

绕轴线自转悬臂梁的局部限制失稳分析*

肖世富, 陈红永, 牛红攀

(中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621999)

(本刊编委肖世富来稿)

摘要: 建立了任意位置限位器约束下绕轴线自转悬臂梁的非线性模型.采用 Ritz 法分析系统的稳定性,获得了限位器无摩擦情形下系统的限制失稳临界值、分岔模式、后屈曲解以及致稳限位器的最佳配置位置.采用有限元法对失稳临界值与致稳限位器的优化位置进行了验证,获得了一致的结果.进一步分析了限位器夹紧力和支撑力摩擦效应对系统稳定性的影响规律,获得了有益的认识.研究表明,在限位器约束下,绕轴线自转悬臂梁存在临界转速,当转速超过临界值时,梁的零挠度平衡位置将发生叉式分岔而失去稳定性;限位器夹紧力摩擦效应将使失稳后的系统在转速回复时出现明显的滞后效应,以比失稳临界值更低的转速回到原平衡位置;绕轴线自转悬臂梁系统致稳限位器的最优配置位置在梁长距固支端的 78%左右等.这些成果对提升绕轴线自转悬臂梁的局部限制失稳性能的认识和指导限位器的配置具有实际意义.

关键词: 限制失稳; Ritz 法; 叉式分岔; 后屈曲; 滞后效应; 优化

中图分类号: O317; V214.9 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.02.003

引 言

工程上,有一大类工作状态下的转轴系统可抽象为限位器约束下绕轴线自转的悬臂梁模型,如转子系统、深海深井钻杆等.对于限位器,其约束往往是不完整的,非完整系统的稳定性问题在工业中大量存在,目前仍是动力学与控制研究领域的热点之一.Godoy 等^[1]全面总结了静态载荷作用下有限自由度非完整系统稳定性研究成果及进展.Chateau 等^[2]、Domokos 等^[3]、Chai^[4]、Holmes 等^[5]对双侧受限制压杆的屈曲及后屈曲进行了一系列的试验和理论研究,对受限制环、板和壳失稳的研究也较为丰富^[6],但对于绕轴线自转的悬臂结构的局部限制失稳研究较少.武秀根等^[7]建立了受压失稳杆在各种屈曲模态下的挠度曲线方程,分析了受压杆与限制失稳构件之间间隙对接触载荷的影响.Chen 和 Fang^[8]研究了固支-固支梁端部推入直管中的空间限制失稳现象.Tzaros 和 Mistakidis^[9]研究了几何缺陷梁的限制失稳问题,建立了轴向压缩下含任意初始几何缺陷梁的限制失稳问题的数学分析方法.Katz 和 Givli^[10]理论结合实验研究了弹性墙限制下轴向压缩梁的后屈曲问题,揭示了与刚性约束不一致的非线性现象.上述研究均考虑静态/准静态载荷,而鲜有对于整体大范围转动下梁的建模、稳定性与屈曲行为的

* 收稿日期: 2015-08-23; 修订日期: 2015-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(11402244)

作者简介: 肖世富(1970—),男,研究员,博士(E-mail: xiaosf@caep.cn);

陈红永(1986—),男,助理研究员,博士(通讯作者. E-mail: lxchenhy@caep.cn).

研究.文献[11-22]等对运动状态下弹性梁的建模、动态特性与稳定性开展研究,取得系列理论、数值与试验研究成果.其中文献[19]研究了绕轴线自转悬臂梁自由端受单侧约束下的稳定性,获得较丰富的非线性现象,而其边界条件不具有—般性,对于任意位置局部限制失稳问题的研究更具有学术和工程意义.

本文针对更有工程意义的任意位置限位器约束下绕轴线自转悬臂梁的稳定性问题,暂不考虑限位器与梁间的间隙,将非完整约束转化为非理想完整约束,重点考察限位器夹紧力与支撑力的摩擦效应,系统研究其数学建模方法、稳定性以及限位器摩擦力对其稳定性的影响规律,为提升系统稳定性的认识和限位器的优化配置提供理论基础.

1 数学建模

考虑如图1所示绕轴线自转圆截面悬臂梁系统,其局部受限位器约束.图1中, $O-XY$ 为描述梁变形的浮动坐标系,对应单位矢量为 \mathbf{i}, \mathbf{j} , 设该坐标系以匀角速度 Ω 绕 OX 轴转动.梁的密度为 ρ , 弹性模量为 E , 横截面积为 A , 转动惯量为 I , 梁总长为 L , 在梁长度为 $l (l \leq L)$ 处受限位器约束(无间隙,约束横向运动,轴向可滑动),限位器夹紧力为 P .

