚好为零, 与无粘流中 d' Alembert 佯谬的结论一致; 所得的流体动力力矩刚好等于 Munk 力矩. 这种一致性从某种意义上说明了这个结果的合理性并得到广泛的应用。

对有粘流体而言, 运动体作匀速直线运动时的流体动力并不为零, 而且是运动体流体动力的重要组成部分, 因此 Lamb 的无粘流流体动力计算方法并不能直接应用于有粘流流体动力的计算. 为了解决有粘流情况下运动体的流体动力, 众多学者作出了不懈的努力并取得了一些成果. Allen 首先使用圆柱绕流比拟法获得了旋成体的有粘流升力<sup>[3-4]</sup>; 不久, Hopkins 对 Allen 的理论进行改进, 他认为 Allen 的方法中把势流理论用于整个旋成体是不合理的, 在旋成体的尾部不再存在势流的流体动力, 经过这种处理, 他获得了与实验更为一致的结果<sup>[5]</sup>. 1983 年 Jones 等融合了薄弹翼理论和 Allen 的旋成体理论提出了飞艇的流体动力估算方法, 其中又使用附加攻角的概念估算了飞艇有角速度情况下的流体动力, 也讨论了加速度和旋转引起的非定常流体动力<sup>[6]</sup>; 这个结果影响深远, 其部分内容至今仍被 Khoury 等新版的《飞艇技术》一书收录<sup>[7]</sup>. 2004 年, Mueller 等将 Jones 等的结果扩展到六分量的情况<sup>[8]</sup>; 2012 年 Li 等对 Jones 等的文章中引用 Allen 方法的部分用 Hopkins 理论改进, 同时综合 Lamb 的结果得到更为合理的飞艇六分量流体动力计算方法<sup>[9-10]</sup>. 2003 年, 俄罗斯院士 Kirilin 采用实验得到的有粘流流体动力与 Lamb 的无粘流流体动力综合也建立了一种飞艇的流体动力算法<sup>[11]</sup>. 上面的研究进展表明, 飞艇的非定常流体动力计算通常需要采用 Lamb 的无粘流结果, 2012 年 Sebbane 关于飞艇的新专著中仍然采用类似的方法<sup>[12]</sup>.

飞行器的流体动力对飞行器的飞行力学特性研究有着重要的影响, 例如飞艇的飞行特性研究过程中所采用的坐标系为艇轴坐标系, 这与其他飞行器如飞机、导弹和炮弹是不同的. 究其根本原因, 是因为飞艇的部分非定常流体动力用附加质量来表示, 在艇轴坐标系中表示比较方便. 为了推进飞艇飞行力学的研究, 需要发展一种可以计算有粘流非定常流体动力的方法. 一种可行的方案是追随 Lamb 的思路, 将其中各个步骤都用有粘流中的相应结果来替代. Wu 在 1981 年完成了这种尝试<sup>[13]</sup>, 并且在后来的专著中得到更为详细的阐述<sup>[14]</sup>. Wu 工作的主要思想是利用流体力学动量定理的积分形式代替 Lamb 工作的步骤 2), 在步骤 3) 针对有粘流的情况对无穷流场边界上的压强积分进行了重新推导, 在步骤 4) 采用涡量场表征流场的扰动动量. 虽然 Wu 的工作已发表三十多年, 并被不少专著引用和演绎<sup>[15-16]</sup>, 但较少被应用于飞艇研究领域. 其中的原因之一是 Wu 的方法在实际应用时不但需要计算非定常的流场, 而且难以确定流体动力与运动体各速度分量之间的关系 (即流体动力系数). 例如使用 Wu 方法计算得到运动体作俯仰运动的流体动力后, 并不能确定这些流体动力是因为攻角变化 (或线速度分量变化) 引起的, 还是因为存在角速度而产生的. Lamb 的方法只需计算定常流场且明确给出了流体动力与运动体各速度分量之间的关系, 若能将 Lamb 的方法和 Wu 的方法相结合, 则有望发展出一种实用的飞艇气动力系数算法。

笔者在开展这方面工作的过程中遇到了一个困难, 那就是针对匀速直线运动的有粘流场, 按 Lamb 的方法, 将流场的扰动动量总和表征为运动体速度的函数后, 将是一个常矢量, 在使用流场动量定理时会得出流体动力等于零的结论, 这与实际流场显然是不吻合的. 经过认真分析发现 Lamb 方法的处理过程中并未注意到时变系统流场动量定理积分形式的特点, 而目前

多数流体力学中所介绍的流场动量定理积分形式仅针对固定系统或控制体(指空间固定区域)的情况.为此,本文研究了流场动量定理在时变系统上的一般形式,然后在此基础上,将Lamb的方法与Wu的方法相结合,初步给出了一种能基于稳态流场计算有粘流中运动体流体动力系数的方法.

## 1 时变系统及相关恒等式

为了方便动量定理的推导,首先介绍和定义一些基本概念,推导一些基本公式.需要强调的是,这里的部分公式早已为流体力学学家所熟知并经常应用<sup>[16-19]</sup>,这里重新推导和介绍只是为了系统地阐述这方面的内容并方便理解后续的工作.

### 1.1 时变系统和控制体

流体系统的概念在许多流体力学的著作中均有介绍,这里先引用文献[20]中的阐述,它和其他流体力学著作中的阐述是一致的;在此基础上将其概念推广到可变系统的情况.

流体力学中的系统是指由确定流体质点组成的流体团,流体系统 $\Omega$ 具有如下特点:

- ① 流体系统对应着一定的空间体积 $V_{\text{sys}}(t)$ , $V_{\text{sys}}(t)$ 的边界 $S_{\text{sys}}(t)$ 称为系统的边界;
- ② 系统的边界随着流体一起运动,系统体积、边界面的形状和大小可以随时间变化;
- ③ 在系统的边界处没有质量交换,即没有流体进入或跑出系统的边界;
- ④ 在系统的边界上,受到外界作用在系统上的表面力.

上面4条中,除了第一条,其他3条均引自文献[20].增加第一条的目的在于使人们用直观的体积概念理解抽象的系统概念,进而理解系统边界的概念.系统边界的变化可以用边界上点的运动速度 $\mathbf{v}_s$ 来表示,显然,对于上述定义的系统 $\mathbf{v}_s$ 等于边界面上流体质点的速度 $\mathbf{v}$ .需要强调的是,本文所指的速度,若非特殊说明,均针对惯性坐标系而言,并且近似认为地面坐标系为惯性坐标系.

在许多应用场合中需要用到时变系统的概念,例如在使用粒子图像测速法(PIV或DPIV<sup>[21]</sup>)进行流体力学实验时,所研究的对象就是一定区域内的流体,由于物体在流体中的运动使得给定区域中的流体并不是固定的,会有流体穿过边界;若将上面定义的系统称为固定系统,这时候研究的流体对象就应当视为可变系统 $\Omega(t)$ .重新定义系统的概念为一个封闭边界 $S(t)$ 所包含区域 $V(t)$ 中的流体总和;这样,当边界的运动速度 $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$ 时,则 $V(t)$ 所对应的流体为固定系统;否则,随着时间的变化就会有流体流进或流出边界 $S(t)$ , $V(t)$ 所对应的流体为时变系统.

