

超声速流场中 6 自由度物体运动的模拟研究^{*}

李 涛¹, 随晶侠², 吴锤结¹

(1. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 能源与动力学院, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委吴锤结来稿)

摘要: 物体在流场中自由运动的模拟有很广泛的应用,文章描述计算 6 自由度(6DOF)刚体在超声速流场中自由运动的一种方法.流体部分求解 LES 方程,亚网格模型为拉伸涡模型.激波和刚体边界周围区域采用迎风型 WENO 格式,湍流区域采用低数值耗散的 TCD 格式.时间推进采用三阶的 SSP R-K 法.刚体采用 6 自由度模型,刚体姿态用四元数来表示,控制方程为常微分方程,采用四阶 Runge-Kutta 法求解.文章给出若干算例来验证程序的有效性,结果理想.

关键词: 6 自由度; 激波; 湍流; 大涡模拟; ghost-fluid 法

中图分类号: O368; O354.3 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.01.003

引 言

物体在流场中自由运动的模拟具有很广泛的应用背景,比如陨石在大气层破碎分离、扑翼飞行器、导弹投射问题等.物体的位置和姿态受气动力和力矩的影响,反过来也会影响流场的计算,因此需要流体求解器和 6 自由度求解器耦合计算.不难看出这类问题求解的关键点有以下 3 个:流体求解器、刚体求解器、流体和刚体边界处理.Lijewski 和 Suhs^[1] 计算了跨音速导弹分离轨道预测问题,流体部分求解 Euler 方程,刚体位置姿态有 6 个自由度,流体在正交网格上计算,刚体在贴体网格上计算,采用重叠网格法,网格间通过三线性插值传递信息.由于没有考虑粘性效应,他们计算的导弹姿态有很大误差.Koomullil 和 Cheng 等^[2] 在计算同类问题时,流体求解器采用非结构网格,湍流采用 RANS/LES 混合模型,刚体同样采用 6 自由度模型,流固耦合在 DiRTlib^[3] 支持下采用重叠网格法来实现.非结构网格虽然对复杂边界处理有优势,但计算精度很难提高,在这类问题里误差会被放大.Murman 和 Aftosmis 等^[4] 采用多重网格计算无粘流体中刚体的自由运动,刚体部分采用 NASA 的开源库 GMP^[5] 计算 6 自由度运动.刘君等^[6] 在研究子母弹抛壳问题中使用非结构变形网格技术,求解 Euler 方程,模拟了弹片的 6 自由度运动.

流体和刚体计算结果会相互影响,相互依赖,因此误差也会被放大,因此需要两个求解器

* 收稿日期: 2015-10-29; 修订日期: 2015-11-20

基金项目: 国家自然科学基金(11372068);国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2014CB744104)

作者简介: 李涛(1987—),男,博士生(E-mail: litao_sysu@qq.com);

吴锤结(1955—),男,教授(通讯作者.E-mail: cjlwudut@dlut.edu.cn).

都有很好的精度和稳定性。流体求解器能否很好地处理激波和湍流对此类问题很重要,直接影响气动力的计算。前人工作大多在求解 Euler 方程时,未考虑气体粘性。本文计算中激波和湍流同时存在。流体求解器在正交 Cartesian(笛卡尔)网格下,采用 LES 方法,在激波和刚体边界周围采用 WENO 格式,其他区域采用耗散很低的 TCD(tuned center-difference)格式^[7]。刚体部分采用四元数法求解 6 自由度模型,该方法的好处是没有奇点,且因为自由变量只有 4 个,计算速度更快。为处理复杂边界,刚体表面被划分为一系列三角形网格读入刚体求解器,然后将这些节点位置和速度信息传递给流体求解器,流体求解器接收到后采用 ghost-fluid 法施加边界条件,同时流体求解器将压力传递给刚体求解器。

1 数学模型

1.1 6 自由度刚体模型

本节描述刚体的自由运动模型,即 6 自由度运动模型。控制方程为 Newton-Euler 方程。记符号 i 表惯性坐标系, b 表随体坐标系。物体受到的力和力矩实时由流场计算出来,需要注意坐标系的转换。

1.1.1 平动

刚体质心运动的控制方程满足 Newton 运动定律:

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}_a^i + \mathbf{F}_e^i + \mathbf{F}_g^i = m\ddot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}^i, \quad (1)$$

其中, \mathbf{F}_a^i 表示气动力, \mathbf{F}_e^i 表示施加的外力(如推力), \mathbf{F}_g^i 表示重力, \mathbf{F}^i 表示物体受到的合外力, m 表示刚体质量, \mathbf{r}_{cm}^i 表示刚体质心的位置坐标向量。直接积分 Newton 方程可得到质心的位置:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}^i(t^{n+1}) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}^i}{m} \Delta t^2 + \mathbf{u}_{\text{cm}}^i(t^n) \Delta t + \mathbf{r}_{\text{cm}}^i(t^n), \quad (2)$$

其中, \mathbf{u}_{cm}^i 表示质心的速度, t^{n+1}, t^n 表示新、旧时间点, Δt 表示时间步长。

1.1.2 转动

随体坐标系坐标原点设在质心处,坐标轴同刚体的惯性主轴重合。在此坐标系下,转动控制方程(Euler 方程)为

$$\begin{cases} M_1^b = I_1^b \dot{\omega}_1^b - (I_2^b - I_3^b) \omega_2^b \omega_3^b, \\ M_2^b = I_2^b \dot{\omega}_2^b - (I_3^b - I_1^b) \omega_3^b \omega_1^b, \\ M_3^b = I_3^b \dot{\omega}_3^b - (I_1^b - I_2^b) \omega_1^b \omega_2^b, \end{cases} \quad (3)$$

其中, M_1^b, M_2^b, M_3^b 为在随体坐标系下施加在刚体上的 3 个力矩分量, $\omega_1^b, \omega_2^b, \omega_3^b$ 为随体坐标系下刚体角速度的 3 个分量, I_1^b, I_2^b, I_3^b 为 3 个主转动惯量。用四阶 Runge-Kutta 法求解此方程。角速度需要跟刚体的姿态(随体坐标系指向)建立关系,这里采用四元数法。四元数法有很多优点:相比 Euler 角,它更容易构建,且没有 gimbal lock;相比旋转矩阵,其数值计算更稳定、更高效(实际需要 3 个自由度,旋转矩阵有 9 个自由变量,四元数有 4 个)。

定义四元数 $\mathbf{q} = [w, x, y, z]^T$, 满足约束条件 $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, \mathbf{q} 对应的惯性坐标系到随体坐标系的转换矩阵 \mathbf{R} 如下式:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2(xy - zw) & 2(xz + yw) \\ 2(xy + zw) & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2(yz - xw) \\ 2(xz - yw) & 2(yz + xw) & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

随体坐标系转向的改变对应到四元数的变化满足如下关系：

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}^b, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -x & -y & -z \\ w & -z & y \\ z & w & -x \\ -y & x & w \end{bmatrix}. \quad (6)$$

同样可以用四阶 Runge-Kutta 法求解。

转动求解步骤如下：

- 1) 求解方程(3), 得到随体坐标系下的角速度 $\boldsymbol{\omega}^b$;
- 2) 求解方程(5), 得到下一时刻的四元数, 需要注意的是, 计算新时刻的四元数需做归一化处理, 否则物体会变形;
- 3) 根据式(4), 计算刚体表面节点新的位置: $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_{cm}^i + \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}^b$, 其中 \mathbf{r} 表示物体表面网格节点的位置坐标向量, 其在惯性坐标系与随体坐标系的转化公式为 $\mathbf{r}^b = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{r}$ 。

虽然四元数方便计算, 但不直观, 因此经常需要将四元数转为 Euler 角, 定义惯性坐标系下 Euler 角为 (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) , 有如下关系式:

$$\begin{cases} \tan(\phi_x) = \frac{2(wx + yz)}{w^2 - x^2 - y^2 + z^2}, \\ \tan(\phi_y) = -2(xz - wy), \\ \tan(\phi_z) = \frac{2(xy + wz)}{w^2 + x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases} \quad (7)$$

1.2 LES 控制方程

Favre 滤波后的 N-S 方程为

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \delta_{ik} \bar{p} - \tilde{\sigma}_{ik} + \tau_{ik}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_k - \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{u}_i + \tilde{q}_k + \sigma_k^e] = 0, \quad (10)$$

式中, 变量上横线表示时间平均, 变量上波浪线表示密度加权平均, 下同, t 表示时间, $\bar{\rho} = \frac{1}{T} \int_T \rho(t) dt$ 表示滤波后(采用盒式滤波)的密度, $\tilde{u}_{i,k} = \overline{\rho u_{i,k}} / \bar{\rho}$ 表示滤波后的速度分量, $x_{i,k}$ 表示坐标分量, $\bar{p} = \frac{1}{T} \int_T p(t) dt$ 表示滤波后的压强, $\tilde{E} = \overline{\rho E} / \bar{\rho}$ 表示滤波后的单位质量流体的总能量, δ_{ik} 表示 Kronecker 函数, 亚网格应力张量为

$$\tau_{ik} = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_k} - \tilde{u}_i \tilde{u}_k) - (\tilde{\sigma}_{ik} - \check{\sigma}_{ik}), \quad (11)$$

热通量为

$$\tilde{q}_k = -\kappa(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_k}, \quad (12)$$

应力张量为

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \mu(\tilde{T}) \left(2\tilde{S}_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \tilde{S}_{jj} \right), \quad (13)$$

应变率张量 \mathbf{S} 表达式为

$$\tilde{S}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right), \quad (14)$$

亚网格能量项为

$$\sigma_k^e = (\overline{\rho u_k E} - \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{E}) + (\overline{u_k \bar{p}} - \tilde{u}_k \bar{p}) - (\overline{\sigma_{ik} u_k} - \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{u}_k) - (\bar{q}_k - \tilde{q}_k). \quad (15)$$

