

双向弹簧夹层假定的弹性地基上双层板的解^{*}

谈至明, 郭晶晶, 陈景亮

(同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 建立了轴对称条件下,层间有双向弹簧夹层的弹性地基上双层板力学模型,应用 Hankel (汉克尔)变换法推演得到了任意轴对称荷载作用下的 Winkler(文克勒)地基、双参数地基和弹性半空间体地基上无限大双层板的一般解析解,给出了双层板的挠度、弯矩、剪力,以及层间反力和位移的计算公式,进而,利用该力学模型的解,分析了层间条件对双层板挠度、弯矩的影响规律,计算了上、下层板的中性轴位置,讨论了层间双向弹簧系数的取值方法.结果表明:1) 随着层间竖向弹簧参数增大,上层板挠度和弯曲应力减小,下层板挠度和弯曲应力增大;随着层间水平摩擦阻参数增大,上、下层板的挠度和弯矩均减小;2) 当双层板的剪切和压缩效应系数分别取 $2/3, 3/5$ 时,双层板的剪切和压缩效应可较好地考虑;3) 上、下层板的中性轴位置是变化的,它随着距荷载圆中心点的距离增大而向上、下层板各自中面趋近.

关键词: 双层板; 双向弹簧夹层; Winkler 地基; 双参数地基; 弹性半空间体地基; Hankel 变换

中图分类号: TU348 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.04.006

引言

弹性地基板模型在土木工程中应用颇多,例如,道路、机场的水泥混凝土铺面结构,厂矿、堆场的水泥混凝土地坪等.当地基较弱,或荷载较大时,地基上的结构往往不止一层,例如,目前的民用机场、高等级道路的水泥混凝土铺面结构大多采用半刚性或刚性基层.对于这类结构,更宜采用弹性地基双层板力学模型,目前双层板的结构分析大多采用等效单层板的近似方法处理^[1-2],此处理方法简便,应用甚广,但缺少明确的力学意义.或采用有限元等数值方法加以分析,此方法可模拟不同层间接触状况的双层板,例如,文献[3]将层间接触状况处理为竖向连续水平向为 Coulomb(库仑)摩擦阻模型,文献[4]将层间接触状况视为仅有竖向弹簧.又如,我国现行《公路水泥混凝土路面设计规范》中的水泥混凝土路面板荷载应力计算公式,是依据层间水平光滑、竖向受压连续受拉脱开的双层板模型的有限元数值解拟合得到的^[5],但数值解有着规律难寻且误差难估计的缺点.为此,进一步探索更符合实际工程情况的弹性地基上双层板的力学模型以及解析解是十分迫切和必要的.

* 收稿日期: 2015-04-20; 修订日期: 2015-11-26

基金项目: 国家自然科学基金(51378394)

作者简介: 谈至明(1960—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: 13901779114@126.com).

1 力学模型与微分方程

有双向弹簧夹层的弹性地基上双层板力学模型,假设上、下层板之间有一符合 Goodman 假设可传递竖向反力和水平剪应力的弹性夹层,双层板即为有横向力的薄板.在轴对称条件下,夹层的竖向反力 p_v 、水平剪应力 p_u 为

$$\begin{cases} p_v = k_v(w_1 - w_2), \\ p_u = k_u\left(u_2 - u_1 + \frac{h_1}{2} \frac{dw_1}{dr} + \frac{h_2}{2} \frac{dw_2}{dr}\right), \end{cases} \quad (1)$$

式中, w_1, w_2 分别为上下层板的挠度; u_1, u_2 分别为上下层板截面的平均径向水平位移; h_1, h_2 分别为上下层板厚度; k_v, k_u 为夹层竖向和水平的反应模量.

