

# 耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解分支\*

王 恒<sup>1</sup>, 王汉权<sup>1</sup>, 陈龙伟<sup>1</sup>, 郑淑花<sup>2</sup>

(1. 云南财经大学 统计与数学学院, 昆明 650221;  
2. 云南水务投资股份有限公司 市场与投资中心 投资发展部, 昆明 650106)

**摘要:** 利用动力系统方法,对耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的定性行为和行波解进行了研究.基于这种方法,给出了系统在不同参数条件下的相图,得到了包括孤立波解和周期波解在内的行波解.运用数值模拟的方法,对方程的光滑孤立波解和周期波解进行了数值模拟.获得的结果完善了相关文献已有的研究成果.

**关键词:** 耦合 Higgs 方程; Maccari 系统; 动力系统方法; 行波解; 分支

**中图分类号:** O357.41      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.04.011

## 引 言

非线性波动方程行波解的研究是非线性物理模型研究的重要组成部分.非线性波动方程可以广泛地用来描述应用科学领域各种复杂的物理现象,例如固体力学、浅水波的传播、波和化学扩散模型、流体力学、生物物理学、Higgs 机制、量子场理论等.然而,求解非线性波动方程一直是一个难题和研究热点,许多研究人员一直试图寻找求解方法,去解决这个难题.近年来,随着科研水平的不断进步,一些求解方法被提出来了,例如首次积分法<sup>[1-2]</sup>、tanh 函数法<sup>[3]</sup>、Jacobi(雅可比)椭圆函数展开法<sup>[4]</sup>等.其中,动力系统方法是一种较为有效的方法,应用到很多数学物理模型并得到了一些有价值的研究成果<sup>[5-8]</sup>.

本文将进一步运用动力系统方法研究下面两个方程的定性行为和行波解<sup>[9]</sup>:

### 1) 耦合 Higgs 方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + |u|^2 u - 2uv = 0, \\ v_{tt} + v_{xx} - (|u|^2)_{xx} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

### 2) Maccari 系统

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + uv = 0, \\ v_x + v_y + (|u|^2)_x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

\* 收稿日期: 2015-08-10; 修订日期: 2015-11-11

基金项目: 国家自然科学基金(11261065)

作者简介: 王恒(1990—),男,硕士生(E-mail: xiaoheng189@126.com);

陈龙伟(1966—),男,博士(通讯作者.E-mail: 1187411801@qq.com).

令  $u(x, t) = e^{i\eta} U(\xi)$ ,  $v(x, t) = V(\xi)$ , 在这里,  $\eta = px + rt$ ,  $\xi = x + ct$ ,  $p, r$  和  $c$  是行波参数, 其中,  $r$  和  $c$  表示波速. 将其代入到方程(1)中, 有

$$\begin{cases} (c^2 - 1)U'' + (p^2 - r^2)U - 2UV + U^3 = 0, \\ (c^2 + 1)V'' - (U^2)'' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

对式(3)的第2个方程积分两次(令积分常数为0), 有

$$V = \frac{1}{(c^2 + 1)} U^2. \quad (4)$$

将式(4)代入到式(3)的第1个方程, 有

$$(c^4 - 1)U'' + (c^2 + 1)(p^2 - r^2)U + (c^2 - 1)U^3 = 0. \quad (5)$$

令  $u(x, y, t) = e^{i\eta} U(\xi)$ ,  $v(x, y, t) = V(\xi)$ , 在这里,  $\eta = kx + ly + mt$ ,  $\xi = x + y + \omega t$ ,  $k, l, m$  和  $\omega$  是行波参数, 其中,  $m$  和  $\omega$  表示波速. 将其代入到方程(2)中, 有

$$\begin{cases} U'' - (m + k^2)U + UV = 0, \\ (\omega + 1)V' + (U^2)' = 0. \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)的第2个方程积分两次(令积分常数为0), 有

$$V = -\frac{1}{\omega + 1} U^2. \quad (7)$$

将式(7)代入到式(6)的第1个方程, 有

$$(\omega + 1)U'' - (\omega + 1)(m - k^2)U - U^3 = 0. \quad (8)$$

显然, 式(5)和(8)等价于下面的二维动力系统:

$$\frac{dU}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = -\frac{p^2 - r^2}{c^2 - 1} U - \frac{1}{c^2 + 1} U^3, \quad (9)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = (m - k^2)U - \frac{1}{\omega + 1} U^3. \quad (10)$$