因为 R 是气体常数, 由状态方程滤波得到

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}. \quad (16)$$

1.2.1 亚网格模型

能量方程滤波后产生了非常多的项. 关于亚网格项的研究很少, 研究方法通常是先通过 DNS 获得解, 再在 LES 的网格上滤波, 最后得到亚网格项的值. Vreman 等^[8-9]研究了 Mach (马赫) 数范围在 0.2~1.2 之间的二维剪切流. Martín 等^[10]研究了 Mach 数 0.52 的自由衰减各向同性湍流. 根据他们的研究, 式(11)中最后一项和式(15)后两项的贡献非常小, 可以忽略, 其余项需要用模型计算:

$$\tau_{ik} \approx \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_k} - \tilde{u}_i \tilde{u}_k), \quad (17)$$

$$\sigma_k^e \approx (\overline{\rho u_k E} - \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{E}) + (\overline{u_k \bar{p}} - \tilde{u}_k \bar{p}). \quad (18)$$

亚网格模型构造方法有很多种, 这里采用 Misra 和 Pullin 等^[11-13]提出的 stretched-vortex 模型. 它假设每个计算网格的亚网格尺度的运动, 由与当地可分辨尺度、涡同向、几乎轴对称的涡对造成. 亚网格项表达式为

$$\tau_{ik} = \bar{\rho} \tilde{k}_{\text{sgs}} (\delta_{ik} - e_i^\nu e_k^\nu), \quad (19)$$

$$\sigma_k^e = -\frac{1}{2} \bar{\rho} \Delta_c \tilde{k}_{\text{sgs}}^{1/2} (\delta_{jk} - e_j^\nu e_k^\nu) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}, \quad (20)$$

式中, e_i 是亚网格涡量轴的方向余弦(单位向量分量), $\nu = \bar{\mu}/\bar{\rho}$ 是动力粘性系数, Δ_c 是亚网格截断的长度尺度, $h = C_p T$ 是焓. 亚网格湍动能 \tilde{k}_{sgs} :

$$\tilde{k}_{\text{sgs}} = \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk, \quad (21)$$

式中 $k_c = \pi/\Delta_c$. 亚网格运动假设 Lundgren 拉伸螺旋涡, 其能量谱(动能)表达式为

$$E(k) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp(-2k^2 \nu / (3|\tilde{\alpha}|)), \quad (22)$$

式中, K_0 为 Kolmogorov 前因子, ϵ 为当地网格平均耗散, $\tilde{\alpha} = \tilde{S}_{ij} e_i^\nu e_j^\nu$ 是沿着亚网格涡轴方向的轴应变.

由结构方程匹配关系^[14-16], 可获得由分辨尺度下流场计算得到的每个网格的 $K_0 \epsilon^{2/3}$:

$$K_0 \epsilon^{2/3} = \frac{\mathcal{T}_2(\Delta)}{\Delta^{2/3} A}, \quad (23)$$

其中, 在半径为 Δ 的球面上平均时的二阶速度结构方程 $\mathcal{T}_2(\Delta)$ 表达式为

$$\mathcal{T}_2(\Delta) = \frac{4}{\Delta} \int_0^\pi E(s/\Delta) \left(1 - \frac{\sin s}{s} \right) ds, \quad (24)$$

$$A = 4 \int_0^{\pi} s^{-5/3} (1 - \sin s/s) ds \approx 1.90695. \quad (25)$$

实际应用中, Δ 和 Δ_c 取网格尺寸, $\mathcal{J}_2(\Delta)$ 由分辨尺度下 6 点模板计算得到

$$\mathcal{J}_2(\Delta) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 ((\Delta \tilde{u}_1^+)^2 + (\Delta \tilde{u}_2^+)^2 + (\Delta \tilde{u}_3^+)^2 + (\Delta \tilde{u}_1^-)^2 + (\Delta \tilde{u}_2^-)^2 + (\Delta \tilde{u}_3^-)^2), \quad (26)$$

其中, $\Delta \tilde{u}_i^{\pm} = \tilde{u}_i(\mathbf{x}_0 \pm \mathbf{e}_j \Delta) - \tilde{u}_i(\mathbf{x}_0)$ 表示点 \mathbf{x}_0 处的第 i 个速度分量在 \mathbf{e}_j 方向的差。

2 数值方法

激波和湍流相互作用模拟的困难在于:满足湍流模拟的高分辨率数值格式(低耗散)在捕捉激波时往往产生非物理震荡,它将污染湍流场,或使湍流计算不稳定;激波的厚度尺度同分子的平均自由程同等量级,这意味着数值计算必须用激波捕捉类的格式,而这类数值格式的数值耗散很大,难以获得准确的湍流数值模拟结果^[17]。为了解决这个难题,我们采用混合格式来处理激波和湍流对数值耗散的不同要求。在激波及其周围采用激波捕捉格式,其他区域光滑过渡到低耗散的中心差分格式。

经验证明:LES 是否成功不仅取决于采用何种亚网格模型,还依赖于对流项在可分辨尺度的数值逼近格式。WENO 格式擅长捕捉运动的非连续界面(如激波和流固接触面),但是它引入了很多数值耗散和相误差,这是 WENO 所采用的“最优”模板和迎风格式天然属性。针对这个问题,Weirs 和 Candler^[18] 提出低耗散误差的对称 WENO 最优模板, Lin 和 Hu^[19] 又扩展了该方法。事实上,由于 WENO 格式没有一个固定的模板,它的色散是不可预知的,而且 WENO 很少获得其最佳模板,候选模板的迎风偏差往往导致高波数的耗散,这使得其不适合 LES^[20]。采用混合格式是一个好的解决方法,计算通量时, Adams 和 Shariff^[21] 在非连续区域采用 ENO 格式,其他区域采用标准 Padé 格式, Pirozzoli^[22] 分别采用 WENO 和迎风的 Padé 格式混合, Hill 和 Pullin^[23] 分别采用 WENO 和 TCD 格式混合。这里我们采用 Hill 和 Pullin 提出的混合格式,在非连续区域我们采用修改的 WENO 格式,在连续区域采用数值耗散低的 TCD 格式计算非粘性项,粘性通量使用显式、中心、二阶 3 点格式计算。下面分别介绍 WENO 和 TCD 格式计算通量的方法。

2.1 无粘项

以一维为例,考虑 $f(x)$ 在均匀网格下的第 i 个网格节点的导数:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \mathcal{D}_x f = \frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (27)$$

其中, $F_{i-1/2}, F_{i+1/2}$ 分别表示该网格的左右边界通量, \mathcal{D}_x 表示算子。下面分别介绍 TCD 格式和 WENO 格式求网格边界处通量的方法。

2.1.1 TCD 格式

TCD 格式是由中心格式演化来的,其思想是通过降低中心格式的精度,得到自由系数,优化此自由系数得到最优的分辨率(Ghosal 截断误差最小,能分辨到更高波数的波),从而获得更精确的波耗散关系。事实上,波传播主导的问题,在每个瞬态,获得更精确的耗散关系比更精确的逼近波本身更重要。

以 7 点模板为例,考虑函数 $f(x)$ 在 x 处的偏导数,中心差分记为

$$\mathcal{D}_x f(x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^3 d_i f(x + i\Delta x) - f(x - i\Delta x), \quad (28)$$

在 x 处对等式左端项做 Taylor 展开, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x f(x) &= (2d_1 + 4d_2 + 6d_3) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \left(\frac{1}{3} d_1 + \frac{8}{3} d_2 + 9d_3 \right) \Delta x^2 \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 + \\ &\quad \left(\frac{1}{60} d_1 + \frac{8}{15} d_2 + \frac{81}{20} d_3 \right) \Delta x^4 \left(\frac{d^5 f}{dx^5} \right)_0 + O(\Delta x^6), \end{aligned} \quad (29)$$

式中 d_1, d_2, d_3 取不同的值可以分别得到二阶、四阶、六阶格式, 如当 $d_1 = 9/10, d_2 = -9/50, d_3 = 1/50$ 就是标准的六阶格式. 现在释放 d_3 的自由度, 记为 $\alpha = d_3$, 作为自由变量, 只要求满足 $2d_1 + 4d_2 + 6d_3 = 0, d_1/3 + 8d_2/3 + 9d_3 = 0$, 即 $d_1 = 2/3 + 5\alpha, d_2 = -1/(12 - 4\alpha)$, 此时格式具有四阶精度. 以获得最小的可分辨尺度的总截断误差为目标函数, 对 α 进行优化. Hill 和 Pullin^[23] 给出优化后的 5 点模板的 $\alpha = -0.197$, 7 点模板的 $\alpha = 0.0605$. 上面推导是以网格中心点为例, 为了与 WENO 格式配合, 需要将 TCD 格式表示为求边界处 ($i + 1/2$) 的通量形式. 以 5 点格式二阶精度为例:

$$\mathcal{D}_x f = \frac{1}{\Delta x} (\alpha(f_{i+2} - f_{i-2}) + \beta(f_{i+1} - f_{i-1})), \quad (30)$$

其中 $\beta = 1/2 - 2\alpha$. 由此可以得到式(27)中 $F_{i+1/2}$ 表达式如下:

$$F_{i+1/2} = \alpha(f_{i+2} + f_{i-1}) + (\alpha + \beta)(f_{i+1} + f_i). \quad (31)$$

应用中心离散格式计算无粘项, 高 Reynolds(雷诺)数流动下的数值稳定性不能忽视. Zang^[24] 提出, 不可压流动计算的渐进稳定性可通过使用 skew-symmetric 格式. Blaisdell^[25] 又在此基础上对可压流(远离激波区域)进行了修改. 假设有方程 f, g , 则 skew-symmetric 格式表示为

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (\mathcal{D}_x(fg) + f\mathcal{D}_x g + g\mathcal{D}_x f). \quad (32)$$

实际计算过程中, 为减少计算量, 时间步上可以交替使用 $\mathcal{D}_x(fg)$ 和 $f\mathcal{D}_x g + g\mathcal{D}_x f$ 来计算 $\partial(fg)/\partial x$, 也可以达到使程序更稳定的效果. $\mathcal{D}_x(fg)$ 根据式(31)计算. 下面给出 $f\mathcal{D}_x g + g\mathcal{D}_x f$. 定义通量 $F_{i+1/2}^{\text{skew}}$, 它需要满足下式:

$$f\mathcal{D}_x g + g\mathcal{D}_x f = \frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{\text{skew}} - F_{i-1/2}^{\text{skew}}). \quad (33)$$

以 5 点格式二阶精度模板为例, 可以得到

$$F_{i+1/2}^{\text{skew}} = \alpha(f_{i+2}g_i + f_{i-1}g_{i+1} + f_i g_{i+2} + f_{i+1}g_{i-1}) + \beta(f_i g_{i+1} + f_{i+1}g_i). \quad (34)$$

下面给出具体到每个方程的 skew-symmetric 格式. 动量方程:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_k)}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \bar{\rho}\tilde{u}_k \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_k)}{\partial x_k}, \quad (35)$$

Honein 和 Moin^[26] 给出了能量方程反对称格式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial((\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u}_k)}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{u}_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \bar{\rho}\tilde{u}_k \frac{\partial\tilde{e}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \tilde{e} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_k}{\partial x_k} + \\ &\quad \frac{1}{2} \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_k \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_k} + \bar{p} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k} + \tilde{u}_k \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $\tilde{e} = \tilde{E} - \tilde{u}_k^2/2$ 是内能.