控制体是指被流体流过,相对某个坐标系来说,固定不变的任何空间体积称为控制体 $V_0$ ,控制体的边界面称为控制面 $S_0$ ,它总是封闭曲面,占据控制体的诸流体质点是随时间而改变的.控制体或控制面具有如下特点<sup>[20]</sup>:

- ① 控制体的边界(控制面)相对于坐标系是固定的;
- ② 在控制面上可以有质量交换,即有流体跑进或跑出控制面;
- ③ 在控制面上受到控制体以外物体加在控制体之内物体上的力.

控制体的不变性是相对坐标系而言的,在动坐标系上定义的控制体,相对惯性坐标系可以出现平动和旋转,但不会出现形变.

### 1.2 物理量的积分及变化率

设有一物理量 $\mathbf{a}_\Omega$ 定义在系统 $\Omega(t)$ 上, $\Omega(t)$ 所含 $\mathbf{a}_\Omega$ 的总和可记为 $\mathbf{Q} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{a}_\Omega d\Omega$ .由于 $\Omega$ 和空间 $V(t)$ 是一一对应的,自然也可将 $\mathbf{a}_\Omega$ 视为定义在空间 $V(t)$ 上的函数.当定义域改变后,函

数值  $\mathbf{a}_\Omega$  也会改变为  $\mathbf{a}$ . 由于物理量  $\mathbf{a}$  是定义在空间  $V(t)$  上, 仅仅是空间位矢  $\mathbf{r}$  和时间  $t$  的函数,  $\mathbf{Q}$  与积分区域  $V(t)$  的大小、形状和位置有关, 但与边界的运动速度  $\mathbf{n}_s$  无关. 以上讨论针对系统边界  $\Sigma$  同样成立, 因此

$$\begin{cases} \int_{\Omega(t)} \mathbf{a}_\Omega d\Omega = \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \int_{V_0} \mathbf{a} dV, \\ \int_{\Sigma(t)} \mathbf{a}_\Sigma d\Sigma = \int_{S(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_0} \mathbf{a} dS, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $V_0 = V(t) |_{t=t_0}$ ,  $S_0 = S(t) |_{t=t_0}$ , 即  $V, S$  是时变的, 但  $V_0, S_0$  和相对给定坐标系均为固定值, 不随时间变化. 由于物理量  $\mathbf{a}$  是空间位矢  $\mathbf{r}$  和时间  $t$  的函数, 因此可以引入偏导数的概念,  $\partial\mathbf{a}/\partial t$  表示  $\mathbf{a}$  对时间求偏导数. 一个物理量的偏导数仍然是一个物理量, 根据上式, 它在大小、位置和形状相同但边界运动速度不同的两个空间区域上的积分相同, 因此

$$\int_{V(t)} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} dV = \int_{V_0} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} dV. \quad (2)$$

再根据偏导数的定义, 求变化率过程中不考虑流体质点的位置变化, 因此  $V(t)$  不变,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV \right] = \\ &= \int_{V(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{a}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)] dV = \int_{V(t)} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3)$$

合并上面两式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} dV = \int_{V_0} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \mathbf{a} dV, \quad (4)$$

上式表示对时间的偏导数符号  $\partial/\partial t$  是可以自由地移入或移除积分号, 这个结论将在后面的推导过程中默认使用. 若  $V_0$  表示其边界  $S_0$  相对惯性坐标系固定的空间区域, 即  $\mathbf{v}_{S_0} = 0$ , 则根据导数和偏导数的定义

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \mathbf{a} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \mathbf{a} dV. \quad (5)$$

最后, 对于体积分或面积分, 若  $V(t)$  和  $V'(t)$  表示不同坐标系下的同一个积分区域,  $S(t)$  和  $S'(t)$  表示不同坐标系下的同一个积分边界, 则由于矢量  $\mathbf{a}$  的值并不随坐标系的选择而变化, 因此

$$\begin{cases} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \int_{V'(t)} \mathbf{a} dV', \\ \int_{S(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S'(t)} \mathbf{a} dS'. \end{cases} \quad (6)$$

### 1.3 时变系统的输运方程

输运方程是推导流体力学动量定理中需要用到的重要公式, 但目前 Reynolds(雷诺)输运公式的表达形式多样, 本小节将先给出并证明如下形式的输运定理, 然后和现有文献中的结果进行比对和讨论.

**定理 1** 考虑两个边界运动速度不同的相同区域, 边界运动速度差异所导致的物理量  $\mathbf{a}$  在该区域上积分变化率的差异, 等于单位时间内  $\mathbf{a}$  以它们的边界速度差流出边界的流量, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV - \frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \mathbf{a} dV = \int_{S(t)} \mathbf{a} (\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_{S_1}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (7)$$

其中  $V(t)$  表示一个时变的体积区域, 它可以对应一个确定的系统, 也可对应于一个时变的系

统,其边界  $S(t)$  的运动速度为  $\mathbf{v}_s$ ;  $\mathbf{n}$  表示  $V(t)$  边界的外法向方向,它只与边界的形状有关而与边界的运动速度无关.  $V_1(t) = V(t)$ ,但其边界  $S_1(t)$  的运动速度  $\mathbf{v}_{s_1}$  不一定等于  $\mathbf{v}_s$ .

**证明** 设某系统所占领空间区域为  $V(t)$ ,对应的边界位置为  $S(t)$ ,边界的移动速度为  $\mathbf{v}_s$ ;  $\mathbf{v}_s$  在边界面不同的位置可以不同,即  $V(t)$  的形状可变.又设有一虚拟边界位置为  $S_{\text{sys}}(t)$ ,包含着固定的流体系统,所占领的空间区域记为  $V_{\text{sys}}(t)$ .在某  $t$  时刻  $S_{\text{sys}}(t)$  和  $S(t)$  完全重合,但  $S_{\text{sys}}(t)$  上点的运动速度与流体的运动速度相同,即  $\mathbf{v}_{\text{sys}} = \mathbf{v}$ .这样,考虑两个积分

$$\mathbf{Q} = \int_{V(t)} \mathbf{a} dV, \quad \mathbf{Q}_{\text{sys}} = \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV. \quad (8)$$

显然  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\text{sys}}$ ,但它们关于时间的变化率则不同,根据导数的定义,求导过程中应当考虑流体质点位置变化的影响,因此

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV + \frac{d}{dt} \int_{V(t) - V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV. \quad (9)$$

上式等号右边第二项根据导数的定义为

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t) - V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t) - V_{\text{sys}}(t+\Delta t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t) - V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV \right], \quad (10)$$

