

# 离散系统迭代学习型瞬时最优控制及 作动器位置优化研究\*

童少伟, 唐怀平

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要:** 以线性离散系统为研究对象,以瞬时最优化控制和智能算法中的迭代学习控制为基础,以系统响应期望值与实际值之差为反馈信号,以离散系统的二次型性能泛函为目标函数,提出了迭代学习型瞬时最优控制算法.该方法以瞬时最优化控制算法初始化控制信号,并采用迭代学习控制在线实时修正控制信号以提高主动控制的效果.针对迭代学习型瞬时最优化控制算法迭代的特性,采用范数方法给出了该算法收敛的充分条件.数值算例表明,迭代学习型瞬时最优控制算法较离散瞬时最优控制算法有较明显的优势.同时,基于改进遗传算法,对主动控制器位置优化进行了讨论.数值分析结果表明:部分楼层设置主动控制器且安装位置经过优化后,其控制效果可接近甚至优于全楼层设置主动控制器时的控制效果.

**关键词:** 瞬时最优控制; 迭代学习控制; 稳定性; 性能泛函; 遗传算法

**中图分类号:** P315.9      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.02.005

## 引 言

建筑结构在受到诸如地震、风荷载等外界荷载作用时,会产生动力响应,尤其是在受到强烈地震作用时,过大的结构响应将直接影响结构的安全性.减小建筑结构在外界荷载作用下的动力响应是国内外学者长期以来的研究目标.高层柔性结构的振动控制是结构振动控制的热点问题.目前,针对建筑结构的振动控制,业内已经发展了大量的控制策略,包括被动控制、主动控制及半主动控制等.其中,主动控制和半主动控制策略中最优控制算法是核心部分.目前,已经发展了包括经典线性二次型最优控制算法、 $H_2$ 控制算法、瞬时最优控制算法<sup>[1-3]</sup>以及模糊控制、神经网络控制等多种控制算法.发展控制效果好、鲁棒性高的控制算法一直是国内外学者长期以来的目标.

众多控制算法中,瞬时最优控制(instantaneous optimal control, IOC)算法由于其概念明确、控制器设计时无需求解 Riccati 方程而受到广泛关注, Bahar 等<sup>[4]</sup>针对离散线性系统的瞬时最优控制进行了推导,并给出了受控系统稳定性的充分条件;杨颀等<sup>[5]</sup>推导了瞬时最优控制算法的能量平衡式,并进行了基于能量法的瞬时最优控制算法的参数分析;童少伟等<sup>[6]</sup>推导了基于层剪型高层建筑动力学方程的瞬时最优控制算法,并在算法的反馈项中加入了加速度项

\* 收稿日期: 2015-07-08; 修订日期: 2015-12-08

基金项目: 国家自然科学基金(51378437)

作者简介: 童少伟(1985—),男,博士生(通讯作者. E-mail: wt900800@126.com).

以提高算法的控制效果。但是,瞬时最优控制算法是基于经典二次型性能泛函导出的,经典二次型性能泛函需要选择合理的状态向量和控制力向量权系数矩阵  $Q$  和  $R$ 。不合理的  $Q$  和  $R$  矩阵可能导致控制效果显著下降,甚至导致受控结构本身不稳定。如何提高权系数矩阵的适应性是一个亟待解决的问题。

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)是智能控制的一个分支,它通过自学习的方式获得误差信息,并将信息反馈给系统,进而提高控制器的控制效果。迭代学习控制可以追溯到1978年 Uchiyama<sup>[7]</sup>提出的控制运动机械手臂的概念,后来 Arimoto 等<sup>[8]</sup>发展了 Uchiyama 的概念,并于1984年明确提出了迭代学习控制方法。迭代学习控制通过分析系统输出与期望值的误差来修正控制量。Wang 等<sup>[9]</sup>认为迭代学习控制是最热门的迭代控制方法;Smolders 等<sup>[10]</sup>提出了基于模型的非线性迭代学习控制方法;Cueli 等<sup>[11]</sup>将迭代学习控制方法与非线性模型预测控制器相结合并提出非线性模型的预测控制方法。近年来,迭代学习控制在国内亦受到了学者们的广泛关注,李俊民等<sup>[12]</sup>针对含有未知时变参数和时变时滞的非线性参数化系统,提出了一种新的自适应迭代学习控制方法;曹伟等<sup>[13]</sup>研究了一种带有初态学习的迭代学习控制算法,并得到了该算法谱半径形式的收敛条件。

迭代学习控制在机械、自动控制行业中应用较多,而在工程结构振动控制中尚属少见。工程结构振动中往往存在不确定性,例如前述的地震荷载即为随机激励的情况,传统的最优控制算法仅考虑结构的响应反馈,而不考虑输入荷载的前馈项,并且无法根据输入荷载在线实时调整控制力。传统最优控制方法和迭代学习智能控制的结合恰好能解决这一弊端。另一方面,对于高层结构而言,其楼层多,在每一楼层设置主动控制器既存在不合理性亦不一定取得较优控制效果。因此,研究主动控制器安装位置的优化问题具有实际意义。

本文基于传统的瞬时最优控制算法和迭代学习控制,提出离散系统迭代学习型瞬时最优控制算法(DIOC\_ILC),给出了该方法收敛性的证明,并采用具体的高层建筑数值算例验证新型算法的有效性,继而讨论一定数量主动控制器前提下的安装位置优化问题。

## 1 迭代学习型瞬时最优控制律推导

考虑层剪型高层建筑结构动力学方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Hu + \Gamma\ddot{x}_g. \quad (1)$$

式(1)相应的状态方程为

$$\dot{z} = Az + Bu + E\ddot{x}_g, \quad (2)$$

其中,  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{bmatrix}$  为系统矩阵,  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \cdot H \end{bmatrix}$  为控制力转换矩阵,  $E =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \cdot \Gamma \end{bmatrix}$  为输入荷载转换矩阵。