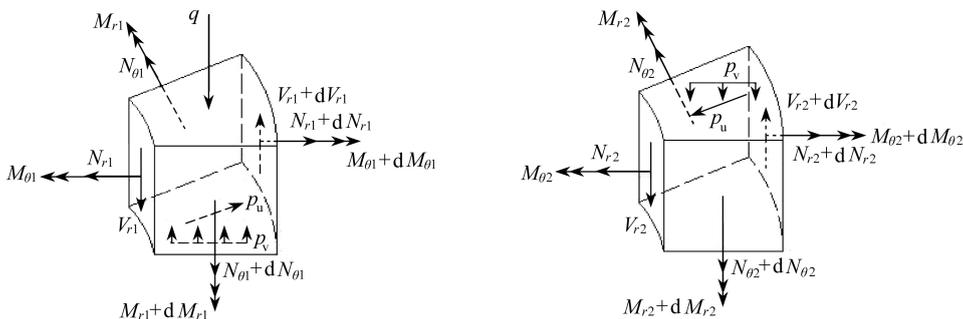


图 1 截面内力图

Fig. 1 Diagram of sectional internal forces

取轴对称结构的一微分段(参见图 1),由外力平衡条件得到上、下层板的内力——弯矩 M_r, M_{θ} , 剪力 V_r 和轴力 N_r, N_{θ} 的表达式:

$$\begin{cases} \frac{dM_{r1}}{dr} + \frac{M_{r1} - M_{\theta1}}{r} = V_{r1} - \frac{h_1}{2} p_u, & \frac{dM_{r2}}{dr} + \frac{M_{r2} - M_{\theta2}}{r} = V_{r2} - \frac{h_2}{2} p_u, \\ \frac{dV_{r1}}{dr} + \frac{V_{r1}}{r} = -q + k_v(w_1 - w_2), & \frac{dV_{r2}}{dr} + \frac{V_{r2}}{r} = -k_v(w_1 - w_2) + p_0, \\ \frac{dN_{r1}}{dr} + \frac{N_{r1} - N_{\theta1}}{r} = -p_u, & \frac{dN_{r2}}{dr} + \frac{N_{r2} - N_{\theta2}}{r} = p_u, \end{cases} \quad (2)$$

式中, p_0 为地基反力; q 为作用于上层板表面的竖向轴对称荷载.

双层板弯矩与板的挠曲率,以及轴力与板轴向水平位移的关系为

$$\begin{cases} M_{ri} = -D_i \left(\frac{d^2 w_i}{dr^2} + \nu_i \frac{dw_i}{r dr} \right), & M_{\theta i} = -D_i \left(\nu_i \frac{d^2 w_i}{dr^2} + \frac{dw_i}{r dr} \right), \\ N_{ri} = S_i \left(\frac{du_i}{dr} + \nu_i \frac{u_i}{r} \right), & N_{\theta i} = S_i \left(\nu_i \frac{du_i}{dr} + \frac{u_i}{r} \right), \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

式中, D_i 为上层板 ($i = 1$) 和下层板 ($i = 2$) 的弯曲刚度, $D_i = h_i^3 E_i / (12(1 - \nu_i^2))$; S_i 为上层板 ($i = 1$) 和下层板 ($i = 2$) 的抗压刚度, $S_i = h_i E_i / (1 - \nu_i^2)$; E_i, ν_i 为上层板 ($i = 1$) 和下层板 ($i = 2$) 的弹性模量和 Poisson(泊松)比.

将式(1)和式(3)代入式(2),可推得弹性地基上有二向弹簧夹层的双层板微分方程为

$$\begin{cases} D_1 \nabla^4 w_1 + k_v(w_1 - w_2) + k_u \left\{ \frac{S_1}{e} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_1 - \nabla^2 \left(\frac{h_1 w_1 + h_2 w_2}{2} \right) \right\} = q, \\ D_2 \nabla^4 w_2 - k_v(w_1 - w_2) + k_u \left\{ \frac{S_1}{e} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_1 - \nabla^2 \left(\frac{h_1 w_1 + h_2 w_2}{2} \right) \right\} = -p_0, \\ S_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_1 - k_u \left(\frac{S_1}{e} u_1 - \frac{d}{dr} \left(\frac{h_1 w_1 + h_2 w_2}{2} \right) \right) = 0, \\ S_1 u_1 + S_2 u_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr}$ 为 Laplace(拉普拉斯)算子, $e = \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)^{-1}$.