在  $t$  时刻  $V(t) = V_{\text{sys}}(t)$ ,因此上式右边第二项等于零.第一项表示  $\Delta t$  时间内因  $V(t)$  和  $V_{\text{sys}}(t)$  边界运动速度不同而导致  $V(t + \Delta t)$  和  $V_{\text{sys}}(t + \Delta t)$  体积差异而增加的物理量  $\mathbf{a}$ .  $\Delta t$  时间内面积为  $dS$  边界上所对应的体积差异为  $dV = \Delta t(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$  (注意  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$  时没有流体质点流出体积区域  $V_{\text{sys}}(t)$ ).对整个曲面积分应为  $\Delta t$  内  $V(t)$  与  $V_{\text{sys}}(t)$  的差,于是

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t+\Delta t) - V_{\text{sys}}(t+\Delta t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV &= \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_{S(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \Delta t (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{S(t)} \mathbf{a}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (11)$$

综上所述可得

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV + \int_{S(t)} \mathbf{a}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (12)$$

设有另外一个空间区域  $V_1(t) = V(t)$  且  $V_1(t)$  的边界  $S_1(t)$  的运动速度为  $\mathbf{v}_{s_1}$ .将上式中的  $V(t)$  替换为  $V_1(t)$ ,则  $\mathbf{v}_s$  应替换为  $\mathbf{v}_{s_1}$ ,虽然积分边界  $S(t)$  应同时改为  $S_1(t)$ ,但根据式(1)也可以不改,因此

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \mathbf{a} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV + \int_{S(t)} \mathbf{a}(\mathbf{v}_{s_1} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13)$$

将上述两式相减并整理即得式(7).

令式(7)中  $V_1(t)$  的边界固定,即  $V_1(t) = V_0, \mathbf{v}_{s_1} = 0$ ,则综合式(7)、(4)和(5)可得

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \mathbf{a} dV + \int_{S_0} \mathbf{a} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS. \quad (14)$$

上式表明,一个物理量在可变区域上积分对时间的变化率,等于物理量  $\mathbf{a}$  在对应控制体  $V_0$  上积分的变化率(可以看做对时间的导数或偏导数均可),加上单位时间内系统边界运动导致物理量  $\mathbf{a}$  离开  $t$  时刻系统所对应的边界  $S_i$  (根据式(1)也可以认为是  $S_0$ ) 的流量.这个公式针对时变系统亦成立,即系统所对应的空间体积可以平移、缩减或变形,并且边界面的运动速度不一定和当地流场质点运动速度相同.



注 输运方程在许多流体力学的教科书中都有介绍,通过比较式(14)和(7)与教材中的相关内容,我们可以看出本文所建立的时变系统的输运方程更具一般性.文献[20]中输运方程表达式为

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV = \int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dV + \int_{S_0} \mathbf{a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (15)$$

其中  $V_{\text{sys}}(t)$  是指固定系统所占领的空间,它是时变的,  $V_0$  是指控制体,确切地说,  $V_0$  是  $V(t)$  在指定  $t$  时刻所占领的体积空间,因而是固定的,  $S_0$  是  $V_0$  的边界.和方程(14)或(7)相比,并注意到式(4)可知上式是式(7)的特例,但上式只能用于固定系统.文献[22]给出了另外一种形式的 Reynolds 输运方程表达式:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV = \int_{V_{\text{sys}}(t)} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dV + \int_{S_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (16)$$

原文明确积分区域为“物质控制体”,它表示一个固定系统所占领的空间,因此用  $V_{\text{sys}}(t)$  表示.上式与式(15)的区别在于等号右边的积分区域不同,根据式(1)可知上式和式(15)是一致的,因此上式也是式(14)在固定系统下的特例.文献[21]介绍 Candel 著作中的 Reynolds 输运定理形式为

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{a} dV + \int_{S_{\text{sys}}(t)} \mathbf{a} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

其中  $V_{\text{sys}}(t)$  表示固定系统所占领的空间体积,而  $V(t)$  则是指  $V_{\text{sys}}(t)$  所对应的系统在运动过程中所对应的任一个体积区域.与式(7)比对可知,上式是式(7)中  $V_1(t) = V_{\text{sys}}(t)$  的特例.文献[18]所给出的 Reynolds 输运方程与式(14)一致,从上面的分析可知,文献[18]所给出的 Reynolds 输运定理也是式(7)的特例.

### 1.4 时变系统的第二输运方程

**定理 2** 若  $V(t)$  为任意时变系统所对应的流场空间区域且其边界相对惯性坐标系的运动速度为  $\mathbf{v}_s$ , 则下式成立:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{a} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{a}}{dt} dV + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{a} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (18)$$

其中,  $\rho$  是流体密度.这里称上式为时变系统的第二输运方程.

**证明** 令式(14)中的  $\mathbf{a} = \rho \mathbf{b}$  可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{b})}{\partial t} dV + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{b} (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{b})}{\partial t} dV + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \oint_{S(t)} \rho \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{b} (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (19)$$

利用 Gauss(高斯)公式并注意到式(1)可得

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{b}) \right] dV + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{b} [(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS, \quad (20)$$

上式等号右边第一项的被积函数可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{b}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{b}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho \mathbf{b}) + (\rho \mathbf{b}) \nabla \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{b}) + (\rho \mathbf{b}) \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{b} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = \rho \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中第一个等号利用了并矢的散度公式  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla(\mathbf{b}) + (\mathbf{b}) \nabla \cdot \mathbf{a}$ , 最后一个等号利用了流体的质量守恒方程<sup>[23-24]</sup>

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (22)$$

合并上面 3 式并将  $\mathbf{b}$  换成  $\mathbf{a}$  即得式(18).

若  $V(t)$  所包含的流体构成固定系统,即  $V(t) = V_{\text{sys}}(t)$  且其边界运动速度  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$ , 则

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho \mathbf{a} dV = \int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho \frac{d\mathbf{a}}{dt} dV, \quad (23)$$

其中  $V_{\text{sys}}(t)$  为固定系统所对应的空间体积, 这个公式在一般的流体力学教材中均可找到<sup>[24]</sup>, 因此公式(18)是上式在时变系统所对应空间区域上的扩展。

## 2 流场动量定理的积分形式

本节将分别基于定质量系统的 Newton 第二定律和变质量系统的 Meshcherskii (密歇尔斯基) 定理来推导流体动量定理的积分形式。两种方法得到了一致的结论, 最后将所得结果与现有流体力学专著中的流体动量定理积分形式比较, 说明新结果的特点和意义。