注意到当  $-(p^2 - r^2)/(c^2 - 1) = m - k^2$  和  $1/(c^2 + 1) = 1/(\omega + 1)$  时, 系统(9)和(10)有相同的形式. 因此, 只要研究出系统(9)的行波解, 也就可以得到系统(10)的行波解. 令  $A = -(p^2 - r^2)/(c^2 - 1) = m - k^2$  和  $B = -1/(c^2 + 1) = -1/(\omega + 1)$ , 有

$$\frac{dU}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = AU + BU^3. \quad (11)$$

系统(11)的 Hamilton(哈密尔顿)量为

$$H(U, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} AU^2 - \frac{1}{4} BU^4 = h. \quad (12)$$

本文的结构如下: 在第1节中, 将研究系统(11)的相图分支; 在第2节中, 根据系统(11)的相图分支, 应用动力系统方法求解方程(1)和(2), 并且利用 Maple 软件对求得的孤立波解和周期波解进行数值模拟; 最后在第3节, 对文章进行总结.

## 1 系统(11)的相图分支

在本节中, 将研究系统(11)的相图分支. 由于有界解对于一个物理模型是有实际意义的, 这里仅仅考虑系统(11)的有界行波解. 由于  $B = -1/(c^2 + 1) = -1/2 < 0$ , 利用 Maple 软件, 得到了系统(11)的相图(如图1所示). 通过分支理论和定性分析, 有下面的结果:

1) 当  $A < 0, B < 0$  时, 原点  $O(0,0)$  是中心, 是系统(11)唯一的奇点. 系统(11)存在着一簇周期轨道. 有

$$y^2 = \frac{-B}{2} \left( \frac{4h}{-B} - \frac{2A}{B} U^2 - U^4 \right) = \frac{-B}{2} (z_1^2 - U^2)(z_2^2 + U^2),$$

这里

$$z_1^2 = \frac{1}{-B} (-A + \sqrt{A^2 - 4hB}), \quad z_2^2 = \frac{1}{-B} (A + \sqrt{A^2 - 4hB}).$$

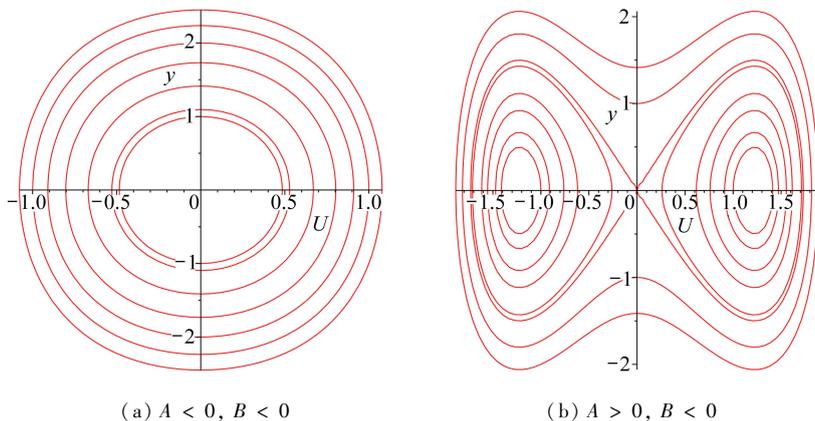


图1 系统(11)的相图分叉

Fig. 1 The bifurcations of phase portraits for system (11)

当  $h \in (0, \infty)$ , 系统(11)有如下的周期解:

$$U(\xi) = z_2 \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{-B(z_1^2 + z_2^2)}{2}} \xi, \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right).$$