令

$$\tilde{A} = \exp(A \cdot \Delta t), \quad \tilde{B} = \int_0^{\Delta t} \exp(A \cdot \Delta t) dt \cdot B, \quad \tilde{E} = \int_0^{\Delta t} \exp(A \cdot \Delta t) dt \cdot E,$$

则式(2)对应的离散系统状态方程为

$$z(k+1) = \tilde{A} \cdot z(k) + \tilde{B} \cdot u(k) + \tilde{E} \cdot \ddot{x}_g(k). \quad (3)$$

引入离散系统状态方程的二次型性能泛函:

$$J(k+1) = \frac{1}{2} [z^T(k+1) \cdot Q \cdot z(k+1) + u^T(k) \cdot R \cdot u(k)], \quad (4)$$

由式(3)和(4)可构造 Hamilton(哈密顿)函数:

$$H = \frac{1}{2} [ \mathbf{z}^T(k+1) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}(k+1) + \mathbf{u}^T(k) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(k) ] + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1) [ \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{x}_g(k) - \mathbf{z}(k+1) ]. \quad (5)$$

由 Pontryagin(庞德里亚金)极小值原理可知:

$$\begin{cases} \frac{\Delta H}{\Delta \mathbf{z}(k+1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}(k+1) - \boldsymbol{\lambda}(k+1) = \mathbf{0}, \\ \frac{\Delta H}{\Delta \mathbf{u}(k)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\lambda}(k+1) = \mathbf{0}, \\ \frac{\Delta H}{\Delta \boldsymbol{\lambda}(k+1)} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{x}_g(k) = \mathbf{z}(k+1). \end{cases} \quad (6)$$

在外激励不可预知的前提下,最优控制力中忽略外激励反馈,可推导出离散系统瞬时最优控制力为

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z}(k). \quad (7)$$

将方程(7)所示的控制力向量代入方程(3)可得系统响应为

$$\mathbf{z}(k+1) = [ \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} ] \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{x}_g(k). \quad (8)$$

对于确定系统而言,其性能泛函中的权系数矩阵  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  通过预先试算给定,因此系统实时控制力仅取决于系统的反馈,而无法进行在线实时调节.迭代学习控制算法是一种智能控制算法,由于其自学习能力,可自修正控制信号,进而得到优化后的控制力.基于式(7)、(8)所示的控制力及系统响应,本文继而推导离散系统迭代学习型瞬时最优控制.

令离散系统控制力增益矩阵及系统响应矩阵分别为

$$\boldsymbol{\Gamma} = -(\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = [ \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} ], \quad (10)$$

则式(7)、(8)所示的控制力及系统响应可转化为

$$\mathbf{u}(k) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{z}(k), \quad (11)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{x}_g(k). \quad (12)$$

在迭代设计中,由于外激励项的不可预知性,因此迭代设计中不考虑外激励项  $\tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{x}_g(k)$ ,并令下标  $i$  表示迭代步数.

令任意荷载步  $k$  时的迭代初始状态向量和控制力向量分别为

$$\mathbf{z}_0(k) = \mathbf{z}(k), \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_0(k) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{z}_0(k). \quad (14)$$

一般地,对于高层建筑地震响应控制而言,期望的系统设计状态  $\mathbf{z}_d = \{0\}$ ,因此若用误差型表示迭代过程中状态向量变化量可得

$$\hat{\mathbf{z}}_i(k+1) = \mathbf{e}_i(k+1) = \mathbf{z}_i(k+1) - \mathbf{z}_d(k+1). \quad (15)$$

由式(15)可知,式(14)中的控制力为系统迭代过程中的控制力增量,其实质为

$$\hat{\mathbf{u}}_i(k) = \mathbf{u}_i(k) - \mathbf{u}_{i-1}(k) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot [ \mathbf{z}_i(k+1) - \mathbf{z}_d(k+1) ]. \quad (16)$$

至此,迭代学习控制可转化为标准形式的迭代学习律:

$$\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{u}_{i-1}(k) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_i(k+1). \quad (17)$$

式(17)亦可写成

$$\mathbf{u}_n(k) = \mathbf{u}_0(k) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i(k+1), \quad (18)$$

其中,  $n$  为迭代终止步数.

相应地,在如式(18)所示的控制力作用下,系统的响应为

$$\mathbf{z}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}_n(k) + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_g(k). \quad (19)$$

## 2 收敛性分析

为分析离散系统迭代学习型瞬时最优控制算法的收敛性,首先,需引入3个假设:

假设1: 期望控制力有界,即  $\max_{1 \leq k \leq n} \|\mathbf{u}_d(k)\| \leq b_{u_d}$ ,其中  $b_{u_d}$  为正常数;

假设2: 外激励有界,即  $\max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \|\tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{g,i}(k)\| \leq b_\beta$ ,其中  $b_\beta$  为正常数;

假设3: 每次迭代过程中,轨迹总是从  $\mathbf{z}_d(0)$  的邻域开始,即:  $\|\mathbf{z}_d(0) - \mathbf{z}_i(k)\| \leq b_{q_0}$ ,其中  $b_{q_0}$  为正常数.

对于高层建筑经受的荷载而言,其值总是有限的,在有限的荷载作用下,结构的响应是有限的,因此假设1、2总是成立;在结构未坍塌的前提下,可认为结构每个计算荷载步初始状态总是位于平衡位置附近,因而,假设3亦成立.