### 2.1 基于定质量系统 Newton 第二定律的推导方法

将一个时变系统所占领的空间区域  $V(t)$  中的流场划分为许多体积微元  $dV$ , 对于每个体积微元而言, 其对应的流体质量为  $\rho dV$ , 速度为  $\mathbf{v}$ 。根据 Newton 第二定律, 流体质点动量的变化率等于合外力。在时刻  $t$  每个流体质点微元受到旁边流体质点或物面的面元力 (内力或流体应力  $\mathbf{f}_i dS$ ) 和外部施力体的作用力 (外力或体积力, 如重力或电磁力  $\mathbf{f}_o dV$ )。Newton 第二定律只能用于质点对象不变的“常质点系”, 一个流体质点动量的变化率应该是  $\rho(d\mathbf{v}/dt)dV$  而不是  $[d(\rho\mathbf{v})/dt]dV$  (后者表示体积微元  $dV$  所含流体动量的变化率, 对应的是时变的质量), 于是

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{S_{dV}} \mathbf{f}_i dS + \mathbf{f}_o dV, \quad (24)$$

这里的  $d\mathbf{v}/dt$  是指流体质点在惯性坐标系中速度的变化率,  $S_{dV}$  表示体积微元  $dV$  的表面积。

以在某一时刻  $V(t)$  中所包含的所有流体质点作为研究对象, 显然每个流体质点都应该满足微分形式的动量方程(24)。将每个流体质点的动力学方程求和(积分)得

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V(t)} \int_{S_{dV}} \mathbf{f}_i dS dV + \int_{V(t)} \mathbf{f}_o dV = \int_S \mathbf{f}_i dS + \int_{V(t)} \mathbf{f}_o dV. \quad (25)$$

考虑到内力互相抵消, 右边的第一项实际上就是流场应力  $\mathbf{f}_i$  在控制区域  $V(t)$  边界  $S(t)$  上的积分, 右边第二项是作用于控制区域  $V(t)$  上的体积力。这些力的分类和计算方法在流体力学教材中均有详细介绍, 这里将其合力简记为  $\mathbf{F}_V$ 。这里并没有标记为  $\mathbf{F}_{V(t)}$  是因为作用在  $V(t)$  中流体上的合外力与  $S(t)$  上点的运动速度无关。根据以上讨论可得流体力学动量方程的第一种积分形式

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \mathbf{F}_V. \quad (26)$$

利用公式(18)可得动量定理的第二种积分形式

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV - \oint_{S(t)} \rho \mathbf{v} [(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS = \mathbf{F}_V, \quad (27)$$

其中  $\mathbf{v}_s$  为可变体积区域边界的运动速度, 若  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$ , 则  $V(t)$  所包含的流体团为固定系统, 否则为时变系统。若  $\mathbf{v}_s = 0$ , 则系统所对应的空间区域为控制体, 利用式(14)可得动量定理的第三种积分形式

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{F}_V, \quad (28)$$

上式的推导利用了面积分与面运动速度无关的结论, 因此  $S$  和  $S_0$  可互换。考虑到式(4)可以得到动量定理的第四种积分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{F}_V. \quad (29)$$

上两式表明流场动量偏导数的积分(或积分的偏导数)加上单位时间内因流体运动离开  $t$  时刻

系统所对应的边界  $S_0$  (或所谓控制体边界) 的动量流量等于作用在流体对象上的合外力。

若根据 Gauss 公式改写上述式子中的面积分, 则可在上面 4 种动量定理的积分形式演变出另外 4 种流体动量定理的积分形式。

从上面推导过程中可以看出, 其主要思路是根据一个时变体积区域中动量变化率的总和 (而不是时变体积区域中动量总和的变化率) 等于合外力来得到动量定理, 这种思路避免了因积分区域可变所对应的“变质量系统”问题而不能直接使用 Newton 第二定律。

## 2.2 基于变质量系统 Meshcherskii 定律的推导方法

可变控制区域中的流体质量是时变的, 其动量定理积分形式的第二种推导方法将使用 Meshcherskii 方程<sup>[25]</sup>来研究。对于一个质量可变的质点系, Meshcherskii 方程表明

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{v}_1 \frac{dm}{dt}, \quad (30)$$

其中  $\mathbf{v}_1$  为离开系统质点的绝对速度。上式表明一个质量可变质点系的动量变化率等于合外力加上单位时间内离开质点系物质所携带的动量。现在考虑一个可变体积区域  $V(t)$  中的流体, 在某一个时刻所包含的流体动量总和为  $\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV$ , 单位时间  $V(t)$  增加的流体质量为  $\int_{S(t)} \rho (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$  (应当注意  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$  时, 控制区域中的流体质量是恒定的), 所携带的动量为  $\int_{S(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$ , 作用在  $V(t)$  上的合外力仍设为  $\mathbf{F}_V$ , 根据 Meshcherskii 方程有

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_V + \int_{S(t)} \rho \mathbf{v} [(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (31)$$

上式和动量定理的第二种积分形式(27)一致, 因此可得第二种推导结果和第一种推导结果是一致的。

## 2.3 现有文献中流场积分形式动量定理讨论

为了避免重复, 这里仅介绍各种流体力学教材、专著或博士论文中流体动量定理。由于多数期刊论文的研究都是直接引用教材或专著中的公式, 因此不介绍这些二手的资料。另外为了方便比较, 符号已统一成本文的符号, 并且全部用矢量形式表示。

Prandtl (普朗特) 和 Tietjens 所著的《流体和气体力学》<sup>[26]</sup> 给出了两种形式的动量定理, 第一种为

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_V, \quad (32)$$

原文明确指出其积分区域是固定流体质点所构成的区域, 因此采用  $V_{\text{sys}}(t)$  来表示其积分区域。上式可由式(27) 令其中的  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$  得到, 因此是本文推导的动量定理在固定系统上的一种表达形式。

文献[26]给出的第二种形式为

$$\int_{V(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = \mathbf{F}_V. \quad (33)$$

根据上下文的理解, 上面的积分区域仍表示固定系统所包含的区域  $V_{\text{sys}}(t)$ ; 但根据其推导过程, 则无需如此限制, 因此仍用  $V(t)$  来表示积分区域。根据 Gauss 公式可知, 在  $\rho$  为常数的情况下上式等号左端第二个体积分为  $\int_{S(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$ , 上式等号左端第一项根据式(1) 可将积分区域  $V(t)$  改写为  $V_0$ , 因此上式与本文所推导得到的第三种动量定理积分形式(28)是一致的。



Noca 的博士论文<sup>[21]</sup>所给出的流体动量定理为

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \rho \mathbf{v} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}] dS = \mathbf{F}_V, \quad (34)$$

原文明确  $V(t)$  是时变的, 上式和式(27)相同. 这里需要说明的是, 上式才是符合实际应用需要的动量定理表达式. Noca 在文献[21]的第82页式(6.28)给出上式左边第一项的数值计算方法为

$$\begin{cases} A(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV, \\ \frac{dA(t)}{dt} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \end{cases} \quad (35)$$

从上式可以看出, 对于时变  $V(t)$ ,  $dA(t)/dt$  才方便数值计算, 而  $\partial A(t)/\partial t$  并不方便计算.