2.1.2 WENO 格式

首先将流通矢量投影到特征空间, 然后分裂处理, 将原先的无粘项分解为正通量和负通量, 然后再分别针对正、负通量采用相应的差分离散(通常采用迎风格式). 与不进行矢量分裂,

直接离散对流项(通常采用中心格式或谱方法等)相比,矢量分裂后采用迎风格式具有更好的稳定性,同时能有效抑制混淆误差.另外对于含激波或间断的流动,流通矢量分裂后配合激波捕捉格式求解,可以有效抑制数值解的非物理震荡,取得很好的计算效果.

矢量分裂后,再进行通量重构,下面讨论 $f_{j+1/2}^+$ 的计算. $f_{j+1/2}^+$ 关于 $x_{j+1/2}$ 对称,为表述方便略去上标.WENO 格式是基于 ENO 格式构造出来的,其基本思想是通过线性组合低阶通量得到高阶通量,系数叫做线性权重.根据 r 阶精度的 ENO 格式的选取模板思想,考虑迎风效应,可能的模板有 r 个:

$$S_k^r = \{x_{j+k-r+1}, x_{j+k-r+2}, \dots, x_{j+k}\} \quad (k = 0, 1, \dots, r-1).$$

r 阶 ENO 格式是从上述模板中选取一个最光滑的模板 S_k^r ,在其上构造插值多项式 $q_k^r(x)$ 来逼近 f 在 $x = x_{j+1/2}$ 附近处的数值通量,其数学表达式为

$$f_{j+1/2} = q_k^r(f_{j+k-r+1}, f_{j+k-r+2}, \dots, f_{j+k}) = q_k^r|_{x_{j+1/2}} = P_k^r|_{x_{j+1/2}} + \sum_{l=1}^{[r/2]} a_{2l} \Delta x^{2l} \left(\frac{\partial^{2l} P_k^r(x)}{\partial x^{2l}} \right)_{j+1/2}, \quad (37)$$

其中, $[r/2]$ 表示 $r/2$ 取整操作, $P_k^r(x)$ 是一个插值多项式,它满足下面的关系式:

$$P_k^r(x) = f(x) + O(\Delta x^{r+1}), \quad \forall x \in \{x, \|x - x_{j+1/2}\| < \Delta x\}, \quad (38)$$

a_{2l} 为已知常数, $a_2 = -1/24$, $a_4 = 1/5760$. ENO 的思想就是在若干个模板里选出一个最光滑的,并由它求出数值通量.在包含间断的模板里,我们非常希望采用这种方法,因为它能排除包含间断模板中的不是很精确,甚至完全不精确的信息.然而在光滑的模板里面,这种做法却不是我们所希望的,因为此时所有可能的插值模板都提供着同样精确的信息,从而浪费了其他 $r-1$ 个模板.事实上对于 r 阶 ENO 格式而言,有 r 个被选模板,如果将它们合并在一起将形成一个包含 $2r-1$ 个格点的插值区域,其正好是 $2r-1$ 阶上游中心格式的插值模板.通过组合 $r-1$ 阶数值通量可以求得 $2r-1$ 阶数值通量:

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_k^r q_k^r(f_{j+k-r+1}, f_{j+k-r+2}, \dots, f_{j+k}) = q^{2r-1}(f_{j-r+1}, f_{j-r+2}, \dots, f_{j+r-1}), \quad (39)$$

通过代数运算可以确定这些系数,并且它们满足 $\sum_{k=0}^{r-1} C_k^r = 1$, $C_k^r > 0$. 如果用上游中心格式计算数值通量,则不能排除包含间断的模板所带来的不精确信息,在间断附近会产生非物理的振荡.WENO 格式解决了这个问题,其数值通量表达式为

$$f_{j+1/2} = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k^r(f_{j+k-r+1}, f_{j+k-r+2}, \dots, f_{j+k}), \quad (40)$$

其中 ω_k 是模板的权重,它的选择与模板的光滑性相关.Jiang 和 Shu^[27] 选择如下系数:

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1}}, \quad \alpha_k = \frac{C_k^r}{(\varepsilon + S_k)^P} \quad (k = 0, 1, \dots, r-1), \quad (41)$$

其中 ε 是一个小量,一般取 10^{-6} ,用来避免分母为 0; P 是大于等于 2 的正整数,用来放大模板的不光滑性,使得包含间断的模板的权重 ω_k 更小, S_k 是第 k 个模板的光滑性度量.Jiang 和 Shu^[27] 采用如下方法度量模板的光滑性:

$$S_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l(q_k^r(x))}{dx^l} \right)^2 dx. \quad (42)$$

标准的 WENO 格式中, C_k 在选取时会使得通量计算精度最高.对于混合格式, C_k 选取标准变成 WENO 格式计算的通量应该和 TCD 格式相同.Hill 和 Pullin^[23] 给出了 7 点模板、四阶精度

的 TCD 格式对应的 C_k 取值: $C_0 = C_3 = 0.1815, C_1 = C_2 = 0.31845$.

2.1.3 切换规则

采用设置密度和压强曲率阈值来判断是否有激波存在,进而决定用 TCD 格式还是 WENO 格式计算网格边界处的通量.定义区域 \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \mathbf{x} \in R^3 : |\alpha_p| > c\Delta x^2, |\alpha_\rho| > c\Delta x^2, \alpha_p \alpha_\rho > 0, \quad (43)$$

其中

$$\alpha_p = \frac{\bar{p}_{i+1} - 2\bar{p}_i + \bar{p}_{i-1}}{\bar{p}_{i+1} + 2\bar{p}_i + \bar{p}_{i-1}}, \quad (44)$$

$$\alpha_\rho = \frac{\bar{\rho}_{i+1} - 2\bar{\rho}_i + \bar{\rho}_{i-1}}{\bar{\rho}_{i+1} + 2\bar{\rho}_i + \bar{\rho}_{i-1}}. \quad (45)$$

所有 \mathcal{L} 区域及其周围 $n\Delta x$ 半径范围内的点都用 WENO 格式计算,其他区域用 TCD 格式. n 和 c 的取值看算例参数而定:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} F_{i+1/2}^{\text{WENO}}, & \text{in } \mathcal{L}, \\ F_{i+1/2}^{\text{TCD}}, & \text{in } \bar{\mathcal{L}}, \end{cases}$$

其中 $\bar{\mathcal{L}}$ 表示除了 \mathcal{L} 之外的区域.

2.2 浸没边界

通过网格划分软件(如 GMSH),将流场内任意形状物体的表面划分成三角形网格.流体求解器得到网格坐标后通过 CPT(closest-point-transform)算法^[28]计算得到流场网格中心点到物面的距离函数(level set 函数), $\varphi \cdot \varphi = 0$ 代表边界处, $\varphi > 0$ 为流场网格, $\varphi < 0$ 为物体内部网格.物面法向为 $\mathbf{n} = \nabla\varphi / |\nabla\varphi|$.

定义物面速度为 \mathbf{w} ,边界条件通过 ghost-fluid 法来施加.首先通过插值获得 ghost-cell 关于壁面的镜像点的主变量值,镜像点坐标为 $\mathbf{x}_{\text{mirror}} = \mathbf{x}_{\text{ghost}} + 2\varphi\mathbf{n}$.ghost-cell 的法向速度为 $(2\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_{\text{mirror}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$,切向速度保持不变,最终得到

$$\mathbf{u}_{\text{ghost}} = (2\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_{\text{mirror}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{u}_{\text{mirror}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = 2((\mathbf{w} - \mathbf{u}_{\text{mirror}}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{u}_{\text{mirror}} \cdot \quad (46)$$

表 1 三阶 SSP Runge-Kutta 格式系数

Table 1 Coefficients of the 3rd-order SSP Runge-Kutta scheme

ν	α_ν	β_ν	γ_ν
1	1	0	1
2	3/4	1/4	1/4
3	1/3	2/3	2/3

2.3 时间推进

采用 TVD 型的 3 步三阶强稳定性 Runge-Kutta(SSP RK)法^[29].设 $\partial\mathbf{Q}/\partial t = \mathbf{F}$, 则

$$\tilde{\mathbf{Q}}^\nu = \alpha_\nu \mathbf{Q}^n + \beta_\nu \tilde{\mathbf{Q}}^{\nu-1} + \gamma_\nu \frac{\Delta t}{\Delta x_k} \Delta \mathbf{F}^k(\tilde{\mathbf{Q}}^{\nu-1}), \quad (47)$$

其中 $\nu = 1, 2, 3; \alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ 为系数,取值列于表 1.当 $\nu = 1$ 时, $\tilde{\mathbf{Q}}^0 = \mathbf{Q}^n$. Δt 通过设置最大的 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 数 C_{max} 决定:

$$\Delta t = \frac{C_{\text{max}}}{u_x/\Delta x + u_y/\Delta y + u_z/\Delta z}, \quad (48)$$

其中 u_x, u_y, u_z 和 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别是 x, y, z 方向的速度和网格长度. 最终的时间推进格式为

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n - \sum_{\nu=1}^3 \varphi_{\nu} \frac{\Delta t}{\Delta x_{\nu}} \Delta \mathbf{F}^k(\tilde{\mathbf{Q}}^{\nu-1}). \quad (49)$$

3 算例

在这一节我们验证前面所描述的方法: 先验证 6 自由度模型求解器, 再验证流体求解器, 最后验证流固耦合求解器. 下面简述一下每一节所做的算例及其目标.