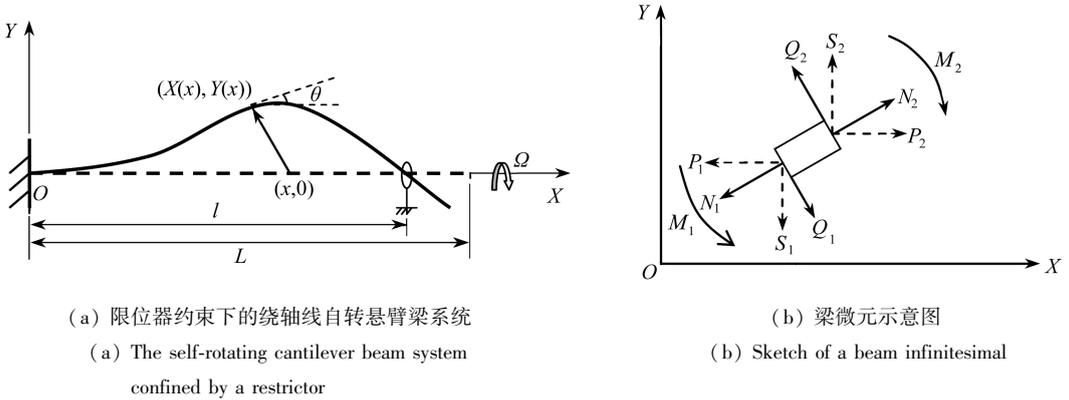


图1 受限位器约束的自转悬臂梁物理系统

Fig. 1 The self-rotating cantilever beam confined by a restricter

系统的建模基于以下3个基本假设: 1) 梁的变形满足 Euler-Bernoulli 假设; 2) 梁的变形运动限于 $O-XY$ 平面内; 3) 考虑梁的线弹性大变形.

在浮动坐标系 $O-XY$ 中,梁的位移场为

$$\mathbf{r} = X(x)\mathbf{i} + Y(x)\mathbf{j}, \tag{1}$$

梁的变形满足几何约束方程

$$\begin{cases} X' = \gamma \cos \theta, \\ Y' = \gamma \sin \theta, \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\gamma(x, t)$ 为梁的轴向伸长率, θ 为梁变形切向与转轴的夹角.

假设梁材料满足线弹性本构关系,则

$$\begin{cases} M(x) = EI\partial\theta(x)/\partial x, \\ N(x) = EA(\gamma(x) - 1), \end{cases} \tag{3}$$

式中 M, N 分别为梁的弯矩和轴力.

由图1所示梁微元受力图,可得到梁的动力学平衡方程:

1) 平动平衡方程

$$\begin{cases} T' = 0, \\ S' + \rho A \Omega^2 Y = 0, \end{cases} \quad (4)$$

式中 T 为梁 OX 轴方向的内力, S 为梁 OY 轴方向的内力, 由图 1 可得到轴力 N , 剪力 Q 与内力 T , S 的关系:

$$\begin{cases} N = T \cos \theta + S \sin \theta, \\ Q = -T \sin \theta + S \cos \theta. \end{cases} \quad (5)$$

2) 转动平衡方程

$$M' = -\gamma Q. \quad (6)$$

于是, 基于式 (5) 对式 (4) 进行转换, 可得到系统的非线性力学模型:

$$\begin{cases} X' - \gamma \cos \theta = 0, \\ Y' - \gamma \sin \theta = 0, \\ N - EA(\gamma - 1) = 0, \\ EI\theta' - M = 0, \\ M' + \gamma Q = 0, \\ N' - Q\theta' + \rho A \Omega^2 Y \sin \theta = 0, \\ Q' + N\theta' + \rho A \Omega^2 Y \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} X(0) = 0, Y(0) = 0, \theta(0) = 0, \\ M(L) = 0, N(L) = 0, Q(L) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

对于梁在限位器处的约束, 其几何位移约束可描述为

$$\exists \tilde{x} \in (0, L) \quad \text{s.t.} \quad X(\tilde{x}) = l, Y(\tilde{x}) = 0. \quad (9)$$

设限位器对梁的横向约束力(支撑力)为 $\tilde{Q}(\tilde{x})$, 则梁的剪力在约束点有

$$Q(\tilde{x}^+) - Q(\tilde{x}^-) = \tilde{Q}(\tilde{x}). \quad (10)$$

当限位器与梁接触存在摩擦时, 同时对梁产生轴向约束力. 若设限位器与梁的接触符合 Coulomb(库仑)摩擦定律, 且摩擦因数为 μ , 则梁在约束点的最大摩擦力为

$$F = \pm \mu (|\tilde{Q}(\tilde{x})| + P). \quad (11)$$

式 (11) 中集中轴力极值的符号受加、卸载和不同失稳模式等的影响而不同, 需要在分析时根据滑移方向确定. 本文分析系统的限制失稳, 仅用到极值方程 (10), 而无需计算摩擦力过渡阶段的具体数值.