基于上述3个假设,令

$$\|\tilde{\mathbf{A}}\| = b_{\tilde{A}}, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}\| = b_{\tilde{B}}, \quad \|\mathbf{\Gamma}\| = b_{\mathbf{\Gamma}}, \quad \|\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{A}}\| = b_{\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{A}}, \quad \|\tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_g(k)\| = b_\beta.$$

考虑式(3)所示的离散系统状态方程,令任意荷载步  $k$  时的任意迭代步  $i$  下,系统响应与响应期望值的差值及控制力与控制力期望值的差值分别为

$$\hat{\mathbf{z}}_i(k+1) = \mathbf{z}_d(k+1) - \mathbf{z}_i(k+1); \quad \hat{\mathbf{u}}_i(k) = \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_i(k),$$

可得

$$\hat{\mathbf{z}}_i(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_i(k) + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i(k) - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_g(k). \quad (20)$$

考虑假设1、2,可得

$$\|\hat{\mathbf{z}}_i(k+1)\| \leq b_{\tilde{A}} \cdot \|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\| + b_{\tilde{B}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\| + b_\beta. \quad (21)$$

对式(21)进行递推,并考虑假设3,可得

$$\|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} b_{\tilde{A}}^{k-1-j} \cdot (b_{\tilde{B}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\| + b_\beta) + b_{\tilde{A}}^k \cdot b_{q_0}. \quad (22)$$

考虑迭代学习律式(17),可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k) &= \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_{i+1}(k) = \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_i(k) - \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_i(k+1) = \\ &= \hat{\mathbf{u}}_i(k) - \mathbf{\Gamma} \cdot [\mathbf{z}_d(k+1) - \mathbf{z}_i(k+1)] = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_i(k) - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_i(k) - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_g(k). \end{aligned} \quad (23)$$

考虑假设2、3,可得

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{B}}\| \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\| + b_{\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{A}} \cdot \|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\| + b_{\mathbf{\Gamma}} \cdot b_\beta. \quad (24)$$

令  $\rho = \|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{B}}\|$ , 并将式(22)、(23)代入上式,可得

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\| &\leq \rho \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\| + b_{\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{A}} \cdot b_{\tilde{A}}^k \cdot b_{q_0} + b_{\mathbf{\Gamma}} \cdot b_\beta + \\ &= b_{\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{A}} \cdot \left[ \sum_{j=0}^{k-1} b_{\tilde{A}}^{k-1-j} \cdot (b_{\tilde{B}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\| + b_\beta) \right]. \end{aligned}$$

对上式两端同乘以  $(1/\lambda)^k$ , 取  $\lambda$  范数,可得

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\| \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \leq \rho \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\| \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k + b_{\mathbf{\Gamma} \cdot \tilde{A}} \cdot b_{q_0} \cdot \left(\frac{b_{\tilde{A}}}{\lambda}\right)^k +$$

$$b_{\mathbf{r}} \cdot b_{\beta} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k + \frac{b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}}}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\lambda}\right)^{k-1-j} \cdot \left(b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\| \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j + b_{\beta}\right). \quad (25)$$

取  $\lambda > \max\{1, b_{\tilde{\mathbf{A}}}\}$ , 可得

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\|_{\lambda} &\leq \rho \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\|_{\lambda} + b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}} \cdot b_{q_0} + b_{\mathbf{r}} \cdot b_{\beta} + \\ &(b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\|_{\lambda} + b_{\beta}) \cdot \frac{b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}}. \end{aligned} \quad (26)$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho + \frac{b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}}, \\ \varepsilon &= b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}} \cdot b_{q_0} + b_{\mathbf{r}} \cdot b_{\beta} + \frac{b_{\beta} \cdot b_{\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{A}}} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}}, \end{aligned}$$

则由式(26)可得

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\|_{\lambda} \leq \rho \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\|_{\lambda} + \varepsilon. \quad (27)$$

由式(27)可递推得到

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{i+1}(k)\|_{\lambda} \leq \tilde{\rho}^i \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_1(k)\|_{\lambda} + \frac{\varepsilon \cdot (1 - \tilde{\rho}^i)}{1 - \tilde{\rho}}. \quad (28)$$

取  $\lambda$  足够大, 使得  $\tilde{\rho} \approx \rho < 1$ , 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\|_{\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \tilde{\rho}}. \quad (29)$$

式(22)两端同乘以  $(1/\lambda)^k$  可得

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\| \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k &\leq \\ \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{b_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\lambda}\right)^{k-1-j} &\cdot \left(b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\| \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j + b_{\beta} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j + \left(\frac{b_{\tilde{\mathbf{A}}}}{\lambda}\right)^k \cdot b_{q_0}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

由于  $b_{\beta} \cdot (1/\lambda)^j \leq b_{\beta}$ ,  $b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda < 1$ , 可得

$$\|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\|_{\lambda} \leq \frac{b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}} \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_i(j)\|_{\lambda} \cdot \frac{b_{\beta} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}} + b_{q_0}. \quad (31)$$

将式(29)代入式(31), 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\|_{\lambda} \leq \frac{b_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \tilde{\rho}} + \frac{b_{\beta} \cdot [1 - (b_{\tilde{\mathbf{A}}}/\lambda)^n]}{\lambda - b_{\tilde{\mathbf{A}}}} + b_{q_0}. \quad (32)$$

由式(29)、(32)可知, 当  $b_{\beta} = 0, b_{q_0} = 0$  时, 即不考虑初始条件偏差和外激励时,  $\|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\|_{\lambda}$ ,  $\|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\|_{\lambda}$  均收敛于 0; 否则,  $\|\hat{\mathbf{u}}_i(k)\|_{\lambda}$ ,  $\|\hat{\mathbf{z}}_i(k)\|_{\lambda}$  按  $b_{\beta}$  和  $b_{q_0}$  的函数有界收敛。

所以, 式(18)、(19)所示系统的收敛条件为

$$\rho = \|\mathbf{I} - \mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{B}}\| \leq 1, \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

## 3 数值仿真

### 3.1 数值分析模型

选择 Benchmark II 的 20 层钢结构模型作为计算模型, 采用静力凝聚法对原结构进行自由度缩减, 可得 20 自由度层剪模型<sup>[14]</sup>。结构阻尼比设定为 0.02。

考虑主动拉索(ATS)型主动控制结构,采用全状态反馈,为分析离散系统迭代学习型瞬时最优控制算法的控制效果,本文分别对无控结构、经典瞬时最优化控制、迭代学习型瞬时最优控制3种工况下的结构地震响应进行分析.其中二次型性能泛函中的权系数矩阵分别取为  $\mathbf{Q} = a \times [\mathbf{K}, 0; 0, \mathbf{M}]$ ,  $\mathbf{R} = b \times \mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{M}$  分别为系统的刚度和质量矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵, 权系数矩阵中的系数取为  $a = 1, b = 3 \times 10^{-7}$ .