Katz 和 Plotkin 所著的《低速空气动力学》<sup>[23]</sup>和 Anderson 所著的《流体力学基础》<sup>[27]</sup>认为“流过控制区域的流体动量的变化率等于合外力”, 并基于这种说法得到如下形式动量定理的积分形式:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_V, \quad (36)$$

原文明确了上式的积分区域是固定的, 这个结果显然是不对的, 流过固定控制区域的流体总和并非固定系统, 其边界运动速度为  $\mathbf{v}_s = 0$  而不是  $\mathbf{v}$ , 与式(27)比较可知上式不一定成立.

Katz 和 Plotkin 又认为“流过控制区域的流体动量的变化率等于控制区域中流体动量之和的累积率加上外部流入控制区域的动量变化率”; Anderson 则认为“流过控制区域的流体动量的变化率等于流出控制体流体动量的速率加上控制体中流体非定常运动引起的动量变化率”. 他们根据这两个类似的观点(事实上就是固定系统上的输运定律)给出了另一种形式的流体的动量定理积分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \mathbf{v} dV + \int_{V_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{F}_V. \quad (37)$$

Katz, Plotkin 和 Anderson 的上述两种流场动量定理的积分形式均明确积分区域相对惯性坐标系是固定不变的. 因此和式(29)相同.

Batchelor 在其所著的《流体动力学导论》<sup>[28]</sup>中也给出了两种形式的动量定理, 第一种形式为

$$\int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \mathbf{F}_V, \quad (38)$$

原文明确积分区域为固定系统的流体所占领的区域, 因而是时变的并采用符号  $V_{\text{sys}}(t)$  来标记. 这种形式的动量定理是式(26)中  $V(t) = V_{\text{sys}}(t)$  的特例. Batchelor 所给出的第二种形式动量定理为

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{F}_V, \quad (39)$$

原文明确上式的积分区域  $V_0$  为固定区域, 因此上式和式(28)是一致的.

易中等所著的《低速空气动力学》<sup>[24]</sup>所给出的积分形式动量定理为

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_V, \quad (40)$$

原文并未明确积分区域是否可变, 因此积分区域用  $V(t)$  表示. 根据式(27)可知, 除非  $V(t) = V_{\text{sys}}(t)$ , 上式是不成立的.

吴子牛教授等所著的《空气动力学》<sup>[18]</sup>也给出了两种形式的流场动量定理, 第一种形式为

$$\rho \int_{V(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \mathbf{F}_V, \quad (41)$$

其中积分区域明确为任意区域,因此用  $V(t)$  表示,同时原文在推导过程中假设流场为均匀的不可压缩流,因此  $\rho$  为常数.在这种情况下,上式和式(26)是一致的,因此上式是式(26)的特例.文献[18]所给出的第二种动量定理积分形式为

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{v} dV + \rho \int_{S(t)} \mathbf{v} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}] dS = \mathbf{F}_V, \quad (42)$$

上式的推导过程中仍用到了不可压缩流体假设.与式(27)对比可知,上式是式(27)在流场密度为常数下的一种特殊情况.

### 3 有粘流中运动体的流体动力系数算法

本节将介绍 Lamb 和 Wu 的流体动力表达式,然后提出准平衡假设的概念,并在此基础上介绍 Lamb 流体动力系数算法并将其拓展到有粘流中去.

#### 3.1 流体动力表达式

取物面和无穷远固定边界之间的流体作为研究对象,根据动量定理表达式(27)可得

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{v} dV + \rho \int_{S+S_e} \mathbf{v} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}] dS = -\mathbf{F} - \int_{S_e} p \mathbf{n} dS, \quad (43)$$

其中  $\mathbf{F}$  表示流体动力,等号右边的积分表示作用在无穷远固定边界上压强的积分.由于流体无法穿透物面,所以  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} = 0$ ,这样上式等号左边与  $S$  有关的面积分等于零.由于  $S_e$  为固定边界,因此在  $S_e$  上  $\mathbf{v}_S = 0$ ,根据 Lamb<sup>[1]</sup>和 Wu<sup>[14]</sup>的分析,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  在  $S_e$  上的积分等于零,这样上式等号左边第二项等于零,即

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{v} dV - \int_{S_e} p \mathbf{n} dS. \quad (44)$$

Wu 的推导结果表明  $\int_{S_e} p \mathbf{n} dS$  与流场中的第一涡量矩有关,在考虑远场压强积分变化率的影响后,他给出如下流体动力表达式:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -\frac{\rho}{2} \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{V_b} \rho \mathbf{v} dV, \\ \boldsymbol{\alpha} = \int_{V_\infty(t)+V_b} \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}) dV = \int_{V_\infty(t)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV + \int_{V_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV, \end{cases} \quad (45)$$

其中  $V_b$  为运动体所占的空间区域,  $\boldsymbol{\alpha}$  称为第一涡量矩.对于无粘流场, Lamb 认为远场压力的积分结果为零;从 Wu 的结果来看,无粘流场中不存在涡,也就没有涡量矩,因此  $\int_{S_e} p \mathbf{n} dS = 0$ ,因此就结论而言, Lamb 和 Wu 的理论在这一点上是相洽的.这样

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_{V_\infty(t)} \rho \mathbf{v} dV. \quad (46)$$

这个结果和 Lamb 的流体动力表达式是一致的,唯一的区别是 Lamb 把积分结果和求导过程分开了,即

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad \mathbf{Q} = \int_{V_\infty(t)} \rho \mathbf{v} dV. \quad (47)$$

在已知流场的情况下,上述式子只能计算流体动力,而不能确定流体动力系数,即无法确定运动体流体动力与其各速度分量之间的关系,下一小节起将详细讨论流体动力系数的算法.

### 3.2 准平衡假设下运动体的流体动力系数计算

在不可压缩流场或飞艇的气动力研究中,运动体的速度、角速度、加速度和角加速度都比较小,在这种情况下,可以认为流场在每个时刻都直接到达由运动体速度和角速度所对应的定常流场状态,这种处理方式忽略了流场的延迟性,这里称为准平衡假设.这种假设事实上也被 Lamb 步骤(4)中默认采纳,或者说被 Kirchhoff 默认采纳,因为 Kirchhoff 给出了如下速度势与运动体表面边界条件之间的关系式:

$$\phi = v_{b,x}\phi_1 + v_{b,y}\phi_2 + v_{b,z}\phi_3 + \omega_{b,x}\chi_1 + \omega_{b,y}\chi_2 + \omega_{b,z}\chi_3, \quad (48)$$

上式中的  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$  “取决于运动体在指定坐标系中的外形”<sup>[1]</sup>. 这个关系式表明无粘流场中的扰动速势,进而扰动速度仅取决于运动体的外形、速度和角速度,而与运动体的运动加速度和角加速度无关,显然采用了准平衡假设. Lamb 采用 Kirchhoff 的上述公式将空间区域  $V_\infty(t)$  上的流体扰动动量积分表示为运动体速度  $\mathbf{v}_b$  和角速度  $\boldsymbol{\omega}_b$  的函数,

$$\int_{V_\infty(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{A} \mathbf{v}_b + \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_b, \quad (49)$$

其中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  是由附加质量和惯量矩阵所组成的二阶张量,它们仍然仅“取决于运动体在指定坐标系中的外形”. 根据这个结果, Lamb 得到了如下流体动力表达式:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A} \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} + \mathbf{B} \frac{d\boldsymbol{\omega}_b}{dt}. \quad (50)$$

这个流体动力表达式因为建立了运动体流体动力与其速度变化率之间的关系,因此可以用于确定流体动力系数,更具实用性.