2) 当  $A > 0, B < 0$  时, 系统(11)有3个奇点, 原点  $O(0,0)$  是鞍点,  $A_{\pm} = (\pm \sqrt{-a/b}, 0)$  是中心, 系统(11)存在着两个同宿轨道. 当  $h = 0$  时, 系统(11)有如下的孤立波解:

$$U(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2A}{B}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{-AB}{2}} \xi.$$

3) 当  $A > 0, B < 0$  时, 有

$$y^2 = \frac{-B}{2} \left( \frac{4h}{-B} - \frac{2A}{B} U^2 - U^4 \right) = \frac{-B}{2} (z_1^2 - U^2)(z_2^2 + U^2),$$

这里

$$z_1^2 = \frac{1}{-B} (-A + \sqrt{A^2 - 4hB}), \quad z_2^2 = \frac{1}{-B} (A + \sqrt{A^2 - 4hB}).$$

当  $H(u, y) = h, h \in (a^2/(4b), 0)$ , 系统(11)存在两簇周期轨道, 系统(11)有如下周期解:

$$U(\xi) = \pm z_2 \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{-B}{2}} z_2 \xi, \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} \right).$$

4) 当  $A > 0, B < 0$  时, 且  $H(u, y) = h, h \in (0, \infty)$ , 系统(11)存在一簇周期轨道, 此时系统(11)有着和情况1)相同形式的周期解.

$\operatorname{cn}(\cdot), \operatorname{dn}(\cdot)$  为 Jacobi 椭圆函数.

## 2 耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解

根据第 1 节的结论,得到了如下的耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解.

### 2.1 耦合 Higgs 方程的行波解

1) 当  $A < 0, B < 0, h \in (0, \infty)$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(px+rt)} z_2 \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{-B(z_1^2 + z_2^2)}{2}} (x + ct), \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} z_2^2 \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{-B(z_1^2 + z_2^2)}{2}} (x + ct), \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right); \end{cases} \quad (13)$$

2) 当  $A > 0, B < 0, h = 0$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(px+rt)} \sqrt{\frac{-2A}{B}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{-AB}{2}} (x + ct), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} \frac{-2A}{B} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{-AB}{2}} (x + ct); \end{cases} \quad (14)$$

3) 当  $A > 0, B < 0, h \in (a^2/(4b), 0)$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(px+rt)} z_1 \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{-B}{2}} z_1 (x + ct), \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1} \right), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} z_2^2 \operatorname{dn}^2 \left( \sqrt{\frac{-B}{2}} z_2 (x + ct), \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} \right). \end{cases} \quad (15)$$

### 2.2 Maccari 系统的行波解

1) 当  $A < 0, B < 0, h \in (0, \infty)$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(kx+ly+mt)} z_2 \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{-B(z_1^2 + z_2^2)}{2}} (x + y + \omega t), \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} z_2^2 \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{-B(z_1^2 + z_2^2)}{2}} (x + y + \omega t), \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right); \end{cases} \quad (16)$$

2) 当  $A > 0, B < 0, h = 0$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(kx+ly+mt)} \sqrt{\frac{-2A}{B}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{-AB}{2}} (x + y + \omega t), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} \frac{-2A}{B} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{-AB}{2}} (x + y + \omega t); \end{cases} \quad (17)$$

3) 当  $A > 0, B < 0, h \in (a^2/(4b), 0)$ ,

$$\begin{cases} u(x, t) = \pm e^{i(kx+ly+mt)} z_1 \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{-B}{2}} z_1 (x + y + \omega t), \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1} \right), \\ v(x, t) = \frac{1}{(c^2 + 1)} z_2^2 \operatorname{dn}^2 \left( \sqrt{\frac{-B}{2}} z_2 (x + y + \omega t), \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} \right). \end{cases} \quad (18)$$