2 微分方程的一般解

对微分方程组(4)进行 Hankel 变换,整理得到求解上、下层板挠度的零阶 Hankel 变换 \bar{w}_1 , \bar{w}_2 , 以及上层板截面径向水平位移函数 $y = (d/dr + 1/r)u_1$ 的零阶 Hankel 变换 \bar{y} 的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} t_1^4 + 1 + \lambda_H & -[\lambda_H(t_2^4 + \lambda_v + \chi) + \lambda_v] & 0 \\ \lambda_u \frac{eh_2 h_1}{4D_1} t_1^4 - (t_2^2 + \lambda_u) & (t_2^2 + \lambda_u)(t_2^4 + \lambda_v + \chi) + \lambda_u \frac{eh_2^2}{4D_2} t_2^4 & 0 \\ t_1^4 & t_2^4 + \chi & t_2^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_v \bar{w}_1 \\ \frac{D_2}{l_2^4} \bar{w}_2 \\ -\frac{h_0 S_1}{2l_2^2} \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ 0 \\ \bar{q} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中

$$l_1^4 = \frac{D_1}{k_v}, \quad \lambda_u = \frac{k_u l_2^2}{e}, \quad \lambda_v = \frac{l_2^4 k_v}{D_2}, \quad \lambda_H = \frac{h_1}{h_2},$$

$$\chi = \frac{l_2^4 \bar{p}_0}{D_2 \bar{w}_2}, \quad t_1 = l_1 \xi, \quad t_2 = l_2 \xi, \quad h_0 = h_1 + h_2;$$

\bar{p}_0 为地基反力的零阶 Hankel 变换; \bar{q} 为外荷载的零阶 Hankel 变换, 圆形均布荷载时, $\bar{q} = P(J_1(\xi a)/(\pi \xi a))$ (a 为荷载圆半径, P 为外荷载总量), 集中力时, $\bar{q} = P/(2\pi)$; l_2 为下层板的相对刚度半径, 不同地基模型的计算式见表 1.

上式中的地基参数 χ 与地基模型有关, Winkler 地基、半空间体地基、双参数地基 3 种地基的 χ 可统一表示为

$$\chi = a_q + b_q(l_2 \xi) + c_q(l_2 \xi)^2, \quad (6)$$

式中, a_q, b_q, c_q 为地基参数, 见表 1.

解式(5), 整理得到

$$\begin{cases} \bar{w}_1 = \frac{\bar{q}l_2^4}{D_2} F_1, F_1 = \frac{(t_2^2 + \lambda_u)((t_2^4 + \chi)/\lambda_v + 1) + \lambda_u(eh_2^2/(4D_1))t_1^4}{(t_2^2 + \lambda_u)\Omega_1 + \lambda_u t_1^4 \Omega_2}, \\ \bar{w}_2 = \frac{\bar{q}l_2^4}{D_2} F_2, F_2 = \frac{(t_2^2 + \lambda_u) - \lambda_u(eh_2 h_1/(4D_1))t_1^4}{(t_2^2 + \lambda_u)\Omega_1 + \lambda_u t_1^4 \Omega_2}, \\ S_1 \bar{y} = -\frac{2\bar{q}l_2^2}{h_0} F_3, F_3 = \frac{1}{t_2^2} - \frac{D_1}{D_2} t_2^2 F_1 - F_2 \left(t_2^2 + \frac{\chi}{t_2^2} \right), \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\Omega_1 = (t_1^4 + 1)(t_2^4 + \chi) + t_1^4 \lambda_v, \quad \Omega_2 = 3t_2^4 + \frac{D_3}{D_1} \lambda_v + \frac{3e}{S_1} \chi, \quad D_3 = \frac{eh_0^2}{4}.$$

表 1 不同地基模型的参数^[6]

Table 1 The parameters of different foundation models^[6]

foundation model	deflection-load equation	a_q	b_q	c_q	l_2	comment
Winkler foundation	$p_0 = kw$	1	0	0	$l_2^4 = D_2/k$	
half-space foundation	$\bar{p}_0 = [E_0/(2(1 - \nu_0^2))] \bar{w} \xi$	0	1	0	$l_2^3 = 2D_2(1 - \nu_0^2)/E_0$	
double-parameter foundation	$p_0 = k_1 w + k_2 \nabla^2 w$	1	0	2θ	$l_2^4 = D_2/k_1$	$\theta = k_2/(2\sqrt{k_1 D_2})$

注 k_1, k_2 为双参数地基的两个参数。

Note k_1 and k_2 are the 2 parameters of the double parameter foundation model.