对于有粘流场,在准平衡假设下可以认为流场中的扰动速度同样取决于运动体的速度和角速度,但它们之间的关系是非线性的,即

$$\begin{cases} \phi = f(v_{b,x}, v_{b,y}, v_{b,z}, \omega_{b,x}, \omega_{b,y}, \omega_{b,z}) = f(\mathbf{v}_b, \boldsymbol{\omega}_b), \\ \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{v}_b, \boldsymbol{\omega}_b), \end{cases} \quad (51)$$

其中函数  $f, \mathbf{g}$  取决于运动体边界相对流场的位置;  $\mathbf{v}_b, \boldsymbol{\omega}_b$  分别为矢量  $\mathbf{v}_b, \boldsymbol{\omega}_b$  所对应的坐标列阵. 为了研究有粘流情况下的流体动力系数,流体动力表达式应当采用 Wu 或涡动力学中的形式(45). 此式等号右边第二项按 Wu 的观点<sup>[14]</sup>表示运动体上每个质点密度均采用流场流体密度代替后所产生的惯性力,由于运动体上每个质点的速度在已知  $\mathbf{v}_b, \boldsymbol{\omega}_b$  的情况下根据刚体动力学理论容易确定,因此不进一步讨论. 对于第一项,  $d/dt$  为全导数,需要考虑积分区域的变化,为了方便计算需要将其转换成偏导数. 取一个新的空间区域  $V_{\infty,1} = V_\infty$ , 但新的空间区域内边界  $S_{b,1}$  并不随着运动体的运动而改变. 在这种情况下  $V_{\infty,1}$  相对惯性坐标系是固定的,在其上积分结果全导数等于偏导数. 根据输运方程(7)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty,1}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV - \frac{\rho}{2} \int_{S_b} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \\ & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV + \frac{d}{dt} \int_{V_b} \rho \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (52)$$

将第一项中的被积函数用式(51)的结果代入,于是有

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty,1}} \mathbf{g}_1 dV + \mathbf{F}_s - \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_b} \mathbf{v} dV, \\ \mathbf{F}_s = -\frac{\rho}{2} \int_{S_b} \mathbf{g}_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \mathbf{g}_1 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (53)$$

这就是有粘流中流体动力的计算表达式.上式等号右边第一项的积分结果仅取决于运动体的速度和角速度,而对时间的偏导数并不考虑流场空间位置变化的影响,因此在运动体保持  $\mathbf{v}_b$ ,  $\boldsymbol{\omega}_b$  不变的情况下等于零.第一项表征的是运动体作非定常运动所引起的流体动力,它可以用不同  $\mathbf{v}_b$ ,  $\boldsymbol{\omega}_b$  下所对应的定常流场,使用差分的方法来计算得到.当  $\mathbf{v}_b$ ,  $\boldsymbol{\omega}_b$  不变时,等号右边的第二项相当于提供了定常流体动力.为了证明结果的合理性,下一小节将进一步证明这一项在运动体匀速直线运动的情况下,无粘流中等于零以符合 d' Alembert 佯谬的结论,而有粘流情况下不一定等于零以符合实际情况.

Lamb 在采用 Kirchhoff 关系式导出类似上式的过程中,并没有注意到积分区域  $V_\infty$  是时变的.在式(46)中,  $d/dt$  仍表示全导数的符号;在式(50)中,由于  $\mathbf{v}_b$ ,  $\boldsymbol{\omega}_b$  与空间位置无关,因此  $d/dt = \partial/\partial t$ .这样 Lamb 在从式(46)到(50)的过程中,实际上将全导数符号不知不觉地更换成了偏导数的符号.这种不知不觉的更换过程是错误的,因为  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  是空间位置的函数,对其求导并不能用对时间的偏导数来代替.在式(49)中,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  并非“取决于运动体在指定坐标系中的外形”,而是取决于运动体边界相对于流场的位置.因此对  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  求导数时需要考虑空间位置变化的影响.上面从式(52)到(53)的推导过程将全导数正确转换为对时间的偏导数,避免对  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  求全导数的复杂运算,但这样会多出一项表征定常流体动力的项  $\mathbf{F}_s$ , 即

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty,1}} \mathbf{v} dV + \mathbf{F}_s, \\ \mathbf{F}_s = -\rho \int_{S_b} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \end{cases} \quad (54)$$

### 3.3 匀速运动情况下的定常流体动力 $\mathbf{F}_s$ 分析

针对式(53)中的  $\mathbf{F}_s$ , 由于  $\mathbf{g}_1$  是关于  $\boldsymbol{\omega}$  的函数, 而有粘流场中存在涡, 因此  $\mathbf{F}_s$  一般不为零, 与实际情况一致. 对于无粘流场, 本节将证明式(54)中的  $\mathbf{F}_s$  在无粘流情况下等于零, 从而与 d' Alembert 佯谬的结果一致, 同时也说明 Lamb 的无粘流流体动力计算方法中忽视这一项并不会产生负面后果. 考虑到  $\int_{S_\infty} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$  在  $S_\infty$  距离物面足够远处趋于零<sup>[14]</sup>, 同时根据 Gauss 公式可将  $\mathbf{F}_s$  的表达式改写为

$$\mathbf{F}_s = \int_{S_b(t) + S_\infty(t)} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_{V_\infty} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) dV. \quad (55)$$

根据并矢的展开公式可知

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad (56)$$

对不可压缩流体  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , 因此上式右边最后一项等于零, 于是

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (57)$$

将矢量写成坐标列阵和基矢量组合的形式可以证明下面式子为恒等式

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} = a_x \nabla v_x + a_y \nabla v_y + a_z \nabla v_z - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (58)$$

分别令  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$  可得

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (59)$$

将上式代入式(57)后再代入  $\mathbf{F}_s$  的表达式可得

$$\mathbf{F}_s = \rho \int_{V_\infty} \nabla(v^2/2) dV - \rho \int_{V_\infty} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) dV, \quad (60)$$