受限位器摩擦力的作用, 梁轴力在约束点有

$$N(\tilde{x}^+) - N(\tilde{x}^-) = -F. \quad (12)$$

为使分析模型具有一般性, 对上述方程作无量纲化处理, 令

$$\begin{cases} u = (X - x)/L, v = Y/L, a = l/L, \\ \xi = x/L, \beta = \sqrt{\rho A L^4 / (EI)}, \omega = \beta \Omega, \varepsilon = I / (AL^2), \\ m = ML / (EI), n = NL^2 / (EI), q = QL^2 / (EI), \\ p = PL^2 / (EI), f = FL^2 / (EI), \tilde{q} = \tilde{Q}L^2 / (EI), \end{cases} \quad (13)$$

则系统的无量纲化数学方程为

$$\begin{cases} u' + 1 - \gamma \cos \theta = 0, \\ v' - \gamma \sin \theta = 0, \\ \gamma - 1 - \varepsilon n = 0, \\ \theta'' + \gamma q = 0, \\ n' - q\theta' + \omega^2 v \sin \theta = 0, \\ q' + n\theta' + \omega^2 v \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (14)$$

对应边界条件

$$\begin{cases} u(0) = 0, v(0) = 0, \theta(0) = 0, \\ n(1) = 0, q(1) = 0, m(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

若 $\varepsilon \ll 1$, 即假设梁轴向不可压缩, 此时 $\gamma \equiv 1$, 则式(14)可简化为

$$\begin{cases} u' + 1 - \cos \theta = 0, \\ v' - \sin \theta = 0, \\ \theta'' + q = 0, \\ q' + \omega^2 v \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

其边界条件仍为式(15).

下面对约束条件进行无量纲化, 几何位移约束方程(9)无量纲化为

$$\exists \hat{x} \in (0, 1) \quad \text{s.t.} \quad u(\hat{x}) = a - \hat{x}, v(\hat{x}) = 0; \quad (17)$$

剪力约束方程(10)无量纲化为

$$q(\hat{x}^+) - q(\hat{x}^-) = \tilde{q}(\hat{x}); \quad (18)$$

摩擦力无量纲化为

$$f = \pm \mu (|\tilde{q}(\hat{x})| + p). \quad (19)$$

方程(16)~(18)即为本文所要考虑的数学模型.

2 稳定性分析

2.1 限位器无摩擦时系统的稳定性

2.1.1 计算解析分析

本文采用 Ritz 方法分析系统的稳定性. 当限位器无摩擦时, 限位器约束力不做功, 系统保守, 无量纲微分方程组(16)存在势能

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 [(\theta')^2 - \omega^2 v^2] dx. \quad (20)$$

几何约束条件可近似为

$$\begin{cases} v' = \sin \theta, \\ v|_{x=a} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

设

$$v[x] = v_1 f(x, a), \quad (22)$$

式中 $f(x, a)$ 为满足边界条件和约束条件的试函数, v_1 为广义坐标. 本文采用低阶多项式匹配边界条件和约束条件, 有

$$f(x, a) = (x - a)x^2 [(20 - 20a + 6a^2) - 4(5 - 4a + a^2)x + (6 - 4a + a^2)x^2]. \quad (23)$$

由约束条件(21)的第1式有

$$\theta(x) = \arcsin(v') \approx v' + (v')^3/6. \quad (24)$$

将式(22)~(24)代入势能表达式(20)积分,并对广义坐标 v_1 变分且保留到3阶项有

$$[g_1(a) - \omega^2 g_2(a) + g_3(a)v_1^2]v_1 = 0, \quad (25)$$

式中

$$g_1(a) = \frac{16}{35}(300 - 1\,100a + 2\,100a^2 - 2\,260a^3 + 1\,385a^4 - 455a^5 + 63a^6),$$

$$g_2(a) = \frac{8}{3\,465}(3\,260 - 16\,300a + 33\,580a^2 - 36\,516a^3 + 22\,269a^4 - 7\,271a^5 + 1\,001a^6),$$

$$g_3(a) = 188.509\,09(3.897\,72 - 3.870\,44a + a^2)(2.538\,28 - 3.081\,59a + a^2) \times \\ (2.250\,54 - 2.714\,18a + a^2)(2.704\,69 - 2.682\,85a + a^2) \times \\ (0.651\,32 - 1.502\,10a + a^2)(1.046\,28 - 0.999\,67a + a^2).$$