对式(7)进行 Hankel 逆变换, 得到双层板挠度 w_1, w_2 和函数 y 的解:

$$\begin{cases} w_i = \frac{l_2^2}{D_2} \int_0^\infty \bar{q} F_i J_0(\rho_2 t_2) t_2 dt_2, \\ y = -\frac{2}{S_1 h_0} \int_0^\infty \bar{q} F_3 J_0(\rho_2 t_2) t_2 dt_2. \end{cases} \quad (8)$$

双层板层间竖向反力 p_v 可按式(1) 直接求得. 层间水平剪应力 p_u 、地基反力 p_0 , 以及上层板截面的平均径向水平位移 u_1 的计算式为

$$\begin{cases} p_u = S_1 \frac{dy}{dr} = \frac{2}{l_2 h_0} \int_0^\infty \bar{q} F_3 J_1(\rho_2 t_2) t_2^2 dt_2, \\ p_0 = \frac{1}{l_2^2} \int_0^\infty \bar{q} \chi F_2 J_0(\rho_2 t_2) t_2 dt_2, \\ u_1 = \frac{2l_2}{S_1 h_0} \int_0^\infty \bar{q} F_3 J_1(\rho_2 t_2) dt_2. \end{cases} \quad (9)$$

双层板截面的弯矩 $M_{ri}, M_{\theta i}$, 轴力 $N_{ri}, N_{\theta i}$ 的计算式为

$$\begin{cases} M_{ri} = A_{Mi} + \nu_i B_{Mi}, M_{\theta i} = \nu_i A_{Mi} + B_{Mi}, \\ A_{Mi} + B_{Mi} = \frac{D_i}{D_2} \int_0^\infty \bar{q} F_i J_0(\rho_2 t_2) t_2^3 dt_2, B_{Mi} = \frac{D_i}{D_2 \rho_2} \int_0^\infty \bar{q} F_i J_1(\rho_2 t_2) t_2^2 dt_2, \\ N_{ri} = \frac{1}{h_0} (A_{Ni} + \nu_i B_{Ni}), N_{\theta i} = \frac{1}{h_0} (\nu_i A_{Ni} + B_{Ni}), \\ A_{N1} + B_{N1} = h_0 S_1 y = -2 \int_0^\infty \bar{q} F_3 J_0(\rho_2 t_2) t_2 dt_2, B_{N1} = -\frac{2}{\rho_2} \int_0^\infty \bar{q} F_3 J_1(\rho_2 t_2) dt_2, \\ A_{N2} = -A_{N1}, B_{N2} = -B_{N1}. \end{cases} \quad (10)$$

当夹层无水平弹簧,即 $k_u = 0$ 时,双层板的轴力

$$N_{r1} = N_{\theta1} = N_{r2} = N_{\theta2} = p_u = 0,$$

式(7)退化为

$$F_1 \Big|_{k_u \rightarrow 0} = \frac{t_2^4 + \lambda_v + \chi}{\lambda_v \Omega_1}, \quad F_2 \Big|_{k_u \rightarrow 0} = \frac{1}{\Omega_1}. \quad (11)$$

当 $k_v \rightarrow \infty$,即为双层板竖向连续、水平摩阻的情形, $w_1 = w_2, F_1, F_2, F_3$ 可简化为

$$\begin{cases} (F_1 = F_2) \Big|_{k_v \rightarrow \infty} = \frac{\lambda_u + t_2^2}{t_2^2 \Omega_3 + \lambda_u \Omega_4}, \\ F_3 \Big|_{k_v \rightarrow \infty} = \frac{D_3}{D_2} \frac{\lambda_u t_2^2}{t_3^2 \Omega_3 + \lambda_u \Omega_4}, \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\Omega_3 = \left(\frac{D_2 + D_1}{D_2} \right) t_2^4 + \chi, \quad \Omega_4 = \left(\frac{D_1 + D_2 + D_3}{D_2} \right) t_2^4 + \chi.$$

层间光滑、连续两种特殊情况时,式(12)可进一步简化为

$$\begin{cases} (F_1 = F_2) \Big|_{\substack{k_u \rightarrow 0 \\ k_v \rightarrow \infty}} = \frac{1}{\Omega_3}, \quad F_3 \Big|_{\substack{k_u \rightarrow 0 \\ k_v \rightarrow \infty}} = 0; \\ (F_1 = F_2) \Big|_{\substack{k_u \rightarrow \infty \\ k_v \rightarrow \infty}} = \frac{1}{\Omega_4}, \quad F_3 \Big|_{\substack{k_u \rightarrow \infty \\ k_v \rightarrow \infty}} = \frac{D_3}{D_2} \frac{t^2}{\Omega_4}. \end{cases} \quad (13)$$