对于上式右边的第一项, 由于  $v^2/2$  在整个空间上是单值函数, 因此它的梯度在任意一条封闭曲面上的积分等于零

$$\rho \oint_L \nabla(v^2/2) dl = \rho \oint_L d(v^2/2) = 0. \quad (61)$$

将积分区域  $V_{\infty}(t)$  划分为许多面,每个面又划分为许多宽度趋于无穷小的封闭曲线,则可证明式(60)的右边第一项为零,因此

$$\mathbf{F}_s = -\rho \int_{V_{\infty}} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) dV. \quad (62)$$

当运动体匀速运动时,对于无粘流的情况,流场中不存在涡,  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ,因此定常流体动力  $\mathbf{F}_s = 0$ ,因此 Lamb 的处理方法虽然遗漏了定常气动力,但不会导致错误。

## 4 算例分析

在准平衡假设下,根据式(53)可以计算有粘流中的非定常气动力.式(53)中与  $V_b$  有关的部分根据 Wu 的建议,被积分函数中的  $\mathbf{v}$  取运动体上对应点的速度,因而是已知的<sup>[14]</sup>,这里不予进一步讨论.式(53)中的  $\mathbf{F}_s$  属于定常气动力,因此仅讨论式(53)中等号右端的第一项

$$\mathbf{F}_u = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\infty,1}} \mathbf{g}_1 dV, \quad (63)$$

注意到  $\mathbf{F}_u$  与  $\rho$  成正比,不妨设  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ .为了简化起见,这里仅讨论运动体作匀速直线运动时的非定常阻力.运动体的外形是一个旋成椭球体,其长半轴长度为 11.44 m,短半轴长度为 2.86 m.计算中先采用 CFD 方法可求得运动体速度分别为 5, 10, 15, 20, 25 m/s 时的流场速度,考虑到流场的对称性,采用二维网格仅计算一个经纬面上的流场以减小计算量.由于 CFD 计算中采用的是非结构化网格,计算完成后采用插值的方法获得结构化网格上的流场速度值,然后采用差分的方法获得流场的涡量  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ .最后根据公式

$$\boldsymbol{\alpha}' = \int_{V_{\infty,1}} \mathbf{g}_1 dV = \sum \mathbf{g}_1 \pi r_y dS \quad (64)$$

可求得整个流场上的第一涡量矩之和.其中  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$  是流场每一点上的涡量矩,  $dS$  是对应点在经纬面上的微元面积,  $r_y$  是流场中对应点到对称轴的距离,  $\pi r_y dS$  是对应点上的微元体积.流场的第一涡量矩  $\boldsymbol{\alpha}'$  的方向与运动体速度  $\mathbf{v}_b$  的方向一致,其大小随运动体速度的变化曲线如图 1 所示,其中左图表示的曲线是层流时的结果,右图表示的是湍流时的结果,湍流采用  $k-\epsilon$  模型.从图中可以看出,无论是层流还是湍流,流场第一涡量矩的大小  $\alpha$  均近似随运动体的速度成线性变化,而且斜率几乎一致.通过曲线拟合的方法可知层流情况下的斜率为  $501 \text{ m}^3$ ,湍流情况下的斜率为  $487 \text{ m}^3$ ,二者近似相等.这个结果并非说明流场的形态对气动力没有影响,只能说对本文所选取的旋成椭球而言,流场形态对其非定常阻力系数影响不大.

根据上面求得的流场第一涡量矩大小与运动体速度大小的关系是

$$\alpha = \begin{cases} 501v_b, & \text{laminar flow,} \\ 487v_b, & \text{turbulence.} \end{cases} \quad (65)$$

由此可求得所对应的非定常气动力为

$$\mathbf{F}_u = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{501\rho}{2} \frac{\partial v_b}{\partial t} = -307 \frac{dv_b}{dt}, & \text{laminar flow,} \\ -\frac{487\rho}{2} \frac{\partial v_b}{\partial t} = -298 \frac{dv_b}{dt}, & \text{turbulence.} \end{cases} \quad (66)$$

根据附加质量的定义式<sup>[11]</sup>,层流时这个旋成椭球体沿长轴方向运动时所对应的附加质量为  $m_{11,La} = 307 \text{ kg}$ ,湍流时长轴方向所对应的附加质量是  $m_{11,Tu} = 298 \text{ kg}$ .再根据附加质量系数的定义  $m_{11} = \rho U k_{11}$ <sup>[11]</sup> 可求得层流时的附加质量系数  $k_{11,La} = 0.64$ ,湍流时的附加质量系数为  $k_{11,Tu} = 0.62$ ,其中  $U = 392 \text{ m}^3$  为运动体的体积.这个结果表明,在考虑空气粘性的情况下,  $\mathbf{F}_u$  所对应的



附加质量超过其本身质量的一半.按照 Wu 的做法,运动体所占领空间上被积函数的速度用运动体上对应点的速度来替换<sup>[14]</sup>,则式(53)第一式等号右端第三项等于零,第四项所对应的附加质量等于飞艇质量的一半.与  $F_u$  所对应的附加质量抵消后,总附加质量系数仍可达 0.12~0.14 左右,远远高出文献[11]中所给出的无粘流结果 0.078.说明有粘流和无粘流中的非定常气动力是有较大区别的.研究有粘流非定常气动力有一定的意义.

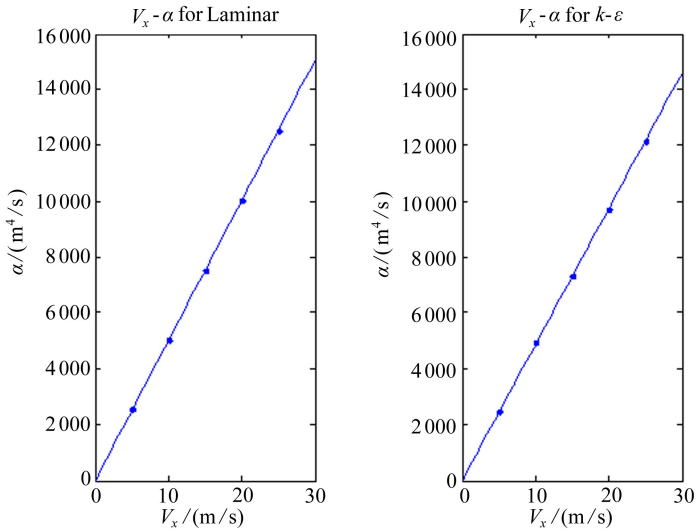


图 1 层流与湍流情况下流场第一涡量矩与运动体速度之间的关系曲线  
Fig. 1 The relationship between the 1st vortex moment and the body velocity in laminar and turbulent flows respectively

## 5 结 论

从本文的研究中可以得出如下结论:

1) 对于时变系统而言,其输运方程和动量定理均与固定系统不同;输运方程会多出一些因边界运动速度与对应位置流体质点速度不同而产生的通量项;动量定理不能表示为“系统中流体动量(之和)的变化率等于合外力”,而应该是“系统中的流体动量变化率之和等于合外力”。