由式(25),可得到系统的失稳临界值

$$\omega_c = \sqrt{g_1(a)/g_2(a)}. \quad (26)$$

临界失稳值 ω_c 与限位器位置的关系如图2所示.依据系统失稳临界值式(26),可对限位器约束位置进行优化,由 $d\omega_c/da = 0$ 可得限位器最佳配置位置为 $a_{\text{opt}} = 0.775\,2$.

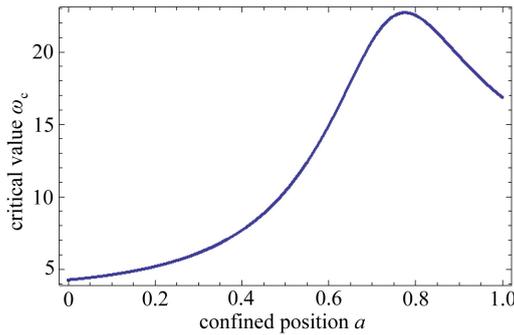


图2 系统失稳临界值

Fig. 2 The critical value of the system losing its stability

结合势能表达式(20),可得到系统的稳定性如下:

- (a) 当 $\omega < \omega_c$ 时,零挠度平衡位置 $v_1 = 0$ 稳定;
- (b) 当 $\omega \geq \omega_c$ 时,零挠度平衡位置 $v_1 = 0$ 发生叉式分岔而失去稳定性,存在稳定的后屈曲解

$$v_1 = \pm \sqrt{[g_2(a)\omega^2 - g_1(a)]/g_3(a)}. \quad (27)$$

$a = 0.8$ 时,系统的分岔解如图3所示, $a = 0.8$, $\omega = 25$ 时系统的分岔形态如图4所示.

2.1.2 有限元算例验证

下面采用有限元方法对上述近似解析分析得到的失稳临界值和限位器致稳最佳位置进行验证.算例:梁半径 0.01 m,长度 1 m,弹性模量 $E = 200$ GPa,密度 $\rho = 7\,800$ kg/m³.根据转子动力学理论,采用有限元方法对系统的失稳临界值与限位器最佳配置位置进行计算,并对计算结果按式(13)进行无量纲化处理.有限元计算获得的梁转动速度的失稳临界值与 Ritz 法分析结果对比如图5所示.

图5的比较表明,有限元计算得到的临界失稳值与 Ritz 法得到的失稳值基本一致,总体偏

差未超过 10%，在限位器最佳配置邻域 ($a \in (0.6, 1)$)，偏差在 5% 左右；有限元分析获得的限位器最佳配置位置为 $a_{opt} = 0.7835$ ，Ritz 法与其相比偏差仅 1.1%。此比较结果表明，本文所采用的 Ritz 法可获得满意的结果，后文将不再进行验证。

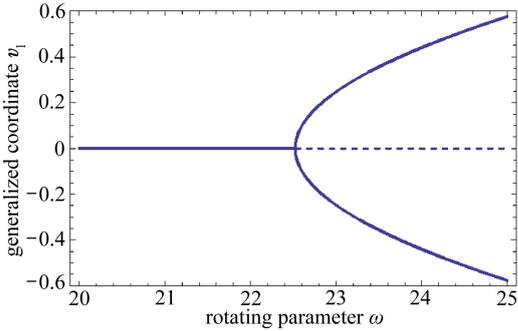


图 3 系统后屈曲解 ($a = 0.8$)

Fig. 3 The post-buckling solution of the system ($a = 0.8$)

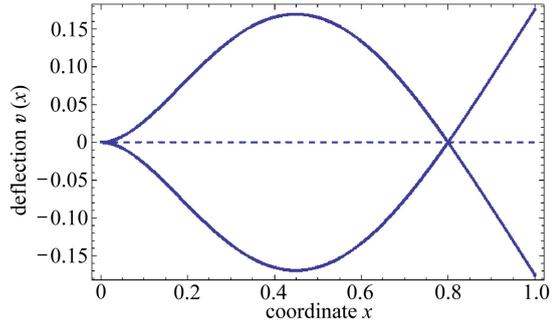


图 4 系统分岔形态 ($a = 0.8, \omega = 25$)