3.1 小节对 6 自由度模型进行验证. 因为刚体的平动跟转动不耦合, 因此可以单独验证. 首先通过计算球体的自由落体运动, 并比较数值解与理论解, 对平动积分格式(2)进行了验证. 然后计算圆柱的自由转动, 并比较相关参数的数值解和理论解, 来验证转动模型算法(3). 最后还验证了小扰动对刚体转动稳定性的影响.

3.2 小节对流体求解器进行验证, 共计算了两个算例. 第一个算例计算超声速流流过一个尖劈, 对比实验结果, 表明流体求解器能正确计算出流场结构. 第二个算例计算了流动经过一个斜坡: 计算采用两种方法, 一种使用 ghost-fluid 方法, 一种没有使用, 用来判断 ghost-fluid 的有效性.

3.3 小节对流固耦合求解器进行验证. 首先计算圆柱在激波驱动下上升的经典算例, 做定性比较. 然后计算两个一开始相邻的球体, 在气动力的作用下分离的过程. 通过与实验做定性和定量的比较, 可以验证松耦合算法适合本文所研究的内容.

3.1 6 自由度模型验证

3.1.1 球掉落

刚体的平动由式(2)计算可得, 当合外力 \mathbf{F}^i 为已知常数时, 很容易得到精确解. 通过比较数值解与精确解, 可以验证式(2).

考虑一个质点, 所有变量均是无量纲的, 其初始速度为 $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$, 所受重力为 $m\mathbf{g} = (0, 0, -2)$. 通过积分可知, 位移关于时间的精确解为 $y = t - t^2$. 图 1 给出了精确解与不同时间步长的数值解的对比. 可以看到, 因为 \mathbf{F}^i 是常数, 不同的 Δt 下数值解与精确解都符合得很好.

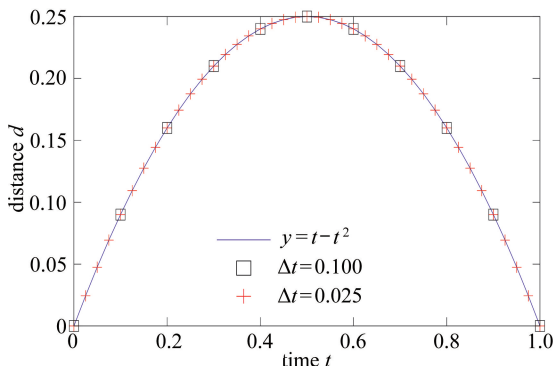


图 1 单位质量物体在重力作用下运动的位移随时间变化图

Fig. 1 Distance as a function of time for a unit point mass in a gravitational field

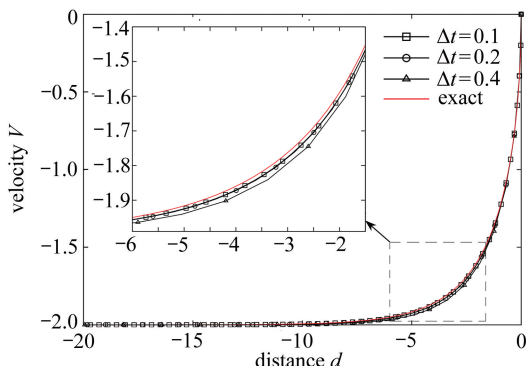


图 2 球在重力和空气阻力下自由下落的速度关于其位移的函数曲线图

Fig. 2 Velocity vs. distance curves of a sphere falling in a gravitational field subjected to air resistance

当外力不是常数, 数值求解时, 在 Δt 时间段内保持 \mathbf{F}^i 不变实际上具有一阶精度. 为了验证这点, 考虑一个球体仅受重力和空气阻力作用的自由下落运动, 所有变量均是无量纲的. 假定

阻力系数为定值, $C_D = 0.5$, 则球体所受合外力为

$$\mathbf{F}^i = m\mathbf{g} - (0, 0, 0.5)C_D\rho u_z^2 S, \quad (50)$$

其中 ρ 为空气密度, S 为球体过圆心的横截面积. 当重力和空气阻力达到平衡时, 球的速度达到最大值:

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2mg_z}{C_D\rho S}}. \quad (51)$$

取 $\rho = 1$, $S = 1$, $m\mathbf{g} = (0, 0, -1)$, 可得到球 $-z$ 方向的速度和位移满足

$$u_z(z) = \sqrt{4(1 - e^{0.5z})}. \quad (52)$$

图 2 是球的速度关于位移的函数曲线图. 红色曲线为式 (52) 的精确解, 其他为用不同的时间步求得数值解. 正如所料, 越小的时间步长下的数值解, 其误差越小. 由于后期合外力趋于恒定, 最终它们都收敛到同样大小的极值速度.

3.1.2 转动的圆柱

某些特殊情况下, 式 (3) 可以找到理论解, Smart^[30] 给出了圆柱斜着自由旋转的理论解. 考虑一个无量纲圆柱体有如下性质:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1^b & 0 & 0 \\ 0 & I_2^b & 0 \\ 0 & 0 & I_3^b \end{bmatrix}, \quad (53)$$

其中, $I_1^b = I_2^b$, 且 $I_1^b - I_3^b = \alpha I_1^b$. 假设圆柱不受外力矩作用, 式 (3) 存在理论解:

$$\begin{cases} \omega_1^b = a \cos(\lambda t), \\ \omega_2^b = b \sin(\lambda t), \\ \omega_3^b = c. \end{cases} \quad (54)$$

假定 $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.25$, $a = 1$, $b = -1$, 圆柱的转动惯量为 $I_1^b = I_2^b = 1.0$, $I_3^b = 0.5$, 则此时旋转向量为 $\boldsymbol{\omega} = (1.0, 0.0, 0.5)$. 图 3 比较了这种情况下, 圆柱在随体坐标系下的 3 个转动分量的数值解和理论解. 可以看到, 随着时间步长减小, 数值解迅速收敛到精确解.

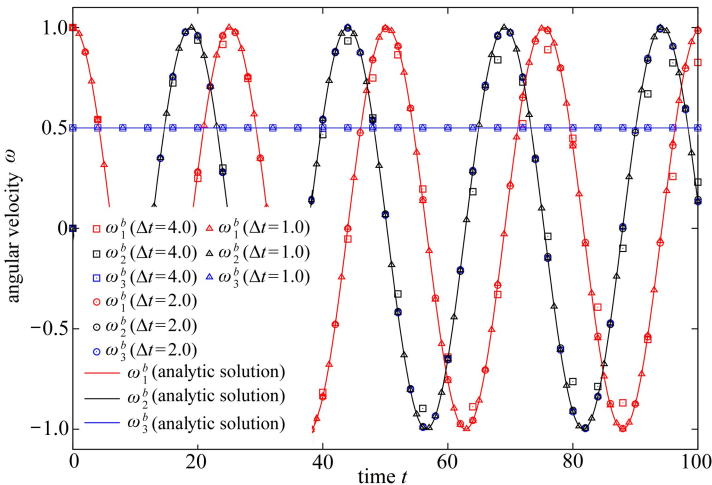


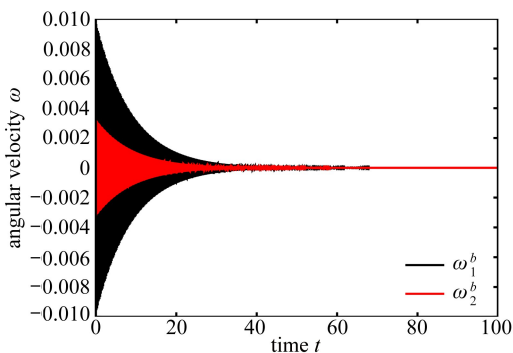
图 3 角速度分量的数值解与理论解相比较

Fig. 3 Numerical integration for angular velocities compared with analytic solution by Euler's laws of motion

3.1.3 稳定性分析

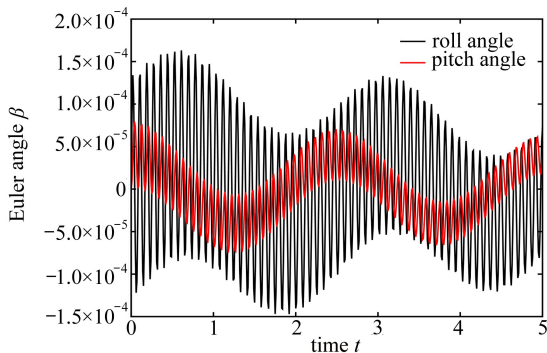
只有当旋转轴与任意惯性主轴平行时,式(3)不耦合.稳定性分析表明只有当旋转轴与第一或第三惯性主轴平行时,旋转运动才稳定,绕第二惯性主轴的旋转是不稳定的.式(3)耦合意味着任何小的扰动作用到第二惯性主轴上都将激发其他方向角速度的改变^[31].下面我们进行的验证中所有矢量均是无量纲的.

考虑转动惯量为 $I_1^b = 1, I_2^b = 10, I_3^b = 100$, 并令初始旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 4)$, 这样物体绕第一惯性主轴旋转.然后只在第一个时间步长 $\Delta t = 0.01$ 内给一个很小的力矩, $\mathbf{M}^b = (0.005, 0, 0)$ 作用在第三惯性主轴上.图 4(a) 显示的是系统在第一和第二惯性主轴方向的角速度随时间的变化.正如理论所预言,初始的扰动激发了这两个方向的角速度,但是很快就衰减了,系统又恢复了稳定.图 4(b) 显示了系统的 Euler 角.可以看到一开始的扰动导致系统在第一和第二惯性主轴上有一个稳定的,但是又非常小的震荡.图 4(c) 显示的是图 4(b) 在长时间段的状态.因为系统没有阻尼,所有震荡并没有随时间延长而衰退.