### 3.2 输入荷载

高层建筑对地震作用的响应一方面取决于结构本身的特性,另一方面与输入的地震波有关.不同的地震波频谱特性对同一结构而言,结构的动力响应存在显著的差异,因此,输入地震波的选取是极其重要的.对于近场、浅源以及岩层表面记录的地震波会显现出高峰值加速度、低峰值速度以及作用周期短的特性;对于远场、深源以及软弱土层表面记录的地震波则呈现相反的特性,即低峰值加速度、高峰值速度以及作用周期长的特性.Zhu 等<sup>[15]</sup>指出,地震波的选取可依据地震波时程记录的峰值加速度( $a_p$ )与峰值速度( $v_p$ )的比值.Elnashai 等<sup>[16]</sup>按照峰值加速度( $a_p$ )与峰值速度( $v_p$ )的比值与结构刚度关系进行了近似归纳.

令  $\gamma = a_p/v_p$ , 则地震波与结构刚度关系可归纳为3类:

$$\begin{cases} \text{柔性结构: } \gamma \in (0, 0.8), \\ \text{一般结构: } \gamma \in (0.8, 1.2), \\ \text{刚性结构: } \gamma \in (1.2, \infty). \end{cases} \quad (34)$$

式(34)可解读为  $\gamma \in (0, 0.8)$  时,地震波更不利于柔性结构;  $\gamma \in (1.2, \infty)$  时,地震波不利于刚性结构.按照式(34)选取3条地震波作为系统的输入地震荷载.所选取地震波见表1,其持时均为60 s.

表1 输入地震波

Table 1 The seismic waves for loading

name	magnitude (Mw)	time	$a_p/g$	$v_p/(m/s)$	$\gamma$
Chichi	7.6	1999-09-20	0.255 7	0.432 0	0.60
El Centro	6.9	1940-05-19	0.341 69	0.334 5	1.04
Sierra El Mayor	7.2	2010-04-04	0.304 12	0.240 3	1.29

图1~6分别为3条地震波的时程曲线及其频谱特性.

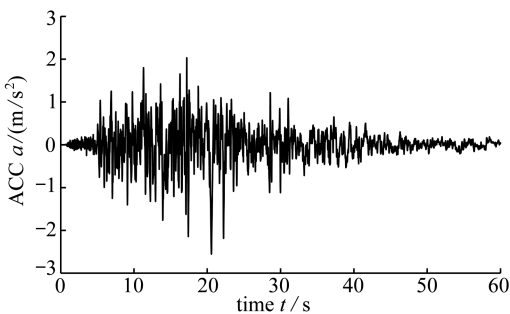


图1 Chichi地震波时程

Fig. 1 The time history (Chichi earthquake)

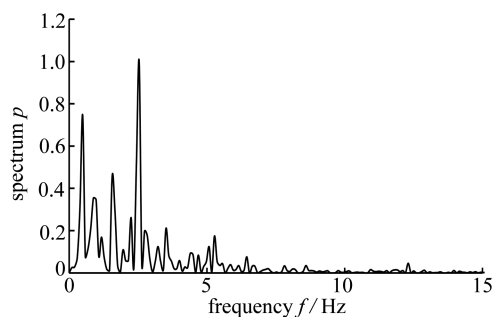


图2 Chichi地震波频谱

Fig. 2 The spectrum characteristics (Chichi earthquake)

由图1~6可知,Chichi地震波在频域上分布较宽,其低频及高频部分能量均较高,呈现多峰值特性;相对而言,Sierra El Mayor地震波的能量集中于高频部分.

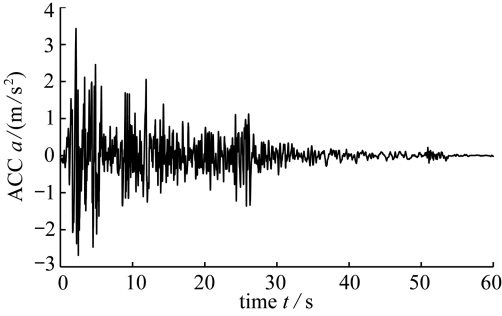


图3 El Centro 地震波时程

Fig. 3 The time history (El Centro earthquake)

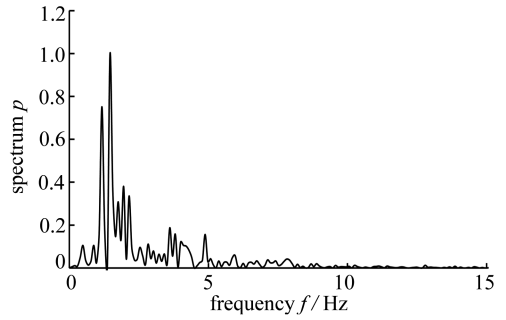


图4 El Centro 地震波频谱

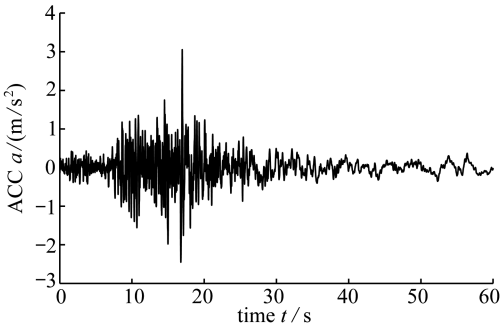
Fig. 4 The spectrum characteristics  
(El Centro earthquake)

图5 Sierra El Mayor 地震波时程

Fig. 5 The time history (Sierra El Mayor earthquake)

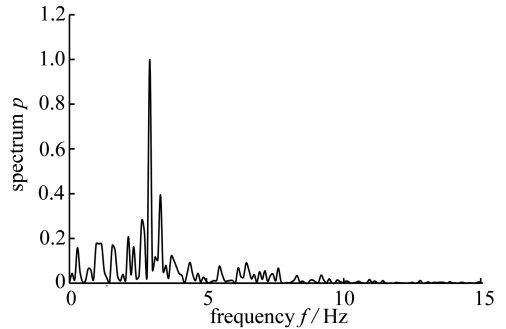


图6 Sierra El Mayor 地震波频谱

Fig. 6 The spectrum characteristics  
(Sierra El Mayor earthquake)

### 3.3 迭代收敛性分析

考虑系统迭代学习型瞬时最优控制算法的迭代收敛性.图7为系统迭代次数范围为[1, 30]次时,结构各楼层位置位移与速度响应峰值的叠加值.