Fig. 4 The bifurcation shape of the system ($a = 0.8, \omega = 25$)

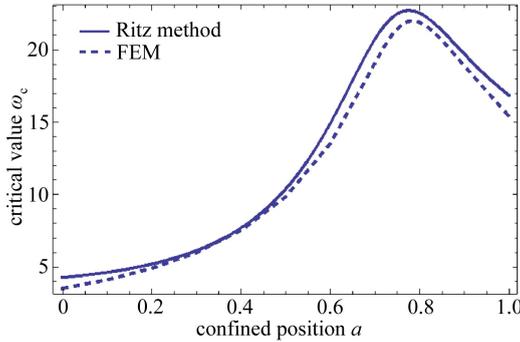


图 5 失稳临界值有限元法与 Ritz 法的对比

Fig. 5 The critical values of the system losing its stability analyzed with the FEM and the Ritz method

2.2 限位器摩擦效应对系统稳定性的影响

2.2.1 限位器预紧力摩擦效应对系统稳定性的影响

考虑限位器夹紧力所产生的摩擦力所作的功，系统的泛函为

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 [(\theta')^2 - \omega^2 v^2] dx - \mu pu(a). \tag{28}$$

由式(16)的第 1、2 式，并考虑到边界条件，可获得梁在限位器约束点的轴向位移：

$$\begin{cases} u' \approx - (1/2)(v')^2, \\ u(a) \approx - (1/2) \int_0^a (v')^2 dx. \end{cases} \tag{29}$$

取试函数(23)，代入泛函式(28)进行变分，可得到广义坐标 v_1 满足的平衡方程：

$$[g_1(a) + \mu pg_4(a) - \omega^2 g_2(a) + g_3(a)v_1^2]v_1 = 0, \tag{30}$$

式中

$$g_4(a) = \frac{4}{63} a^5 (840 - 2940a + 4440a^2 - 3756a^3 + 1950a^4 - 645a^5 + 136a^6 - 17a^7 + a^8).$$

由式(30)可得到系统的失稳临界值:

$$\omega_{\mu p c} = \sqrt{[g_1(a) + \mu p g_4(a)]/g_2(a)}. \quad (31)$$

显然,当 $\mu p \neq 0$ 时,由于 $g_4(a) \geq 0$,则 $\omega_{\mu p c} \geq \omega_c$;且 μp 越大,即限位器夹紧力所产生的摩擦力越大,则 $\omega_{\mu p c}$ 也越大,故限位器夹紧力所产生的摩擦力可增加系统的准静态稳定性;但由于 $g_4(a) \ll g_1(a)$,摩擦力对限位器作用最优位置的影响很小,例如摩擦因数 $\mu = 0.1$ 时,无量纲夹紧力 p 从0增大到40时,限位器作用最优位置 a 仅从0.775 2调整到0.779 4,变化很小,基本可忽略。

此时,系统的准静态稳定性与无摩擦情形类似:

(a) 当 $\omega < \omega_{\mu p c}$ 时,零挠度平衡位置 $v_1 = 0$ 稳定;

(b) 当 $\omega \geq \omega_{\mu p c}$ 时,零挠度平衡位置 $v_1 = 0$ 发生叉式分岔而失去稳定性,存在稳定的后屈曲解

$$v_1 = \pm \sqrt{[\omega^2 g_2(a) - g_1(a) - \mu p g_4(a)]/g_3(a)}. \quad (32)$$

由于摩擦力的存在,将影响系统后屈曲解的卸载曲线.以完全卸载回到零挠度平衡位置时的构型为参照构型,可方便地得到卸载时广义坐标 v_1 满足的平衡方程:

$$[g_1(a) - \mu p g_4(a) - \omega^2 g_2(a) + g_3(a)v_1^2]v_1 = 0. \quad (33)$$

由式(33)可得到屈曲解回到零挠度平衡位置的临界值:

$$\omega_{\mu p c}^- = \sqrt{[g_1(a) - \mu p g_4(a)]/g_2(a)}. \quad (34)$$

设 $\omega_1 = \omega_1^0 > \omega_{\mu p c}$, $v_1 = v_1^0$, $u(a) = u_0(a)$ 时系统开始卸载.此时,系统的卸载曲线为

$$\bar{v} = \begin{cases} \pm v_1^0, & \omega \in (\omega_1^-, \omega_1^0], \\ \pm \sqrt{[\omega^2 g_2(a) - g_1(a) + \mu p g_4(a)]/g_3(a)}, & \omega \in (\omega_{\mu p c}^-, \omega_1^-], \\ 0, & \omega \in [0, \omega_{\mu p c}^-], \end{cases} \quad (35)$$

式中

$$\omega_1^- = \sqrt{(\omega_1^0)^2 - 2\mu p g_4(a)/g_2(a)} \quad (36)$$

是限位器摩擦力反向到最大,梁开始回复时的临界值.