3 应用和分析

3.1 层间状况的影响

以圆形均布荷载作用下同厚同质双层板为例分析层间状况的影响.双层板的挠度、弯矩、轴力最大值均出现在荷载圆中点;层间水平剪应力的最大值出现在荷载边缘外侧附近.荷载圆中点的挠度、弯矩的计算式为

$$\begin{cases} w_i = \frac{Pl^2}{D} \varphi_{wi}, \quad \varphi_{wi} = \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\infty J_1(\alpha t) F_i dt, \\ M_{ri} = M_{\theta i} = P(1 + \nu_i) \varphi_{Mi}, \quad \varphi_{Mi} = \frac{1}{2\pi \alpha} \int_0^\infty J_1(\alpha t) F_i t^2 dt, \end{cases} \quad (14)$$

式中, $D_1 = D_2 = D$, $l_1 = l_2 = l$, $\alpha = a/l$, a 为竖向荷载半径.

图2给出了圆形均布荷载 ($\alpha = 0.1$) 作用下的 Winkler 地基双层板 ($h_1 = h_2 = 0.15$ m, $E_1 = E_2 = 30\,000$ MPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.15$, $k = 100$ MPa/m), 荷载圆中点的挠度系数 $\varphi_{w1}, \varphi_{w2}$, 弯矩参数 $\varphi_{M1}, \varphi_{M2}$ 与层间水平摩阻参数 λ_u 、竖向弹簧参数 λ_v 的关系曲线.由图2(a)、2(b)可知,上层板挠度系数 φ_{w1} 、弯矩系数 φ_{M1} 随 λ_v 的增大而减小,反之,下层板挠度系数 φ_{w2} 、弯矩系数 φ_{M2} 随 λ_v 的增大而增大,最终,上下层板的挠度系数和弯矩系数渐渐趋近;当双层板层间竖向连续,即 $\lambda_v = \infty$ 时,水平摩阻参数 λ_u 越大,挠度系数 φ_{wi} , 弯矩参数 φ_{Mi} 越小;上层板的 $\varphi_{w1}, \varphi_{M1}$ 变化率随 λ_u 的增大而增大,而下层板 $\varphi_{w2}, \varphi_{M2}$ 变化率几乎不受 λ_u 的影响.

必须指出,当上下层板的 Poisson 比 ν_1, ν_2 不等时,上、下层板的轴力之和不为0,也就是说,截面有剩余轴力:

$$N_{r1} + N_{r2} = (\nu_1 - \nu_2) \frac{u_1}{r}, \quad N_{\theta1} + N_{\theta2} = (\nu_1 - \nu_2) \frac{du_1}{dr}.$$

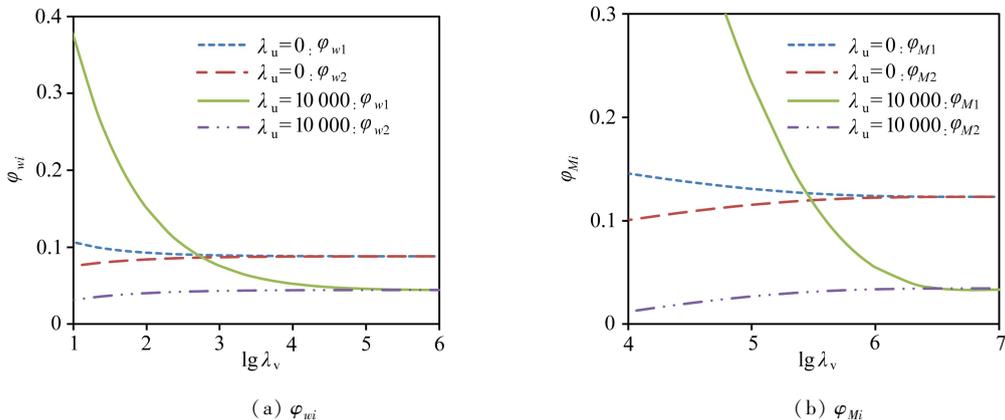


图2 Winkler地基上同厚同质双层板的力学特征

Fig. 2 Mechanics characteristics of the double layer plate with uniform thickness and homogeneity on the Winkler foundation