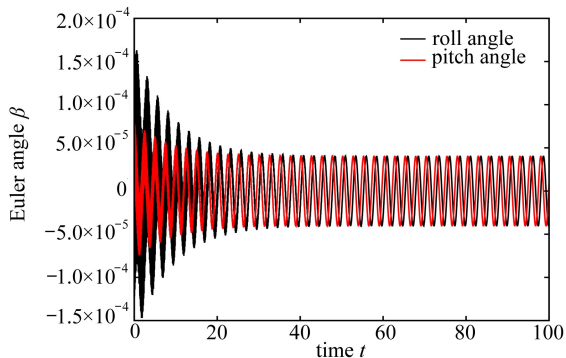
(a) 系统的第一和第二惯性主轴方向角速度分量随时间的变化

(a) Time evolution of angular velocities around the 1st and 2nd principal axes of inertia for the system



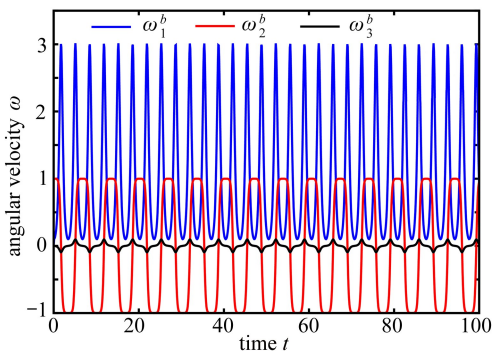
(b) 系统的 Euler 角随时间的变化

(b) Time evolution of Euler angles



(c) 长时间下系统的 Euler 角随时间的变化

(c) Time evolution of Euler angles in a longer time



(d) 角速度随时间的变化

(d) Time evolution of angular velocities

图 4 稳定性分析

Fig. 4 Stability analysis

保持转动惯量和扰动不变,改变初始旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 0)$.图 4(d) 显示的是该系统的角速度随时间的变化图.与图 4(a)~4(c) 显示的不同,角速度的各个分量都被扰动激发,改变剧烈,且不随时间增加衰减(同样因为系统无阻尼).因此系统这种状态不稳定,符合理论预测.

综上所述,1.1.2 小节描述的方法能正确计算出刚体的 6 自由度运动。

3.2 流体求解器验证

我们首先计算超声速流流过一个尖劈,通过与实验比较,验证求解器能否得到准确的流场结构。其次由于 ghost-fluid 方法会造成内置边界耗散,因此还需要评估其影响。通过计算超声速流流过一个斜坡,比较使用 ghost-fluid 方法与不使用此法的区别。

3.2.1 流体流过尖劈

首先计算一个平面激波流过一个固定的尖劈,相关实验细节及参数可参考文献[32-33]。计算中所用参数与实验一致,计算域为 $[0.02, 0.19] \text{ m} \times [0, 0.023] \text{ m} \times [0.0025, 0.08] \text{ m}$,基础网格为 $136 \times 20 \times 62$,4层自适应网格,加密因子为 $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 2$,加密阈值为 $\epsilon_\rho = 0.5$,WENO格式选择四阶。尖劈为一个等腰直角三角形拉伸成的三棱柱,斜边长度为5.6 cm,放置在 x - y 平面底部,从 $x = 0.056 \text{ m}$ 到 $x = 0.084 \text{ m}$ 处, y 方向为展向,计算时间为 $2 \times 10^{-4} \text{ s}$,CFL数取0.85。

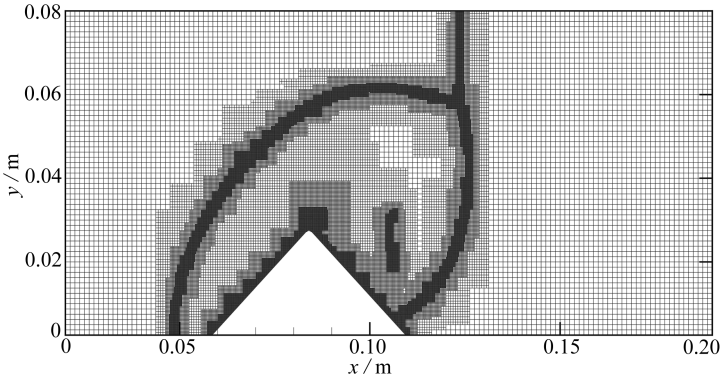


图5 模拟激波与楔形体相互作用的一个时刻的网格界面图

Fig. 5 A snapshot of the grid slice used for the simulation of a shock-wedge interaction problem

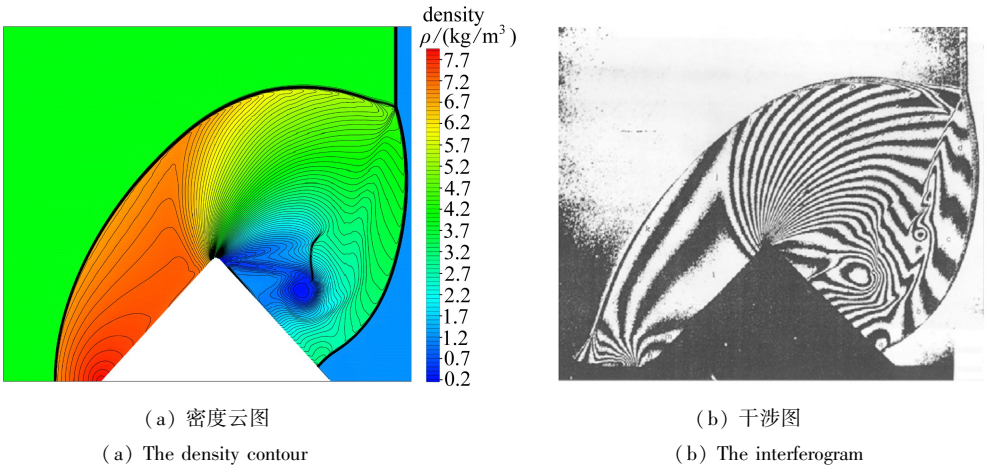


图6 计算的密度云图对比实验在 $87 \mu\text{s}$ 时得到的干涉图

Fig. 6 Comparison between the computed density contour and the experimental interferogram at $87 \mu\text{s}$ for a shock-wedge interaction problem

计算介质选择空气,性质如下:特征气体常数 $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,比热比 $\gamma = 1.4$,粘性系数 $\mu = 1.73 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$,导热系数 $\kappa = 0.0257 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。来流密度 $\rho_{\text{in}} = 3.96158428 \text{ kg}/\text{m}^3$,速度 $\mathbf{u}_{\text{in}} = (585.676970961, 0, 0) \text{ m}/\text{s}$ (对应激波传播速度 $V_s = V_{\text{in}} \rho_2 / (\rho_2 - \rho_1) = 844.7 \text{ m}/\text{s}$),压

强 $p_{in} = 705\ 036.8\ \text{Pa}$. 流场的初始密度 $\rho_a = 1.214\ 8\ \text{kg/m}^3$, 速度 $\mathbf{u}_a = (0, 0, 0)\ \text{m/s}$, 压强 $p_a = 104\ 000\ \text{Pa}$. 计算域为一长方体, 按照实验所处风洞情况设置边界条件. 左面为入口边界, 右面为出口边界, 其他面和内置尖劈表面都为反射边界.

图 5 显示的是在 $t = 87\ \mu\text{s}$ 时刻的网格 x - y 截面. 可以看到内置边界周围区域和激波区域都被加密到最密层数, 网格分辨率达到 $0.000\ 312\ 5\ \text{m}$. 图 6 是同一截面、同一时刻的密度图. 其中图 6(a) 显示计算所得的密度云图, 选取显示了 100 根等值线. 图 6(b) 是实验得到的干涉图. 计算结果与实验结果符合得非常好, 激波位置、漩涡结构和褶皱都被正确地捕捉到了.

3.2.2 流体流过斜坡

平面激波在斜坡上反射是一个经典算例. 为了检验 ghost-fluid 方法的有效性, 本小节通过两种方法计算这一问题.

图 7 给出了两种计算方法的二维示意图 (实际计算为三维). 如图 7(a) 所示, 计算域为一长方体. 将底面设为反射边界, 同时给一个与底面夹角为 $\pi/3$ 的激波, 这种算法不需要使用 ghost-fluid 方法. 如图 7(b) 所示, 计算域为一切掉一块梯形区域的长方体. 将斜面设为反射边界, 同时给定一个与底面垂直的激波, 这种算法斜面边界条件需要用 ghost-fluid 方法施加. 下面详细介绍计算设置的参数.

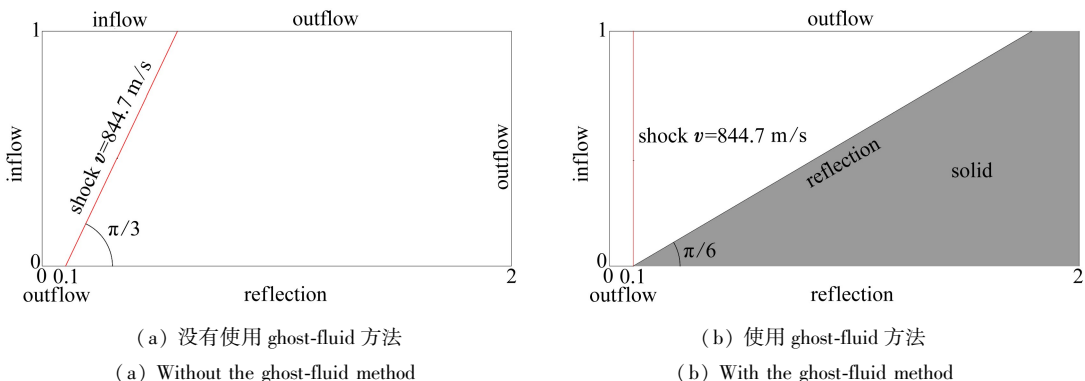


图 7 两种方法计算超声速流经过斜坡

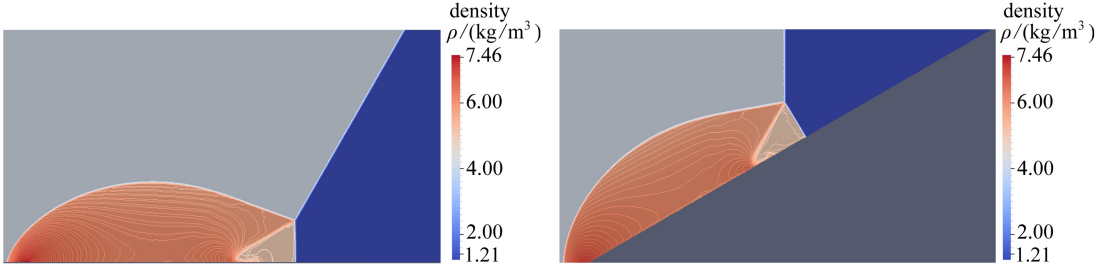
Fig. 7 Two methods to simulate a supersonic flow over a slope