显然,当 $\mu \cdot p \neq 0$ 时, $\omega_{\mu p c}^- < \omega_{\mu p c}$,因此系统转速下降(卸载)时存在滞后效应.当 $a = 0.8$, $\mu p = 10$, $\omega_1^0 = 25$ 时,系统的分岔模式如图6所示,其中的平台段是限位器摩擦力改变大小及其方向的区间,箭头方向表示从加载到卸载的循环过程.

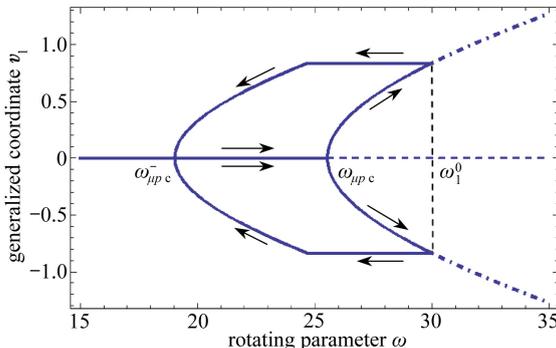


图6 含摩擦系统加、卸载时的分岔模式

Fig. 6 The bifurcation mode of the system with friction

2.2.2 限位器支撑力摩擦效应对系统稳定性的影响

下面分析限位器支撑力摩擦效应对系统失稳临界值和后屈曲解的影响.由式(19)知,为计算摩擦力的功,需计算限位器支撑力.根据变形梁力的平衡条件,可得到限位器无量纲化支撑力为

$$\tilde{q} = \left[\int_0^1 \omega^2 v(x) dx + q_0 \right] \arccos \theta \approx \int_0^1 \omega^2 v(x) dx - v'''(0). \quad (37)$$

考虑限位器支撑力所产生的摩擦力所作的功,系统的泛函为

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 [(\theta')^2 - \omega^2 v^2] dx + \mu |\tilde{q}| |u(\hat{a})|. \quad (38)$$

基于试函数(23),将式(29)、(37)代入式(38),对广义坐标 v_1 变分并保留到3阶可得

$$\left\{ g_1(a) - \omega^2 g_2(a) + \frac{3}{2} \mu g_4(a) |g_5(a)\omega^2 - g_6(a)| |v_1| + g_3(a)v_1^2 \right\} v_1 = 0, \quad (39)$$

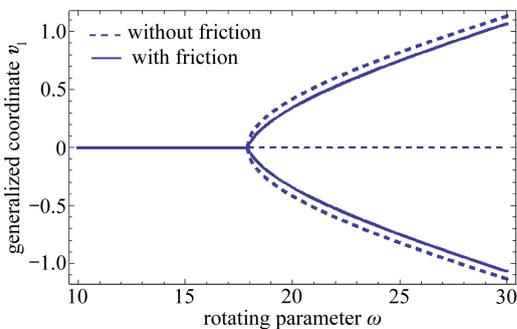
式中

$$g_5(a) = (30 - 80a + 65a^2 - 18a^3)/15,$$

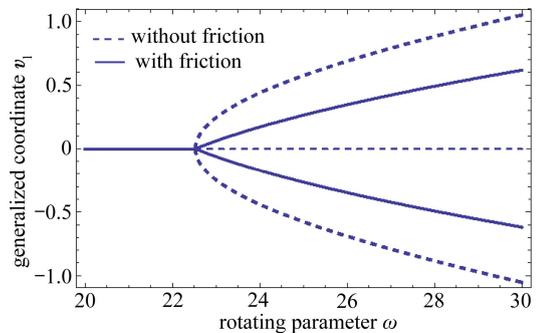
$$g_6(a) = 12(10 - 5a^2 + 2a^3).$$

式(39)表明,限位器支撑力所产生的摩擦力对失稳临界值无影响,仍然为 $\omega_{\mu c} = \omega_c = \sqrt{g_1(a)/g_2(a)}$,但对失稳后的平衡位置有影响,此时系统的后屈曲解为

$$v_1 = \pm [1/(4g_3(a))] \left\{ -3\mu g_4(a) |g_5(a)\omega^2 - g_6(a)| + \sqrt{9\mu^2 g_4^2(a) [g_5(a)\omega^2 - g_6(a)]^2 - 16g_3(a) [g_1(a) - \omega^2 g_2(a)]} \right\}. \quad (40)$$