3.2 夹层的广义反应模量

当双层板夹层较薄时,夹层的受力状态可视为纯压和纯剪的组合,夹层本身的反应模量 \tilde{k}_v, \tilde{k}_u 可用下式计算^[7]:

$$\tilde{k}_v = \frac{E_j}{(1 - \nu_j^2)h_j}, \quad \tilde{k}_u = \frac{G_j}{h_j} = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)h_j},$$

式中, E_j 为夹层材料的模量; ν_j 为夹层 Poisson 比; h_j 为夹层厚度。

当夹层的竖向反应模量 \tilde{k}_v 或水平反应模量 \tilde{k}_u 较大时,其层间的压应力和剪应力很大,宜计入层间压应力和剪应力对板截面的竖向拉压变形和水平剪切变形的影响,为此,文献[8]在研究弹性地基上双层梁夹层计入竖向拉压变形和水平剪切变形效应的广义水平和竖向反应模量 k_u, k_v 的计算式为

$$\begin{cases} k_u^{-1} = \tilde{k}_u^{-1} + C_{u1} + C_{u2}, \\ k_v^{-1} = \tilde{k}_v^{-1} + C_{v1} + C_{v2}, \end{cases} \quad (15)$$

式中, C_{ui}, C_{vi} 分别为夹层反力引起上、下层板的竖向拉压和水平剪切效应,其计算式可表示为

$$C_{ui} = \zeta_u = \frac{h_i}{G_i}, \quad C_{vi} = \zeta_v = \frac{(1 - \nu_i^2)h_i}{E_i}, \quad (16)$$

式中, G_i 为板材料的剪切模量; ζ_u, ζ_v 分别为上下层板的剪切和压缩效应系数。

对于圆形均布荷载作用下 Winkler 地基上同质同厚双层板,当双层板剪切和压缩效应系数 ζ_u 取 $2/3, \zeta_v$ 取 $3/5$ 时,均布荷载圆中点的上、下层板的平均挠度 $(w_1 + w_2)/2$ 、下层板板底拉应力 σ_2 、双层板总弯矩 $M_1 + M_2 + (h_0/2)N_1$ 与 Winkler 地基上弹性层状体的中点挠度 w_0 、层底拉应力 σ_0 和截面总弯矩 M_0 十分接近.也就是说,通过调节双层板层间剪切和压缩效应系数,双层板模型可很好地考虑板内的剪切和压缩效应。

3.3 与等效单层板的比较

目前的弹性地基上双层板,采用简化为单层板的方式进行处理,它假设双层板竖向连续且不计双层板的剪切和拉压变形效应,层间水平向的结合状况通过引入一层间结合系数 $\theta \in [0, 1]$ 加以表征.上、下层板的总弯曲刚度的表达式为

$$D_g = D_1 + D_2 + D_3\theta. \quad (17)$$

简化的单层板的挠度也可用式(8)计算,其中的函数 F_1, F_2 为

$$F_1 = F_2 = \frac{D_2}{(D_1 + D_2 + D_3\theta)t_2^4 + D_2\chi} \quad (18)$$

层间结合系数 θ 的几何意义虽明确,它表征了上、下板中性轴从各自中面向结合双层板的共同中性轴移动的比例,但它缺乏明确的力学意义。比较式(18)和式(12)可以看到,层间结合系数 θ 与层间摩阻参数 λ_u 之间没有简单的对应关系。

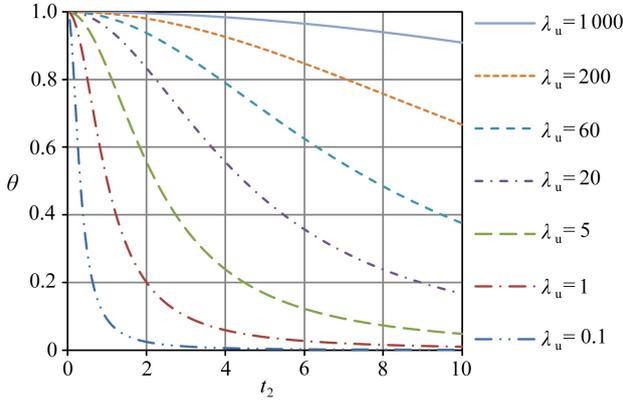


图3 层间结合系数 θ 与层间摩阻系数 λ_u 的关系

Fig. 3 Relationship between interlayer combination coefficient θ and interlayer friction coefficient λ_u