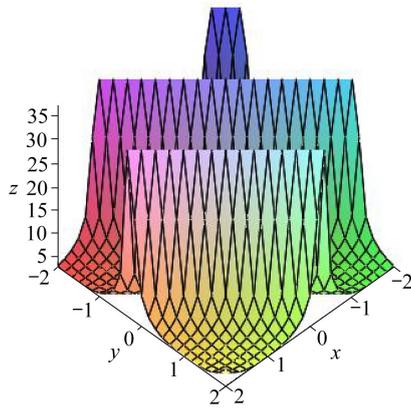
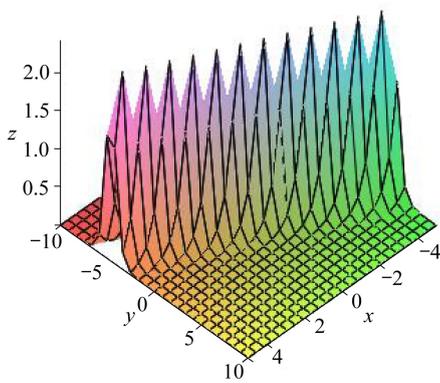
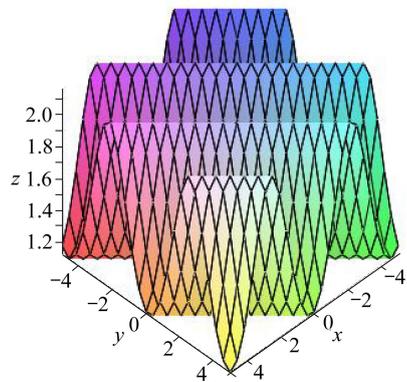
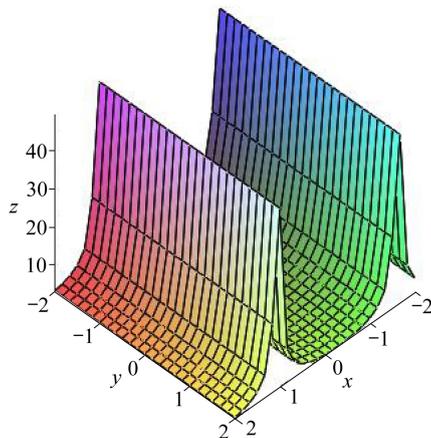
(a) 解(13)中 $|u|$ 的三维图(a) The 3D graph of  $|u|$  in solution (13)(b) 解(14)中 $|u|$ 的三维图(b) The 3D graph of  $|u|$  in solution (14)(c) 解(15)中 $|u|$ 的三维图(c) The 3D graph of  $|u|$  in solution (15)

图2 方程(1)的解的三维图

Fig. 2 The 3D graphs of solutions to equation (1)

(a) 解(16)中 $|u|$ 的三维图(a) The 3D graph of  $|u|$  in solution (16)

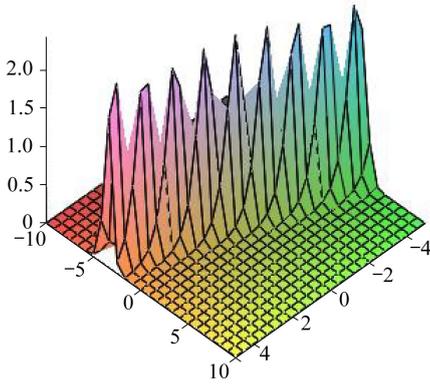
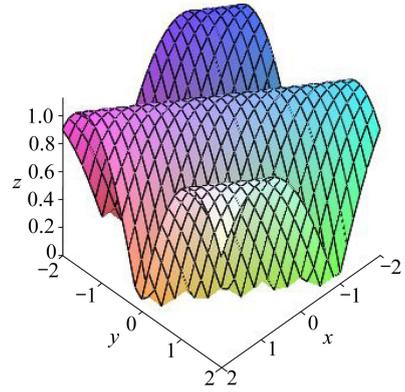
(b) 解(17)中 $|u|$ 的三维图(b) The 3D graph of  $|u|$  in solution (17)(c) 解(18)中 $|u|$ 的三维图(c) The 3D graph of  $|u|$  in solution (18)

图3 方程(2)的解的三维图

Fig. 3 The 3D graphs of solutions to equation (2)

这里,耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解有着鲜明的物理意义:当  $r, c, m$  和  $\omega$  都大于 0 时,式(13)~(18)是左行波,随着时间的推移,其图像向坐标轴负向移动;当  $r, c, m$  和  $\omega$  都小于 0 时,式(13)~(18)是右行波,随着时间的推移,其图像向坐标轴正向移动.此外,注意到我们的结果有双曲函数解和 Jacobi 椭圆函数解,而文献[9]中并没有上述形式的行波解,因此,我们的结果是不同于参考文献[9]的新结果.利用数值模拟的方法,对耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解进行数值模拟(如图 2 和图 3 所示).