(a) $\mu = 0.1, a = 0.65$



(b) $\mu = 0.1, a = 0.8$

图7 限位器支撑力摩擦效应对后屈曲解的影响

Fig. 7 The influence on the post-buckling solutions by the friction of the restrictor's supporting force

$\mu = 0.1, a = 0.65$ 时系统的后屈曲解如图7(a)所示, $\mu = 0.1, a = 0.8$ 时系统的后屈曲解如图7(b)所示,图7中虚线是无摩擦效应的后屈曲解.图7表明,支撑力摩擦效应对后屈曲解影响明显,体现出典型的随动力特征:在改变分岔模式的同时,将影响后屈曲解的幅值,其大小与无摩擦效应的后屈曲幅值(梁的挠度)相关,幅值越大、影响越大.

3 结束语

本文针对工程上关心的绕轴线自转悬臂梁系统的局部限制失稳问题,采用微元法建立了系统的几何非线性平衡方程,进行无量纲化,获得该类问题一般性的数学模型.采用 Ritz 法,分

别分析了限位器无摩擦、存在夹紧力和支撑力摩擦效应情形下系统的限制失稳临界值、分岔模式与后屈曲解,并对最大失稳临界值的限位器位置进行了优化;针对限位器无摩擦情形的临界失稳值与最优位置,有限元算例获得了一致的结果,验证了本文分析的有效性.本文的研究获得以下认识:

1) 配置限位器的绕轴线自转悬臂梁系统,存在临界转速,当转速小于临界转速时,系统零挠度位置稳定;当转速超过临界转速时,零挠度位置将发生叉式分岔而失稳,存在一对对称的非零平衡位置.

2) 限位器夹紧力摩擦效应将提升系统的临界转速,并对后屈曲解的卸载路径产生影响,存在状态不变的转速区间(摩擦力改变大小和方向历程),且以比临界值更小的转速返回到零挠度平衡位置,存在明显的滞后效应;限位器夹紧力摩擦效应对系统的分岔模式无影响.

3) 限位器支撑力摩擦效应将影响系统失稳的分岔模式,不再是叉式分岔,且影响后屈曲解的幅值,大小与无摩擦效应的后屈曲幅值(梁的挠度)相关,幅值越大、影响越明显,体现出典型的随动力特征;限位器支撑力摩擦效应对临界转速无影响.

4) 绕轴线自转悬臂梁系统致稳限位器的最佳配置位置在梁长距固支端的 78%左右.

致谢 本文作者衷心感谢中国工程物理研究院发展基金(2015B0201024)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] Godoy L A, Mirasso A E. On the elastic stability of static non-holonomic systems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(13/14): 3439-3462.
- [2] Chateau X, Nguyen Q S. Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction[J]. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 1991, **10**(1): 71-89.
- [3] Domokos G, Holmes P, Royce B. Constrained Euler buckling[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 1997, **7**(3): 281-314.
- [4] Chai H. The post-buckling response of a bi-laterally constrained column[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(7): 1155-1181.
- [5] Holmes P, Domokos G, Schmitt J, Szeberényi I. Constrained Euler buckling: an interplay of computation and analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **170**(3/4): 175-207.
- [6] 郭英涛, 任文敏. 关于限制失稳的研究进展[J]. 力学进展, 2004, **34**(1): 41-52. (GUO Ying-tao, REN Wen-min. Some advances in confined buckling[J]. *Advances in Mechanics*, 2004, **34**(1): 41-52. (in Chinese))
- [7] 武秀根, 郑百林, 贺鹏飞. 限制失稳模态方程及约束载荷计算[J]. 应用力学学报, 2009, **26**(2): 375-378. (WU Xiu-gen, ZHENG Bai-lin, HE Peng-fei. Constrained buckling equations and reaction load of bar[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2009, **26**(2): 375-378. (in Chinese))
- [8] Chen J S, Fang J. Deformation sequence of a constrained spatial buckled beam under edge thrust[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, **55**: 98-101.
- [9] Tzaros K, Mistakidis E. The constrained buckling problem of geometrically imperfect beams: a mathematical approach for the determination of the critical instability points[J]. *Meccanica*, 2015, **50**(5): 1263-1284.
- [10] Katz S, Givli S. The post-buckling behavior of a beam constrained by springy walls[J]. *Jour-*