图3给出了 Winkler 地基上同质同厚的双层板在函数 F_1, F_2 相等条件下的层间结合系数 θ 与层间摩阻参数 λ_u 的关系曲线。从图3中可以看到,在给定层间摩阻参数 λ_u 的情况下,层间结合系数 θ 随着 t_2 的增大而减小,也就是说,层间水平接触状况采用摩阻弹簧模型时,上、下层板的中性轴在板长度方向是变化的,而简化单层板处理时,上、下层板的中性轴在板长度方向始终不变。双层板中性轴不变,意味着双层板层间有与截面弯矩等比例的水平位移,及与截面剪力等比例的层间剪应力,而双层板截面弯矩和剪力是相互独立的,因此可推出双层板层间水平位移与剪应力也是独立的,这在力学上是不成立的。

表2 水泥混凝土道面的挠度和弯拉应力

Table 2 Deflection and bending stress of the cement concrete pavement

elastic modulus of interlayer E_j /MPa	maximum deflection of upper plate w_{1m} /mm	maximum tensile stress of upper plate bottom face σ_{1m} /MPa	maximum tensile stress of lower plate bottom face σ_{2m} /MPa
500	0.236	0.918	0.326
1 000	0.231	0.839	0.355
5 000	0.226	0.728	0.411
10 000	0.226	0.705	0.427

3.4 铺面结构实例

某一水泥混凝土铺面结构由水泥混凝土面层 ($h_1 = 300$ mm, $E_1 = 30\,000$ MPa, $\nu_1 = 0.15$)、贫混凝土基层组成 ($h_2 = 200$ mm, $E_2 = 15\,000$ MPa, $\nu_2 = 0.20$), 土基为弹性半空间体, 弹性模量 E_0 和 Poisson 比 ν_0 分别为 100 MPa, 0.30。水泥混凝土面层与贫混凝土基层之间设置 40 mm 细粒式沥青混凝土夹层, 细粒式沥青混凝土的 Poisson 比 $\nu_j = 0.35$, 弹性模量 E_j 与温度有关, 在 500~10 000 MPa 变化。计算荷载集度 $q = 1$ MPa, 总量 100 kN 圆形荷载作用下, 水泥混凝土铺

面的上层板最大挠度,上、下层板层底最大弯拉应力如表 2 所示。

从表 2 中可以看到,随着层间弹性模量 E_j 的增大,上层板的挠度及层底弯拉应力减小,下层板的层底弯拉应力增大。当 E_j 从 500 MPa 增至 10 000 MPa,上层板挠度仅减小 4%,上层板层底弯拉应力减小 23%,下层板层底弯拉应力增大 30%。

4 结 语

建立了轴对称条件下,层间有双向弹簧夹层的 3 种地基(Winkler 地基、双参数地基和弹性半空间体地基)上双层板力学模型,推演得到了其微分方程,并应用 Hankel 变换法得到了 3 种地基上无限大双层板的一般解,给出了双层板挠度、弯矩、剪力,以及层间反力和位移的包含 Bessel(贝塞尔)函数无穷积分的计算式。

进而,利用该力学模型的解,分析了单圆均布荷载作用下各种层间状况对双层板挠度、弯矩的影响规律,研究了层间夹层弹簧系数的取值方法,计算了上、下层板的中性轴位置。结果表明:1) 随着层间竖向弹簧参数的增大,上层板挠度和弯曲应力减小,下层板挠度和弯曲应力增大;随着层间水平摩擦参数的增大,上、下层板的挠度和弯矩均减小,但下层板的板底弯拉应力是加大的;2) 当双层板的剪切和压缩效应系数分别取 $2/3, 3/5$ 时,双层板的剪切和压缩效应可较好地考虑;3) 上、下层板的中性轴位置在板长方向是变化的,随着距荷载圆中心的距离增大,上、下层板的中性轴位置逐渐向上、下层板各自中面趋近。

参考文献(References):