2) 若采用时变系统的输运方程来计算流体动力表达式中的导数项,可使得流体动力表达式多出一个定常流体动力项,这将使结果在有粘流中更符合事实。

3) 若采用准平衡假设,则可追随 Lamb 的思想,根据定常流场计算有粘流场的非定常流体动力系数。

### 参考文献 (References):

- [1] Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. 6th ed. New York: Dover, 1945.
- [2] Tuckerman L B. Inertia factors of ellipsoids for use in airship design[R]. Technical Report Archive and Image Library, 1926.
- [3] Allen H J. Estimation of the forces and moments acting on inclined bodies of revolution of high fineness ratio[R]. Technical Report Archive and Image Library, 1949.
- [4] Allen H J, Perkins E W. A study of effects of viscosity on flow over slender inclined bodies of revolution[R]. Technical Report Archive and Image Library, 1951.
- [5] Hopkins E J. A semi-empirical method for calculating the pitching moment of bodies of revo-

- lution at low Mach numbers[R]. Technical Report Archive and Image Library, 1951.
- [6] Jones S P, deLaurier J D. Aerodynamic estimation techniques for aerostats and airships[J]. *Journal of Aircraft*, 1983, **20**(2): 120-126.
- [7] Khoury G A, Gillett J D. *Airship Technology*[M]. New York: Cambridge University Press, 1999.
- [8] Mueller J B, Paluszek M A, Zhao Y Y. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship[C]//*AIAA 3rd "Unmanned Unlimited" Technical Conference, Workshop and Exhibit*. Chicago, Illinois, 2004: 1-17.
- [9] Li Y W, Nahon M. Modeling and simulation of airship dynamics[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, **30**(6): 1691-1700.
- [10] Li Y W, Nahon M, Sharf I. Airship dynamics modeling: a literature review[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2011, **47**(3): 217-239.
- [11] 基里林·阿列克桑德拉·尼卡拉伊维奇. 现代飞艇设计导论[M]. 吴飞, 王培美, 译. 北京: 国防工业出版社, 2009.( Kirilin A K. *Introduction to Modern Airship Design*[M]. WU Fei, WANG Pei-mei, transl. Beijing: National Defend Industry Press, 2009.( Chinese version ) )
- [12] Sebbane Y B. *Lighter Than Air Robots*[M]. Springer, 2012.
- [13] Wu J C. Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows[J]. *AIAA Journal*, 1981, **19**(4): 432-441.
- [14] Wu J C. *Elements of Vorticity Aerodynamics*[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2014.
- [15] 童秉纲, 尹协远, 朱克勤. 涡运动理论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009.( TONG Bing-gang, YIN Xie-yuan, ZHU Ke-qin. *Vortex Motion Theory*[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2009.( in Chinese ) )
- [16] WU Jie-zhi, MA Hi-yang, ZHOU Ming-de. *Vortical Flows*[M]. Springer, 2007.
- [17] Noca F, Shiels D, Jeon D. A comparison of methods for evaluating time-dependent fluid dynamic forces on bodies, using only velocity fields and their derivatives[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, **13**(5): 551-578.
- [18] 吴子牛, 王兵, 周睿, 徐珊姝. 空气动力学(下册)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.( WU Zi-niu, WANG Bing, ZHOU Rui, XU Shan-shu. *Aerodynamics(Volume Two)*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.( in Chinese ) )
- [19] Wu J Z, Ma H Y, Zhou M D. *Vorticity and Vortex Dynamics*[M]. Springer, 2006.
- [20] 清华大学工程力学系. 流体力学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1980.( Department of Engineering Mechanics of Tsinghua University. *The Basis of Fluid Dynamics*[M]. Beijing: China Machine Press, 1980.( in Chinese ) )
- [21] Noca F. On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies[D]. PhD Thesis. Pasadena: California Institute of Technology, 1997.
- [22] Leal L G. *Advanced Transport Phenomena: Fluid Mechanics and Convective Transport Processes*[M]. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [23] Katz J, Plotkin A. *Low-Speed Aerodynamics*[M]. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [24] 易中, 吴萱, 周丽珍. 低速空气动力学[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2005.( YI Zhong, WU Xuan, ZHOU Li-zhen. *Low-Speed Aerodynamic*[M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2005.( in Chinese ) )
- [25] 徐明友, 丁松滨. 飞行动力学[M]. 北京: 科学出版, 2003.( XU Ming-you, DING Song-bin. *Flight Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2003.( in Chinese ) )
- [26] Prandtl L, Tietjens Q G. *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*[M]. New York: Dover

Publications, 1957.

- [27] Anderson J D. *Fundamentals of Aerodynamics*[M]. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2001: 112-114.
- [28] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics*[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.

## The Integral Form Fluid Momentum Theorem on Time-Varying Systems and Its Application to Aerodynamic Force Coefficient Analysis

LIN Xian-wu<sup>1</sup>, LAN Wei-yao<sup>1</sup>, LI Zhi-bin<sup>2</sup>, LI He<sup>1</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Xiamen University,  
Xiamen, Fujian 361005, P.R.China;

2. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, P.R.China)

(Recommended by FU Song, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** To tackle the calculation problem on steady and unsteady hydrodynamic force coefficients of a moving body in viscous incompressible flow, a method for calculating hydrodynamic force coefficients in viscous flow was proposed based on the quasi-equilibrium hypothesis and the vorticity aerodynamics. Firstly, the concept of time-varying flow systems was defined, and its relationship with the space volume was clarified. Then, the momentum transport equation and the fluid momentum theorem for time-varying flow systems were developed respectively, so as to provide a basis for the further discussion. Secondly, the fluid momentum theorem was applied to a flow system enclosed in the boundary composed of the body surface and the outer fixed surface with an infinite radius, and the fluid dynamic force was related to the change of the total fluid momentum. Thirdly, the quasi-equilibrium hypothesis was proposed and the total fluid momentum was expressed as a function of the body velocity and angular velocity. At last, this function was determined with the CFD technology and the method for calculating the fluid dynamic force coefficients in viscous flow was established. The study also show that the variation of the flow system should be considered during the derivation of the fluid momentum, and consequently an additional steady fluid dynamic force would come forth. This additional steady force can be proved to be zero for the body in linear uniform motion in the ideal flow, which is in accordance with d' Alembert's paradox and Lamb's result. However, in the case of viscous flow, this additional steady force is not necessarily to be zero, which is in accordance with the experimental results.

**Key words:** fluid momentum theorem; time-varying system; momentum transport equation; unsteady hydrodynamic force; airship

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11072028;61273199)

引用本文/Cite this paper:

林献武, 兰维瑶, 李智斌, 李赫. 时变系统流场动量定理的积分形式及其在流体动力系数分析中的应用[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 551-566.

LIN Xian-wu, LAN Wei-yao, LI Zhi-bin, LI He. The integral form fluid momentum theorem on time-varying systems and its application to aerodynamic force coefficient analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 551-566.