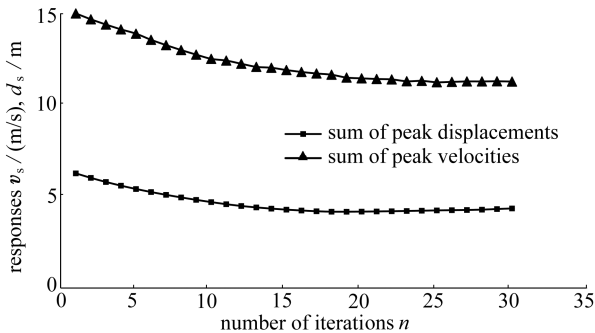


图7 结构峰值响应收敛状况

Fig. 7 Convergence of the structure peak responses

由图7知,给定的系统在迭代次数约为25次时,系统将收敛于稳定解;迭代次数在20次以后,系统的响应峰值叠加值变化不明显,因此,在结构响应分析中,将迭代次数设定为20次.

### 3.4 系统响应分析

图8~10分别为3条地震波作用下的系统响应峰值.

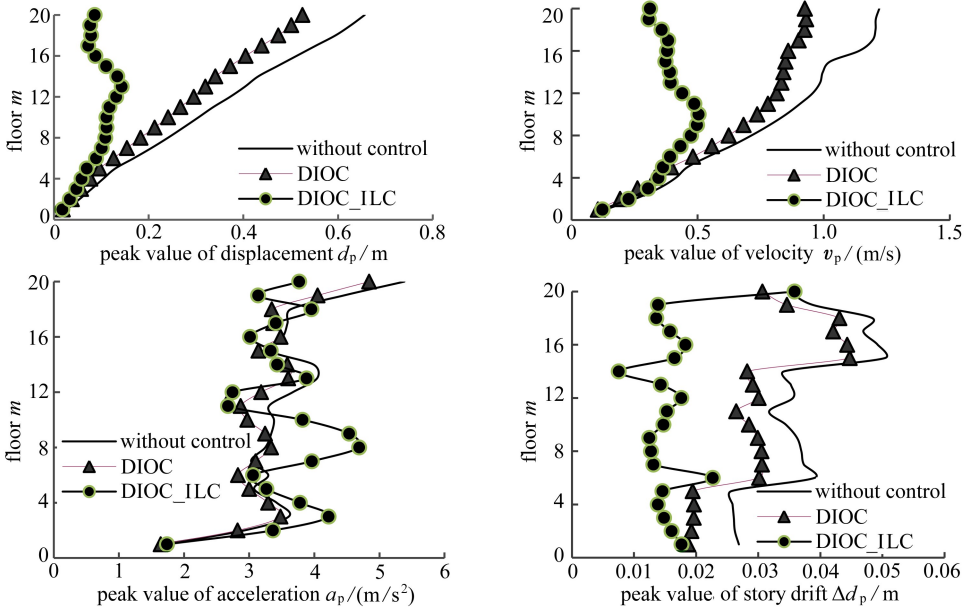


图8 Chichi地震波作用下的结构响应

Fig. 8 Responses of the structure (Chichi earthquake)

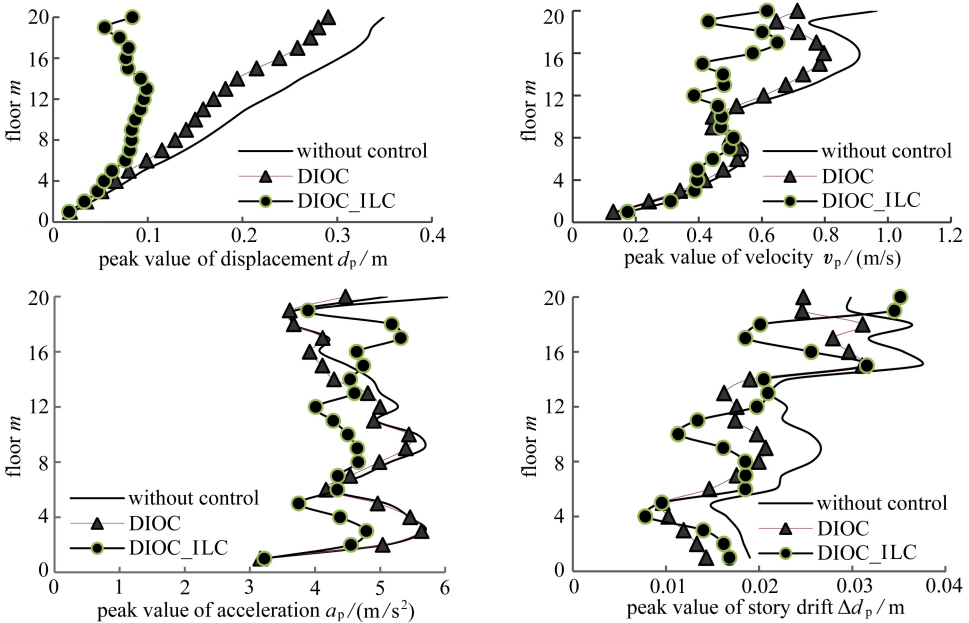


图9 El Centro地震波作用下的结构响应

Fig. 9 Responses of the structure (El Centro earthquake)