先介绍图 7(a) 所示算例. 计算域为 $[0, 2]\ \text{m} \times [0, 1]\ \text{m} \times [-0.05, 0.05]\ \text{m}$, 基础网格为 $200 \times 100 \times 10$, 4 层自适应网格, 加密因子为 $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 2$, 加密阈值为 $\epsilon_p = 0.5$. 选择四阶 WENO 格式. 计算时间为 $1 \times 10^{-3}\ \text{s}$, CFL 数取 0.85. 计算介质为空气, 性质同前. 图 7(a) 中红色直线表示初始时刻激波位置. 激波左侧流场初始时刻参数同入口参数一致: 密度 $\rho_{in} = 3.961\ 584\ 28\ \text{kg/m}^3$, 速度 $\mathbf{u}_{in} = (585.676\ 970\ 961 \times \cos(\pi/6), -585.676\ 970\ 961 \times \sin(\pi/6), 0)\ \text{m/s}$, 压强 $p = 7.050\ 368 \times 10^5\ \text{Pa}$. 激波右侧流场初始时刻参数: 密度 $\rho_{in} = 1.214\ 8\ \text{kg/m}^3$, 速度 $\mathbf{u}_{in} = (0, 0, 0)\ \text{m/s}$, 压强 $p = 1.04 \times 10^5\ \text{Pa}$. 流场左侧面为入流边界, 右侧面为出流边界. 底面 $x \in (0, 0.1)\ \text{m}$ 处是出流边界, $x \in (0.1, 2)\ \text{m}$ 处是反射边界. 上面边界随时间 t 变化, $x \in (0, 0.1 + \tan(\pi/6) + 844.7t)\ \text{m}$ 处为入口边界, 其余部分为出流边界. 前侧面和后侧面均为反射边界.

图 7(b) 所示算例计算所用参数与图 7(a) 所示算例除个别外全部相同, 下面仅列出不同的参数. 入口速度及激波左侧流域初始时刻速度为 $\mathbf{u}_{in} = (585.676\ 970\ 961, 0, 0)\ \text{m/s}$. 计算域上侧面全部和下侧面为出口边界, 斜面通过 ghost-fluid 方法设置为反射边界.

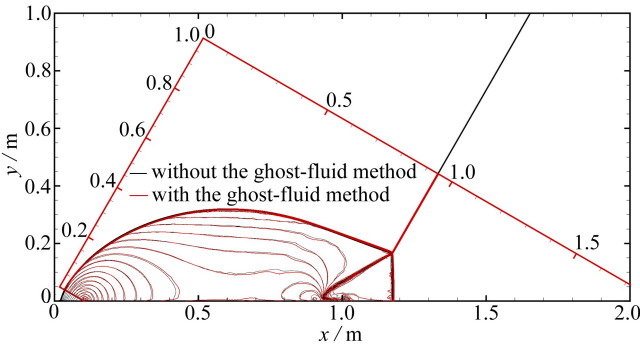
图 8 显示的是两种方法计算得到的密度云图和等值线图. 图 8(c) 比较了两种方法在 $z = 0$

平面上 90 个密度等值线图,结果令人满意,仅在 $x = 1 \text{ m}$ 处,ghost-fluid 方法耗散的稍微大点,这与 ghost-fluid 方法的结论一致。



(a) 没有使用 ghost-fluid 方法
(a) Without the ghost-fluid method

(b) 使用 ghost-fluid 方法
(b) With the ghost-fluid method



(c) 两种方法密度等值线对比

(c) Comparison of isolines of density

图 8 密度云图

Fig. 8 Density contours

3.3 流固求解器验证

本小节选择两个算例验证流固耦合求解器.一个是放置在底面上的圆柱在激波驱动下上升运动,很多人用这个算例做测试^[34-36].另一个是激波驱动两个相邻的球体分离,有详细的实验和计算数据提供对比^[37-38].

3.3.1 圆柱上升

文献中关于这个问题都是二维算例,然而想要做大涡模拟需要计算三维例子,为了与文献结果做对比,我们将圆柱的长度设置为接近第三个维度的长度,同时约束该维度的自由度,其他物理参数与文献一致,下面详细描述.

计算域为 $[0, 1] \text{ m} \times [0, 0.2] \text{ m} \times [-0.06, 0.06] \text{ m}$.基础网格为 $200 \times 40 \times 24$,3 层自适应网格,加密因子为 $Y_1 = Y_2 = 2$,加密阈值设为 $\epsilon_p = 0.6$,选择四阶 WENO 格式.圆柱半径设为 0.05 m ,密度为 10.77 kg/m^3 ,初始时刻质心位置设在 $(0.15, 0.05, 0) \text{ m}$ 处,展向为 z 方向.总计算时间为 0.35 s ,CFL 数取 0.85 .

计算介质同样选择空气,性质同前.流场初值设置如下:从面 $x = 0 \text{ m}$ 处到 $x = 0.08 \text{ m}$ 之间是 Mach 数 $Ma = 3$ 的激波经过后的状态,密度 $\rho_s = 5.4 \text{ kg/m}^3$,速度 $\mathbf{u}_s = (2.222\ 222, 0, 0) \text{ m/s}$,压强 $p_s = 10.333\ 333\ 3 \text{ Pa}$.其余流场状态:密度 $\rho_a = 1.4 \text{ kg/m}^3$,速度 $\mathbf{u}_a = (0, 0, 0) \text{ m/s}$,压强 $p_a = 1 \text{ Pa}$.计算域为一长方体,左面为入口边界,右面为出口边界,其余面均为反射边界.整个计算

未考虑圆柱与边界的碰撞,事实上,在圆柱碰到上边界时计算已经结束。

图 9 显示的是 $z = 0$ 截面处的 53 条压力等值线,图 9(a)~9(c)是本文计算的结果,图 9(d)~9(f)是文献[36]的结果。可以看到,圆柱原先静止放在底面上,当激波打过来时,由于地面的存在,入射激波被非对称地反射了。最终圆柱下方压力远远高于上方,生成一个上升力。由于圆柱的存在,原来的平面激波弯曲成弓形激波,弓形激波打到上表面后又反射下来。反射激波打到圆柱上表面,形成负升力。该反射激波继续往下扫,最后又打到下表面,继续反射,再打到圆柱上,形成一个显著的升力。由于存在耗散,激波强度已经远远不及入射激波,此时形成的升力也远不及第一次产生的升力。最后当圆柱靠近上表面,由于壁面效应的存在,升力又变为负值。对比结果符合预期,仅有小部分细节不一致。事实上不同文献的结果也存在差异,考虑到所用计算模型与文献不同(文献求解无粘的 Euler 方程),计算结果是可接受的。

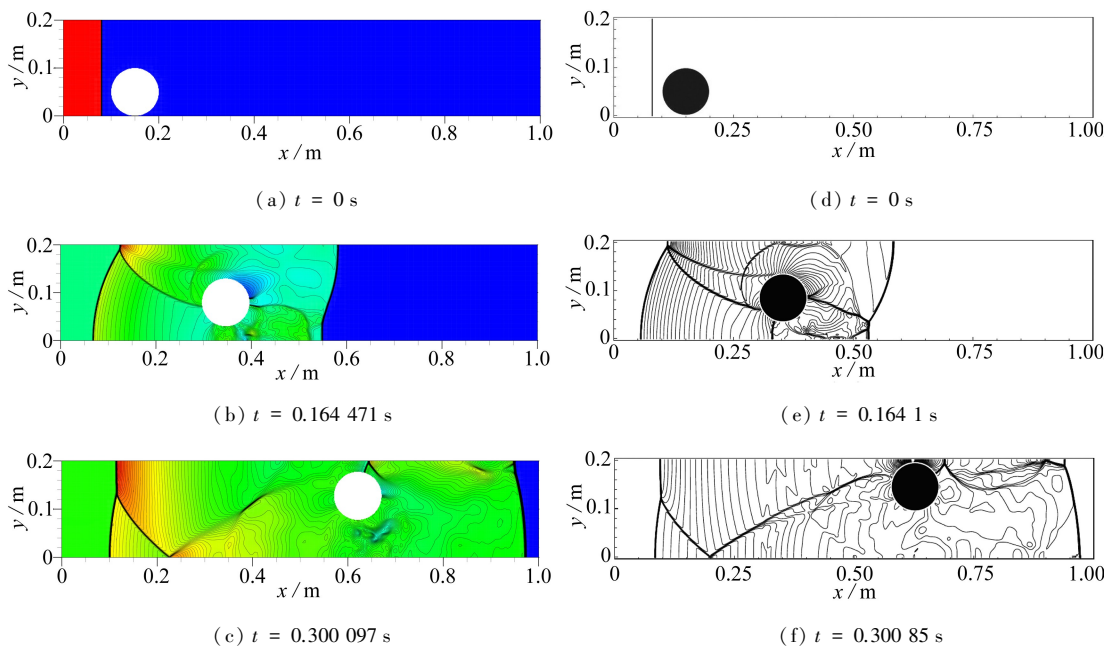


图 9 本文计算结果(图 9(a)~9(c))与文献[36]的结果(图 9(d)~9(f))对比

Fig. 9 Comparison between the present results of the figures 9(a)~9(c) and 9(d)~9(f) from ref. [36]

3.3.2 两个球体分离

在这个算例中,两个相邻的球一开始固定在流场中,激波打过它们,由于受力不同,两个球会发生分离。图 10 是整个分离过程的示意图(第一个球半径为 r_1 ,第二个球半径为 r_2)。文献[37-38]研究了不同半径比,不同前后相对位置情况下两球分离过程发现,给定一个半径比,存在一个特殊的前后相对位置或给定一个前后相对位置,存在一个特殊的半径比,使分离的两个球侧向速度达到最大。此时较小的球会沿着较大球产生的弓形激波运动,这一现象被命名为“shock wave surfing”。其中半径比为 $r_2/r_1 = 0.5$,两球质心在同一水平线上有详细的实验数据,计算这种情况下相关数据并与实验数据做对比。下面详细描述计算中所用参数。

计算域为 $[-0.05, 0.25] \text{ m} \times [-0.095, 0.145] \text{ m} \times [-0.09, 0.09] \text{ m}$,基础网格为 $150 \times 120 \times 90$,两层自适应网格,加密因子为 $Y_1 = 2$,加密阈值设为 $\epsilon_p = 0.04$,选用四阶 WENO 格式。图 11 显示的是 $t = 0.015\ 203\ 2 \text{ s}$ 时刻两个球周围网格的 3 个截面,在基础网格上额外加密了一层网格,加密因子 $Y_1 = 2$ 。图 12 中阴影显示的是密度梯度绝对值的云图,图中阴影是流场中的激波,

通过绘制密度梯度的绝对值图得到,可以看到,流场网格被合理地加密了.总计算时间为 $t_a = 0.024$ s, CFL 数取 0.85.