- nal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, **78**: 443-466.
- [11] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, **10**(2): 139-151.
- [12] Bloch A M. Stability analysis of a rotating flexible system[J]. *Acta Applicandae Mathematica*, 1989, **15**(3): 211-234.
- [13] Lee S Y, Kuo Y H. Bending frequency of a rotating beam with an elastically restrained root [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, **58**(1): 209-214.
- [14] Haering W J, Ryan R R. New formulation for flexible beams undergoing large overall plane motion[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, **17**(1): 76-83.
- [15] 肖世富, 陈滨. 中心刚体-外 Timoshenko 梁系统的建模与分岔特性研究[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(12): 1286-1290.(XIAO Shi-fu, CHEN Bin. Modeling and bifurcation analysis of the centre rigid-body mounted on an external Timoshenko beam[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **20**(12): 1286-1290.(in Chinese))
- [16] 肖世富, 陈滨. 离心场中纵向悬臂梁的大范围分岔分析[J]. *力学学报*, 2000, **32**(5): 559-565.(XIAO Shi-fu, CHEN Bin. Global bifurcation analysis of a cantilever beam vertically fixed in centrifugal field[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(5): 559-565.(in Chinese))
- [17] XIAO Shi-fu, CHEN Bin, DU Qiang. On dynamic behavior of a cantilever beam with tip mass in a centrifugal field[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*, 2005, **33**(1): 79-98.
- [18] Xiao S F, Chen B. Dynamic characteristic and stability analysis of a beam mounted on a moving rigid body[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, **74**(5/6): 415-426.
- [19] XIAO Shi-fu, CHEN Bin, YANG Min. Bifurcation and buckling analysis of a unilaterally confined self-rotating cantilever beam[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, **22**(2): 177-184.
- [20] Xiao S F, Yang M. Nonlinear dynamic modeling, instability and post-buckling analysis of a rotating beam with a flexible support[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2006, **6**(4): 475-491.
- [21] 肖世富, 许茂. 轴对称转动粘弹性简支梁的稳定性分析[J]. *力学季刊*, 2010, **31**(1): 64-70.(XIAO Shi-fu, XU Mao. On stability of viscoelastic simply supported beam undergoing overall axially symmetrical rotation[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2010, **31**(1): 64-70.(in Chinese))
- [22] 赵婕, 于开平, 学忠. 末端带有刚体的旋转梁运动稳定性分析[J]. *力学学报*, 2013, **45**(4): 606-613.(ZHAO Jie, YU Kai-ping, XUE Zhong. The motion stability analysis of a rotating beam with a rigid body on its end[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(4): 606-613.(in Chinese))

Locally Confined Buckling Analysis of Self-Rotating Cantilever Beams

XIAO Shi-fu, CHEN Hong-yong, NIU Hong-pan

(*Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621999, P.R.China*)

(Contributed by XIAO Shi-fu, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The nonlinear model of a self-rotating cantilever beam confined by a restrictor located at an arbitrary position along the beam, was established. The stability of the system was investigated with the Ritz method. For the restrictor without friction, the critical values related to the restrictor's position of the system losing its stability, the bifurcation modes, the post-buckling solutions and the optimal position of the stabilizing restrictor were obtained. Then the analytical critical values and the optimal position were numerically verified with the finite element method. The results obtained with the 2 methods were consistent with each other. Furthermore, the influences on the system stability by the frictions caused by the clamping force and the supporting force from the restrictor were studied. The investigation shows that a critical value of the rotational velocity exists for the self-rotating cantilever beam locally confined by a restrictor. After the rotational velocity exceeds the critical value, the trivial equilibrium loses its stability through the pitchfork bifurcation. While the rotational velocity recovers from the buckling state, significant hysteresis occurs due to the friction caused by the clamping force of restriction, and the buckling system comes back to the trivial equilibrium with a rotational velocity lower than the critical value. The optimal position of the stabilizing restrictor is located at about 78% of the beam length from the cantilever fixed end. These results are useful to guide the restrictor installation.

Key words: confined buckling; Ritz method; pitchfork bifurcation; post-buckling; hysteresis; optimization

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11402244)

引用本文/Cite this paper:

肖世富, 陈红永, 牛红攀. 绕轴线自转悬臂梁的局部限制失稳分析[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(2): 138-148.

XIAO Shi-fu, CHEN Hong-yong, NIU Hong-pan. Locally confined buckling analysis of self-rotating cantilever beams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(2): 138-148.