由图8~10可知,Chichi地震波作用时,结构的位移、速度、加速度及层间位移峰值响应均较El Centro及Sierra El Mayor地震波作用时大,可见,低频成分卓越的地震波更不利于高层柔性结构。在给定的权系数矩阵下,采用离散瞬时最优控制算法时,其控制效果较差,减震效果不明显,而采用迭代学习型瞬时最优控制时,由于迭代学习控制算法的自学习特性,该算法可实时依据预测的响应信号修正控制力,从而得到较离散瞬时最优控制更优的控制效果。迭代学习



型瞬时最优控制对结构位移、速度及层间位移响应有着较明显的控制效果,而由于控制算法的反馈项中未考虑加速度反馈,因而,3条地震波作用下,结构的加速度响应无明显的控制效果。总的来说,对于以控制结构位移及层间位移为目标的结构主动控制而言,迭代学习型瞬时最优控制对于高层柔性结构有较优的控制效果。

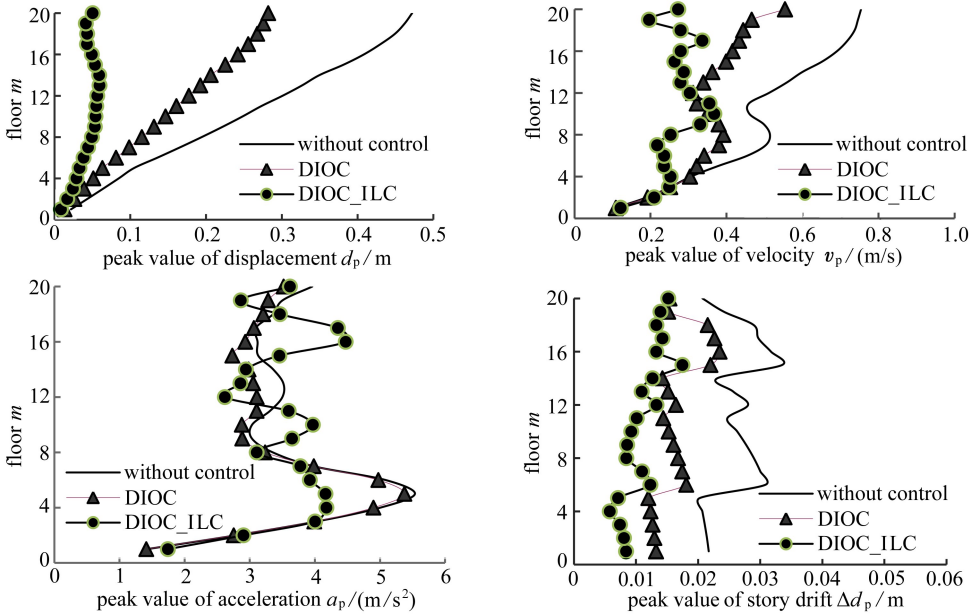


图 10 Sierra El Mayor 地震波作用下的结构响应

Fig. 10 Responses of the structure(Sierra El Mayor earthquake)

## 4 作动器位置优化

对于高层结构主动控制而言,其作动器数量并非越多越好,而作动器安装位置也无明确的最优位置,因此,讨论强震作用下高层结构主动控制器数量以及安装位置的优化问题具有实际意义。本文主要基于遗传算法(genetic algorithm, GA)对主动控制器的位置优化进行讨论。

### 4.1 改进遗传算法

在遗传算法中,问题的解被考虑成候选种群,种群历经基于适者生存机制的进化过程。采用遗传算法求解复杂问题的过程中,算法本身不需要解的梯度信息来优化目标函数。遗传算法适于求解复杂、不连续问题的全局优化解,但在遗传算法的迭代过程中,往往会出现振荡、早熟等缺点。基于此,本文引入目标函数尺度变换及种群个体迁移机制以改进算法的稳定性并防止算法早熟。

目标函数尺度变换可表述为式(35):

$$F' = e^{\alpha F}, \quad (35)$$

其中  $F'$  为尺度变换后的适应度函数值; $\alpha$  为尺度变换因子,该值越大,则个体适应度值变换后的差异越大,即增加了选择适应度高的个体的概率,但尺度变换因子过大可能导致算法过早收敛。因此,恰当的尺度变换因子是非常重要的,实际操作过程中需要多次试算,以确定适当的尺度变换因子。

自然界中的区域种群相对而言并非封闭,而是在一定程度上存在种群的迁移,从本质上

讲,考虑种群个体的迁移可以增加种群的多样性,继而可以防止遗传算法的早熟现象.对于区域种群而言,可以考虑在选择算子运算后,对选择后的种群进行部分种群替换,为了提高替换后种群的适应度,被替换的种群可人工设定为适应度值较低的部分.

## 4.2 数值仿真

基于选定的结构及地震波,设定主动控制器并将其设置在 5 个楼层位置,采用改进遗传算法对主动控制器位置进行优化,并以控制结构的位移及层间位移响应峰值为目标函数.设定种群大小为 40,种群个体迁移数量占种群大小的 20%.

图 11~13 分别为 3 条地震波作用下的目标函数进化曲线.