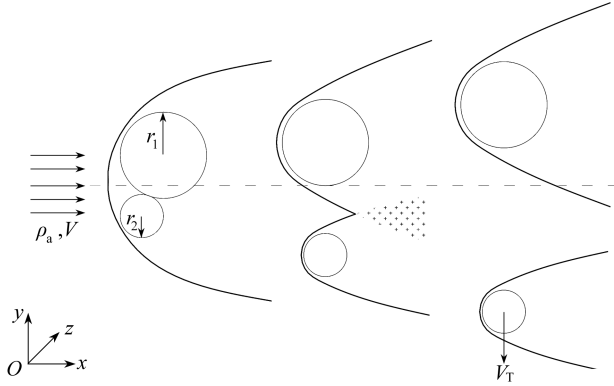


图 10 两个球分离过程示意图

Fig. 10 Schematic diagram of the separation model for 2 spheres

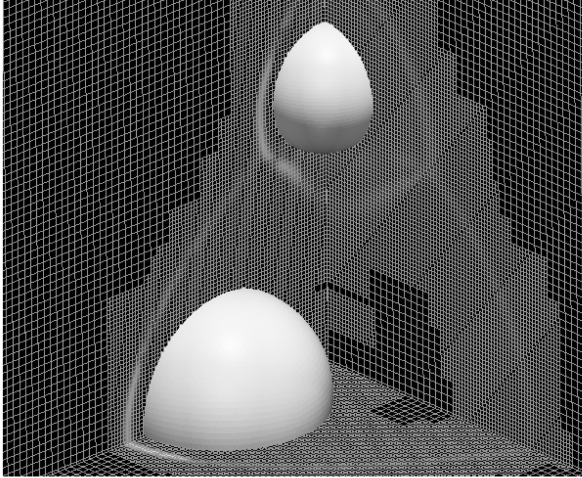


图 11 $t = 0.015\ 203\ 2$ s 时刻流场部分网格分布图

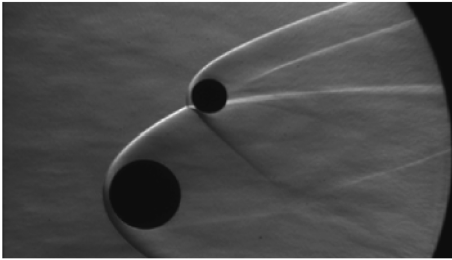
Fig. 11 Cuts through a part of the computational domain at $t = 0.015\ 203\ 2$ s

两个球具有如下性质:半径分别为 $r_1 = 0.025\ 4$ m, $r_2 = 0.015\ 875$ m,球心一开始分别位于 $(0,0,0)$ m 和 $(0, 0.043\ 275, 0)$ m 处,密度为 $\rho_m = 1\ 122$ kg/m³.流体介质为空气,密度 $\rho_a = 0.07$ kg/m³,压强 $p_a = 1\ 400$ Pa,其余性质同前.

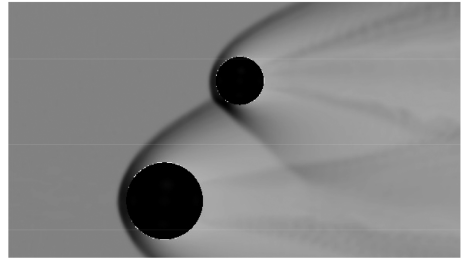
流场初值为一统一的场,密度 $\rho_0 = \rho_a$,速度 $\mathbf{u}_0 = (0,0,0)$ m/s,压强 $p_0 = p_a$.计算域左面为入口边界,密度 $\rho_{in} = \rho_a$,压强 $p_{in} = p_a$,速度 $\mathbf{u}_{in} = (670,0,0)$ m/s.计算域其他边界为出口边界.在 $t \in [0, 1 \times 10^{-5}]$ s 时间内入口速度随时间增加,设为 $(1 - e^{(-5 \times 10^{-5})}) \mathbf{u}_{in}$.当 $t \geq 1 \times 10^{-5}$ s 时入口速度保持为 \mathbf{u}_{in} .整个计算分为两个阶段进行,在 $t \in [0, 0.001\ 4]$ s 时间段内,约束两个球保持不动,得到一个近似稳定的流场,之后的时间内放开两个球的自由度,它们在所受气动力的作用下自由运动.

首先将计算结果与实验结果做一个定性的比较.图 12(a) 是实验所得,所以很难得到某个切面的密度梯度,显示的是密度在 z 方向的积累.图 12(b) 所示为 $z = 0$ 平面的结果.图 12(b) 是采用水平剖面获得的纹影图,能够更好地显示流场中两个球后面分离区域这样较弱的结

构^[38].图 12(a)计算结果得到的伪纹影图,通过显示 $z = 0$ 平面的密度梯度的模的云图得到.可以看到两幅图中大的结构基本一致,仅有部分小结构存在差异.这是因为图 12(b)得到的图是整个 z 方向叠加的结果(实验中不能够只拍摄某个平面),而图 12(a)仅显示 $z = 0$ 这一个平面的信息,因此定性来说,计算结果与实验结果是吻合的.



(a) 实验得到的压力纹影图
(a) The experimental pressure schlieren



(b) 计算得到的密度梯度的模的云图
(b) The computational pseudo-schlieren image obtained through visualization of the fluid density gradient magnitude

图 12 计算结果与实验结果的对比

Fig. 12 Comparison of pressure schlierens between experiment and numerical simulation

下面我们再定量的比较实验与数值结果.首先定义一些用到的无量纲量:

无量纲时间

$$t' = \sqrt{\rho_a/\rho_m} tV/r_1;$$

无量纲位移

$$x' = (x - x(0))/r_1, y' = (y - y(0))/r_1;$$

无量纲速度

$$v'_x = \sqrt{\rho_m/\rho_a} v_x/V, v'_y = \sqrt{\rho_m/\rho_a} v_y/V;$$

阻力和升力系数

$$C_D = 8\rho_m a_x r/(3\rho_a V^2), C_L = 8\rho_m a_y r/(3\rho_a V^2),$$

其中 $V = 670 \text{ m/s}$ (入口速度), $x(0), y(0)$ 分别是较大球的 x 和 y 方向初始坐标, a_x, a_y, v_x, v_y 是球瞬时的加速度和速度, r 是球的半径,这个算例较小球的半径为 $r_2 = 0.0127 \text{ m}$.

图 13 显示的是全部实验与计算的无量纲量的对比,包括无量纲位移、速度、升阻力系数.在半径比为 $r_2/r_1 = 0.5$ 时,较小的球先沿着大球产生的弓形激波向下游运动,在某一时刻会运动到弓形激波内部,图 13(e)和 13(f)中“ \circ ”表示计算得到的较小球被夹带到弓形激波内部的时间点;“ \bullet ”表示实验得到的较小球被夹带到弓形激波内部的时间点,我们称这个时间点为夹带点.可以看到,尽管总体看结果还是符合得不错,但是计算得到的夹带点比实验要提前一段时间.这归因于计算中物体的释放方式跟实验中存在差异.在计算中,物体一开始被固定在流场中, $t = 0.0014 \text{ s}$ 后被释放,所有的时间点都是精确给定的.而在实验中,两个球用一条非常细且容易扯断的纤维固定,激波打过来后纤维被扯断,两个球运动并分离.实验数据中的零时间点是根据球刚开始运动的时刻确定的.从图 13(c)和 13(d)可以看到, $t' \in [0, 0.29]$ 时间段内,计算中球一直保持不动,而实验中球已经开始运动了.正是由于一开始的差异不同,随着时间的积累被放大,最终导致夹带点不同.一旦较小球被夹带入弓形激波内部,小球的受力就会迅速降低,从而导致图 13(e)和 13(f)中后面的时间段内阻力系数和升力系数,计算与实验