### 3 结 论

本文利用动力系统方法研究了耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统.通过适当的行波变换,将偏微分方程转化成常微分方程,进一步转换成一个平面动力系统.转化后,耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统具有相同的动力系统.通过定性分析和 Jacobi 椭圆函数,分析了系统在不同参数条件下的相图分支,获得耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的光滑孤立波和周期波解存在的条件.通过上述的讨论,可以看出动力系统方法对于求解可积系统的行波解是一种有效的方法.显然,这种方法也可以应用到数学物理中,化简为可积系统的其他非线性波动方程.

#### 参考文献(References):

- [1] FENG Zhao-sheng, WANG Xiao-hui. The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation[J]. *Physics Letters A*, 2003, **308**(2/3): 173-178.
- [2] Abbasbandy S, Shirzadi A. The first integral method for modified Benjamin-Bona-Mahony equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, **15**(7): 1759-1764.
- [3] Wazwaz A M. The extended tanh method for new compact and noncompact solutions for the KP-BBM and the ZK-BBM equations[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, **38**(5): 1505-1516.
- [4] CHEN Yong, WANG Qi. Extended Jacobi elliptic function rational expansion method and abundant families of Jacobi elliptic functions solutions to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, **24**(3): 745-757.

- [5] 李继彬. (2+1)-维广义 Benney-Luke 方程的精确行波解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(11): 1261-1267. (LI Ji-bin. Exact traveling wave solutions for the 2D-generalized Benney-Luke equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(11): 1261-1267. (in Chinese))
- [6] LI Ji-bin, ZHANG Li-jun. Bifurcations of traveling wave solutions in generalized Pochhammer-Chree equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, **14**(4): 581-593.
- [7] LI Ji-bin, ZHANG Yi. Exact loop solutions, cusp solutions, solitary wave solutions and periodic wave solutions for the special CH-DP equation[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(4): 2502-2507.
- [8] LI Ji-bin, CHEN Guan-rong. Bifurcations of travelling wave solutions for four classes of nonlinear wave equations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, **15**(12): 3973-3998.
- [9] Hafez M G, Alam M N, Akbar M A. Traveling wave solutions for some important coupled nonlinear physical models via the coupled Higgs equation and the Maccari system[J]. *Journal of King Saud University—Science*, 2014, **27**(2): 105-112.

## Bifurcations of Exact Travelling Wave Solutions to Coupled Higgs Equations and Maccari Systems

WANG Heng<sup>1</sup>, WANG Han-quan<sup>1</sup>, CHEN Long-wei<sup>1</sup>, ZHENG Shu-hua<sup>2</sup>

(1. School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming 650221, P.R.China;

2. Investment and Development Department, Market and Investment Center, Yunnan Water Investment Co., Ltd., Kunming, 650106, P.R.China)

**Abstract:** With the dynamical system method, the qualitative performance of and the exact travelling wave solutions to the coupled Higgs equations and the Maccari systems were studied. Based on this method, all phase portraits of the systems in the parametric space were given. All possible bounded travelling wave solutions such as the solitary wave solutions and the periodic travelling wave solutions were obtained. Through numerical simulation, the smooth solitary wave solutions and the periodic travelling wave solutions were picturized. The results show that the present findings improve the related previous conclusions.

**Key words:** coupled Higgs equation; Maccari system; dynamical system; travelling wave solution; bifurcation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11261065)

引用本文/Cite this paper:

王恒, 王汉权, 陈龙伟, 郑淑花. 耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解分支[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 434-440.

WANG Heng, WANG Han-quan, CHEN Long-wei, ZHENG Shu-hua. Bifurcations of exact travelling wave solutions to coupled Higgs equations and Maccari systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 434-440.