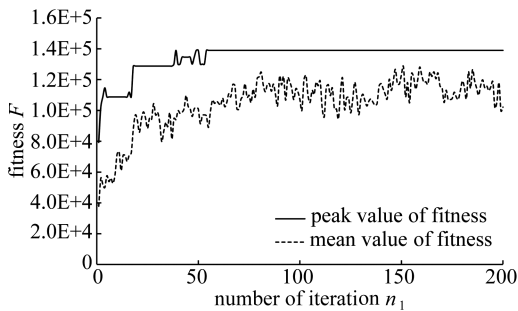


图 11 GA 进化曲线(Chichi)

Fig. 11 The evolution curve of the improved GA (Chichi)

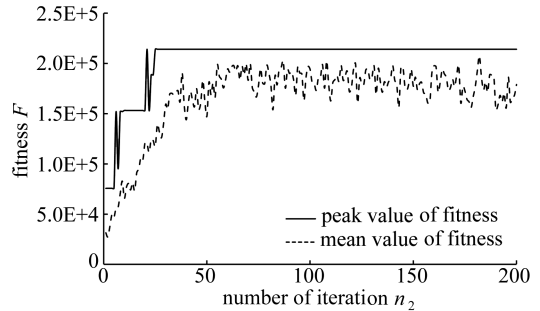


图 12 GA 进化曲线(El Centro)

Fig. 12 The evolution curve of the improved GA (El Centro)

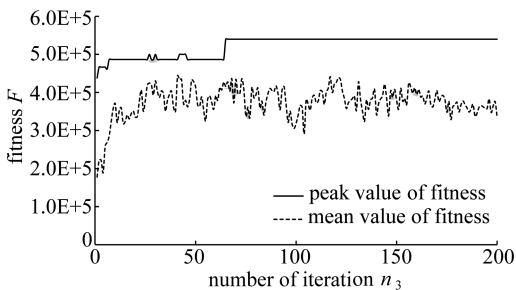


图 13 GA 进化曲线(Sierra El Mayor)

Fig. 13 The evolution curve of the improved GA

(Sierra El Mayor)

由图 11~13 可知,系统在 El Centro 地震波作用下时,系统大约经过 25 次迭代后收敛,而在 Chichi 和 Sierra El Mayor 地震波作用下,系统收敛较慢;由于 GA 优化算法中考虑了种群个体迁移机制,因此,适应度函数均值存在波动.主动控制器优化结果见表 2.

由于优化目标函数考虑了位移及层间位移响应,因此,对结构层间位移响应进行分析.输入地震波分别为 Chichi, El Centro 和 Sierra El Mayor 地震波水平向分量时,结构各楼层位移及层间位移峰值如图 14~19 所示.

由图 14~16 可知,在给定的 3 条地震波作用下,设置 5 个楼层位置控制器(GA 优化后)时,其控制效果明显优于全楼层设置控制器的工况.由图 17、18 可知,结构在 Chichi 及 El Centro 地震波作用下,设置 5 个楼层位置控制器(GA 优化后)时,其控制效果明显优于全楼层设置控制器的工况;而结构在 Sierra El Mayor 地震波作用下时,设置 5 个楼层位置控制器(GA 优化后)时,其控制效果接近全楼层设置控制器的工况.

表 2 主动控制器位置优化结果

Table 2 Optimization results of the positions from the active controllers

name	$\alpha$	result of GA
Chichi	20	[19, 8, 15, 5, 11]
El Centro	34	[4, 7, 19, 15, 11]
Sierra El Mayor	34	[13, 6, 20, 19, 3]

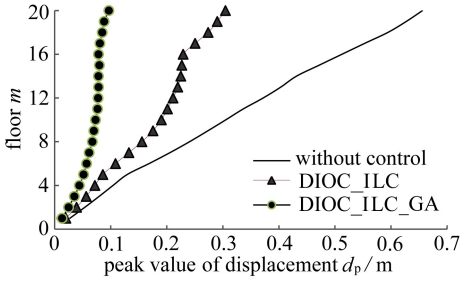


图 14 位移响应峰值(Chichi)

Fig. 14 Peak values of drift (Chichi)

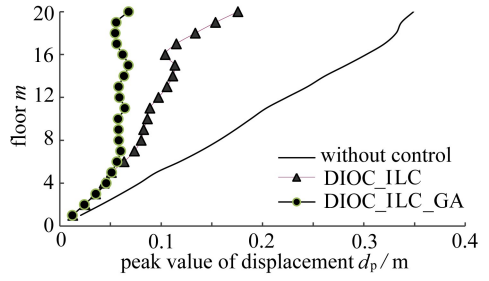


图 15 位移响应峰值(El Centro)

Fig. 15 Peak values of drift (El Centro)

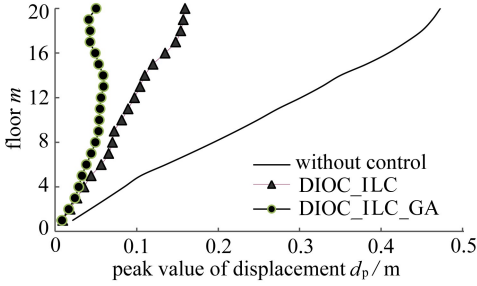


图 16 位移响应峰值(Sierra El Mayor)

Fig. 16 Peak values of drift (Sierra El Mayor)

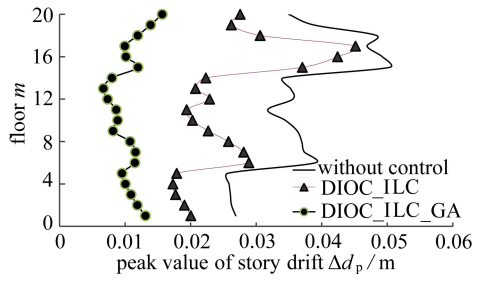


图 17 层间位移响应(Chichi)

Fig. 17 Peak values of story drift (Chichi)

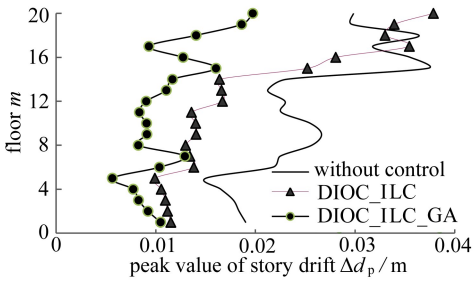


图 18 层间位移响应(El Centro)

Fig. 18 Peak values of story drift (El Centro)

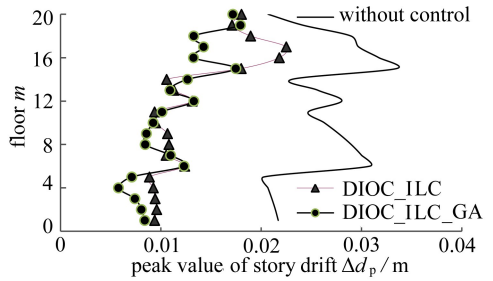


图 19 层间位移响应(Sierra El Mayor)

Fig. 19 Peak values of story drift (Sierra El Mayor)

## 5 结 论

本文基于最优控制算法及智能控制算法,提出了迭代学习型瞬时最优控制算法.该方法以线性离散系统为研究对象,以系统响应期望值与实际值之差为反馈信号,以离散系统的二次型性能泛函为目标函数,通过迭代学习自修正主动控制器的输出控制信号,提高了主动控制的控制效果,并给出了该算法收敛性的充分条件.数值算例表明,迭代学习型瞬时最优控制算法较离散瞬时最优控制算法有较明显的优势.