数据表现出很大不同,考虑到各无量纲量计算数据和实验数据相近,且趋势一致,因此认为计算结果可以信赖。

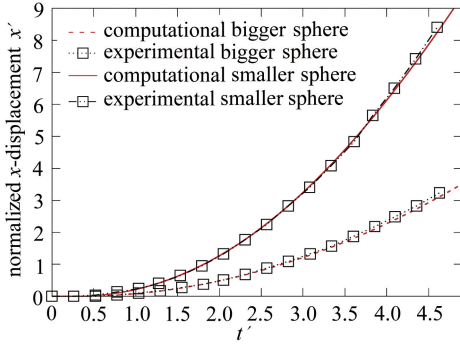
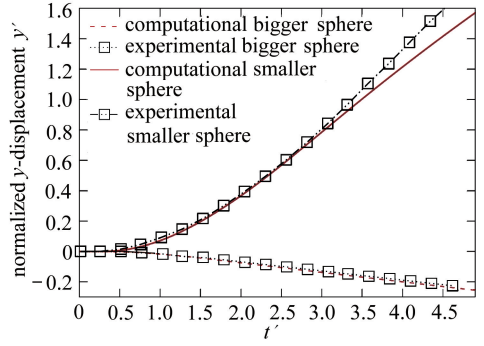
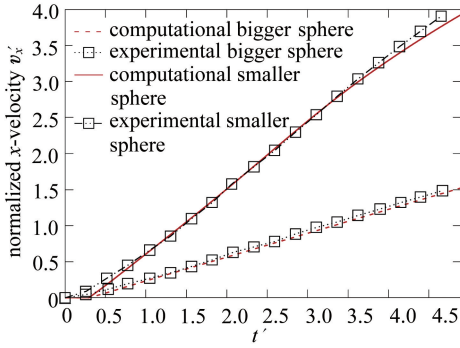
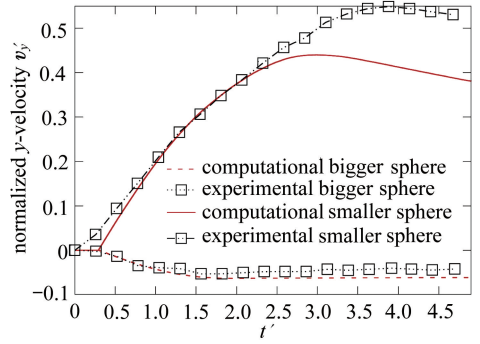
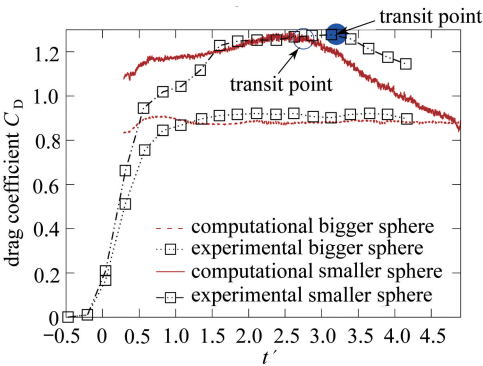
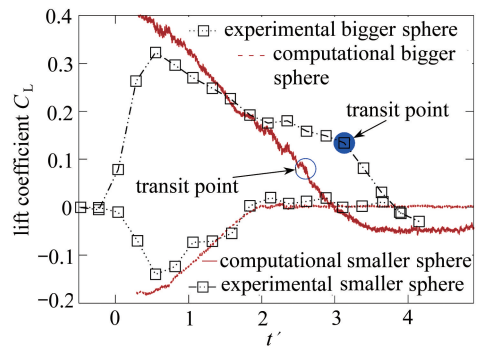
(a) 位移 x' (a) Displacement x' (b) 位移 y' (b) Displacement y' (c) 速度 v'_x (c) Velocity v'_x (d) 速度 v'_y (d) Velocity v'_y (e) 阻力系数 C_D (e) Drag coefficient C_D (f) 升力系数 C_L (f) Lift coefficient C_L

图 13 两个球半径比 $r_2/r_1 = 0.5$ 的实验与计算结果对比

Fig. 13 Comparison between experimental and computational results for $r_2/r_1 = 0.5$

4 结 论

本文讲述了一种模拟超声速流场中有自由运动刚体的方法。激波、湍流、6 自由度运动刚体同时出现在流场中。通过 ghost-fluid 方法,求解器可计算任意形状的刚体,该方法相对于网格变形法,不需要进行网格重构,计算速度更快。刚体位置姿态求解器通过三角形网格存储刚体边界,并传递给流体求解器。该方法相当于提供了一个统一的接口,有很大的可扩展性,例如可将刚体求解器换为三维刚体有限元求解器。

本文仅考虑内置边界为滑移边条的情况,这对超声速流中的钝体是合理的假设,未来可开展考虑边界层的 LES 模拟与自由刚体运动的研究。

参考文献(References):

- [1] Lijewski L E, Suhs N E. Time-accurate computational fluid dynamics approach to transonic store separation trajectory prediction[J]. *Journal of Aircraft*, 1994, **31**(4): 886-891.
- [2] Koomullil R, Cheng G, Soni B, Noack R, Prewitt N. Moving-body simulations using overset framework with rigid body dynamics[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, **78**(5/6): 618-626.
- [3] Noack R W. DiRTlib: a library to add an overset capability to your flow solver[C]//*17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Toronto, Ontario, Canada, 2005: 5116.
- [4] Murman S M, Aftosmis M J, Berger M J. Simulations of 6-DOF motion with a Cartesian method[C]//*41st AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Reno, Nevada, 2003: 1246.
- [5] Murman S M, Chan W M, Aftosmis M J, Meakin R L. An interface for specifying rigid-body motions for CFD applications[C]//*41st AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Reno, Nevada, 2003: 1237.
- [6] 刘君, 白晓征, 郭正. 非结构动网格计算方法——及其在包含运动界面的流场模拟中的应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2009. (LIU Jun, BAI Xiao-zheng, GUO Zheng. *Numerical Simulation Method Using Unstructured Meshes—Including Applications Flows With Moving Interface*[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2009. (in Chinese))
- [7] Martín M P, Taylor E M, Wu M, Weirs V G. A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, **220**(1): 270-289.
- [8] Vreman B, Geurts B, Kuerten H. A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1995, **29**(4): 299-327.
- [9] Vreman B. Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer[D]. PhD Thesis. Enschede: University of Twente, 1995.
- [10] Martín M P, Piomelli U, Candler G V. Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2000, **13**(5): 361-376.
- [11] Misra A, Pullin D I. A vortex-based subgrid stress model for large-eddy simulation[J]. *Physics of Fluids*, 1997, **9**(8): 2443-2454.
- [12] Kosović B, Pullin D I, Samtaney R. Subgrid-scale modeling for large-eddy simulations of compressible turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 2002, **14**(4): 1511-1522.
- [13] Hill D J, Pantano C, Pullin D I. Large-eddy simulation and multiscale modeling of a Richtmyer-Meshkov instability with reshock[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, **557**(6): 29-61.
- [14] Lesieur M, Métais O. New trends in large-eddy simulations of turbulence[J]. *Annual Review*

- of Fluid Mechanics*, 1996, **28**(1): 45-82.
- [15] Voelkl T, Pullin D I, Chan D C. A physical-space version of the stretched-vortex subgrid-stress model for large eddy simulation[J]. *Physics of Fluids*, 2000, **12**(7): 1810-1825.
- [16] Pullin D I. A vortex-based model for the subgrid flux of a passive scalar[J]. *Physics of Fluids*, 2000, **12**(9): 2311-2319.
- [17] 张兆顺, 崔桂香, 许春晓. 湍流大涡数值模拟的理论和应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008. (ZHANG Zhao-shun, CUI Gui-xiang, XU Chun-xiao. *Theories and Applications of Large Eddy Simulation for Turbulence*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese))
- [18] Weirs V G, Candler G V. Optimization of weighted ENO schemes for DNS of compressible turbulence[C]//*13th Computational Fluid Dynamics Conference*. Snowmass Village, Colorado, 1997.
- [19] Lin S Y, Hu J J. Parametric study of weighted essentially nonoscillatory schemes for computational aeroacoustics[J]. *AIAA Journal*, 2001, **39**(3): 371-379.
- [20] Mittal R, Moin P. Suitability of upwind-biased finite difference schemes for large-eddy simulation of turbulent flows[J]. *AIAA Journal*, 1997, **35**(8): 1415-1417.
- [21] Adams N A, Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **127**(1): 27-51.
- [22] Pirozzoli S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **178**(1): 81-117.
- [23] Hill D J, Pullin D I. Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **194**(2): 435-450.
- [24] Zang T A. On the rotation and skew-symmetric forms for incompressible flow simulations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1991, **7**(1): 27-40.
- [25] Blaisdell G A. Numerical simulation of compressible homogeneous turbulence[D]. PhD Thesis. California: Stanford University, 1991.
- [26] Honein A E, Moin P. Higher entropy conservation and numerical stability of compressible turbulence simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **201**(2): 531-545.
- [27] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**(1): 202-228.
- [28] Mauch S. Efficient algorithms for solving static Hamilton-Jacobi equations[D]. PhD Thesis. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2003.
- [29] Gottlieb S, Shu C W, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods[J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(1): 89-112.
- [30] Smart E H. *Advanced Dynamics*[M]. Macmillan, 1951.
- [31] Thomson W T. Introduction to space dynamics[C]//*NASA STI/Recon Technical Report A*. New York: Dover Publications Inc, 1986.
- [32] Glass I I, Kaca J, Zhang D L, Glaz H M, Bell J B, Trangenstein J A, Collins J P. Diffraction of planar shock waves over half-diamond and semicircular cylinders: an experimental and numerical comparison[C]//*Current Topics in Shock Waves 17th International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes*. Bethlehem, Pennsylvania, 1990, **208**: 246-251.
- [33] Zhang D L, Glass I I. An interferometric investigation of the diffraction of planar shock waves over a half-diamond cylinder in air[R]. Toronto: University of Toronto, 1988.
- [34] Forrer H, Berger M. Flow Simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries[C]//*Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*. Basel: Birkhäuser Verlag,

- 1999, **129**: 315-324.
- [35] Falcovitz J, Alfandary G, Hanoch G. A two-dimensional conservation laws scheme for compressible flows with moving boundaries [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **138**(1): 83-102.
- [36] Arienti M, Hung P, Morano E, Shepherd J E. A level set approach to Eulerian-Lagrangian coupling [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **185**(1): 213-251.
- [37] Laurence S J, Deiterding R. Shock-wave surfing [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, **676**(3): 396-431.
- [38] Laurence S J, Parziale N J, Deiterding R. Dynamical separation of spherical bodies in supersonic flow [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, **713**(12): 159-182.

Simulation of 6-DOF Rigid Bodies Moving in Supersonic Flow

LI Tao¹, SUI Jing-xia², WU Chui-jie¹

(1. *School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

2. *School of Energy and Power Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)*

(Contributed by WU Chui-jie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Simulation of bodies moving in fluid has very broad application areas. A method for solving unsteady compressible supersonic flow with freely moving rigid bodies of 6 degrees of freedom was presented. The fluid solver dealt with the large-eddy simulation turbulence model, which was a stretched vortex subgrid model in the current work. The WENO scheme was used in the discontinuous flow regions (the shock waves and the contact surfaces) and the tuned center difference scheme was applied in the smooth flow regions. An optimal 3rd-order strong-stability preserving Runge-Kutta scheme was used for the time integration. The model for the rigid bodies was of 6 degrees of freedom and its orientation was tracked with a quaternion. Several numerical examples were presented to verify the correctness and accuracy of the solvers and the results were satisfactory.

Key words: 6 degrees of freedom; shock wave; turbulence; large-eddy simulation; ghost-fluid method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11372068); The National Basic Research Program of China(973 Program)(2014CB744104)

引用本文/Cite this paper:

李涛, 随晶侠, 吴锤结. 超声速流场中 6 自由度物体运动的模拟研究 [J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(1): 27-47.

LI Tao, SUI Jing-xia, WU Chui-jie. Simulation of 6-DOF rigid bodies moving in supersonic flow [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 27-47.