- [1] 谈至明. 半结合式双层板弯曲的近似计算[J]. 公路, 2001, 4(4): 25-26. (TAN Zhi-ming. Simplified calculation of bi-layer plate bending with semi-continue condition[J]. *Highway*, 2001, 4(4): 25-26. (in Chinese))
- [2] YANG Shao-pu, CHEN Li-qun, LI Shao-hua. *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*[M]. Springer; Beijing: Science Press, 2015.
- [3] 郑木莲, 余四新, 陈拴发. 层间接触状况对贫混凝土基层水泥混凝土路面荷载应力的影响[J]. 公路交通科技, 2008, 25(9): 224-226. (ZHENG Mu-lian, YU Si-xin, CHEN Shuan-fa. The effect of interlayer contact conditions on the stress of the pavement with lean concrete[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2008, 25(9): 224-226. (in Chinese))
- [4] 李巧生, 王德荣, 李杰, 潘轶. 水泥混凝土道面结构在多轮荷载作用下的响应分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(2): 75-78. (LI Qiao-sheng, WANG De-rong, LI Jie, PAN Yi. Response analysis of the pavement structure under the effect of cement concrete of multiple-gear loadings [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(2): 75-78. (in Chinese))
- [5] JTG D40—2011, 公路水泥混凝土路面设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2011. (JTG D40—2011, Specifications for design of highway cement concrete pavement[S]. Beijing: China Communications Press, 2011. (in Chinese))
- [6] 谈至明, 郭晶晶. 弹性地基上无限大板的统一解[J]. 应用力学学报, 2016, 33(1): 25-29. (TAN Zhi-ming, GUO Jing-jing. The unified solution of infinite plate on elastic foundation[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, 33(1): 25-29. (in Chinese))
- [7] 谈至明, 周玉民, 姜艺. 沥青加铺层温度应力研究(I): 力学模型[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2009, 37(1): 41-46. (TAN Zhi-ming, ZHOU Yu-min, JIANG Yi. Thermal stresses of asphalt overlay on cement concrete pavement (I): mechanistic models[J]. *Journal of Tongji*

- University(Natural Science)*, 2009, **37**(1): 41-46.(in Chinese))
- [8] 谈至明. 弹性地基上双层叠合梁的解[J]. 力学学报, 1997, **29**(6): 751-754.(TAN Zhi-ming. Solution to bi-layer beams on elastic foundation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1997, **29**(6): 751-754.(in Chinese))
- [9] 黄义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京: 科学出版社, 2005.(HUANG Yi, HE Fang-she. *Beam, Plate and Shell on Elastic Foundation*[M]. Beijing: Science Press, 2005.(in Chinese))

Solutions of Double-Layer Plates With Two-Way Spring Interlayers on Elastic Foundations

TAN Zhi-ming, GUO Jing-jing, CHEN Jing-liang

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of Ministry of Education,
Tongji University, Shanghai 200092, P.R.China)

Abstract: Under axisymmetric conditions, a mechanics model for double-layer plates with two-way spring interlayers on elastic foundations was built. The Hankel transform method was used to derive the general analytical solutions of the infinite double-layer plates respectively on the Winkler foundation, the two-parameter foundation and the elastic half-space foundation under arbitrary axisymmetric load. Then the calculating formulae for the deflection, bending moment, shearing force and the interlayer reaction force and displacement were given. The analytical solutions were applied to study the effects of the interlayer conditions on the deflection and bending moment of the double-layer plates, calculate the positions of neutral axes of the upper and lower plates, and discuss the specific values of the interlayer spring coefficients. The results show that, 1) with the increase of the vertical spring coefficient, the deflection and bending stress of the upper plate decrease, while those of the lower plate increase; on the other hand, with the increase of the horizontal friction parameter, those of both the upper and lower plates decrease; 2) when the shearing coefficient and compressibility of the double-layer plates are given values of $2/3$ and $3/5$ respectively, the effects of shearing and compression could be well considered; 3) the neutral axes' positions of the upper and lower plates are changeable, but respectively approach the center planes of the upper and lower plates with the increase of the distance from the load center.

Key words: double-layer plates; two-way spring interlayer; Winkler foundation; double-parameter foundation; elastic half-space foundation; Hankel transform

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51378394)

引用本文/Cite this paper:

谈至明, 郭晶晶, 陈景亮. 双向弹簧夹层假定的弹性地基上双层板的解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 382-390.

TAN Zhi-ming, GUO Jing-jing, CHEN Jing-liang. Solutions of double-layer plates with two-way spring interlayers on elastic foundations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 382-390.