采用本文提出的改进遗传算法针对主动控制器位置进行优化是一种可行的方法.数值计算表明,仅在结构部分楼层设置主动控制器,且经遗传算法优化后,其主动控制效果可接近甚至超过全楼层设置主动控制器的工况.

## 参考文献(References):

- [1] Yang J N, Akbarpour A, Ghaemmaghani P. Optimal control algorithms for earthquake-excited buildings[C]//*Proceeding of 2nd International Symposium on Structural Control*, 1985.
- [2] Yang J N, Akbarpour A, Ghaemmaghani P. New optimal control algorithms for structural control[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, **113**(9): 1369-1386.
- [3] Yang J N, Li Z, Liu S C. Stable controllers for instantaneous optimal control[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1992, **118**(8): 1612-1630.
- [4] Bahar O, Mahzoon M, Bann M R, Kitagawa Y. Discrete instantaneous optimal control method [J]. *Iranian Journal of Science & Technology*, 2004, **28**(B1): 9-20.
- [5] 杨飏, 寇捷. 基于能量法的结构瞬时最优控制的参数影响[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2011, **32**(9): 1356-1359.(YANG Yang, KOU Jie. Parameter effect of the instantaneous optimal control based on the energy equation method[J]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*, 2011, **32**(9): 1356-1359.(in Chinese))
- [6] 童少伟, 杨翊仁, 唐怀平. 改进 IOC 控制算法及其在结构振动控制中的应用[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2012, **44**(S2): 27-30.(TONG Shao-wei, YANG Yi-ren, TANG Huai-ping. An improved instantaneous optimal control algorithm and its numerical applications[J]. *Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition)*, 2012, **44**(S2): 27-30.(in Chinese))
- [7] Uchiyama M. Formulation of high-speed motion of a mechanical arm by trial[J]. *Translation of the Society of Instrumentation and Control Engineers*, 1978, **14**(6): 706-712.
- [8] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123-140.
- [9] WANG You-qing, GAO Fu-rong, Doyle III Francis J. Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control[J]. *Journal of Process Control*, 2009, **19**(10): 1589-1600.
- [10] Smolders K, Volckaert M, Swevers J. Tracking control of nonlinear lumped mechanical continuous-time systems: a model-based iterative learning approach[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, **22**(8): 1896-1916.
- [11] Cueli J R, Bordons C. Iterative nonlinear model predictive control stability, robustness and applications[J]. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(9): 1023-1034.
- [12] 李俊民, 王元亮, 李新民. 未知时变时滞非线性参数化系统自适应迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 2011, **28**(6): 861-868.(LI Jun-min, WANG Yuan-liang, LI Xin-min. Adaptive iterative learning control for nonlinear parameterized-systems with unknown time-varying delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, **28**(6): 861-868.(in Chinese))
- [13] 曹伟, 丛望, 孙明. 初态学习下时滞非线性系统的迭代学习控制[J]. 仪器仪表学报, 2012, **33**(2): 315-320.(CAO Wei, CONG Wang, SUN Ming. Iterative learning control with initial state study for nonlinear time-delay system[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2012, **33**(2): 315-320.(in Chinese))
- [14] Lynch J P, Law K H. Energy market-based control of linear civil structures[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2002, **31**(10): 1855-1877.
- [15] Zhu T J, Heidebrecht A C, Tso W K. Effect of peak ground acceleration to velocity ratio on the ductility demand of inelastic system[J]. *Earthquake and Structural Dynamics*, 1988, **16**

(1): 63-79.

- [16] Elnashai A S, Di Sarno L. *Fundamentals of Earthquake Engineering*[M]. John Wiley & Sons, Ltd, 2008.

## Iterative Learning Instantaneous Optimal Control of Discrete Systems and Optimization of Actuator Positions

TONG Shao-wei, TANG Huai-ping

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P.R.China*)

**Abstract:** Through combination of the instantaneous optimal control (IOC) and the iterative learning control (ILC), one new hybrid control strategy called the iterative learning instantaneous optimal control was proposed. The discrete linear system was chosen as the target model for the new control strategy, and the quadratic performance functional of the discrete system was taken as the objective function to be minimized. During the controlling process of the system, the core idea of the ILC was introduced in order to modify the control signals which were initialized by the IOC. With the method of matrix norms, the sufficient condition for convergence of the new control strategy was established. Compared with the IOC, the iterative learning instantaneous optimal control gives simulation results of improved effectiveness. Furthermore, based on the improved genetic algorithm (GA), the optimization of the actuator positions in a multistory building to be controlled was investigated. Results of the numerical simulation indicate that, while the actuators are partially positioned at some optimally selected floors, the control effects may reach or even be better than those in the case of full installation of actuators at all floors.

**Key words:** instantaneous optimal control; iterative learning control; stability; performance functional; genetic algorithm

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51378437)

---

引用本文/Cite this paper:

童少伟, 唐怀平. 离散系统迭代学习型瞬时最优控制及作动器位置优化研究[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(2): 160-172.

TONG Shao-wei, TANG Huai-ping. Iterative learning instantaneous optimal control of discrete systems and optimization of actuator positions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(2): 160-172.