

浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及 祖冲之类保辛算法*

吴 锋, 钟万勰

(工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 针对浅水流问题,将不可压缩条件作为约束处理,提出一种约束 Hamilton 变分原理,并利用该变分原理,推出一种基于位移和压强的浅水方程(SWE-DP),针对 SWE-DP,构造了一种结合有限元和祖冲之类算法的混合数值方法.通过数值算例,将 SWE-DP 与两个现有的浅水方程进行了数值比较,从而验证了 SWE-DP 的可靠性,并验证了针对 SWE-DP 构造的数值算法的正确性.此外,数值算例还显示出祖冲之类算法在对浅水波进行长时间仿真时,具有很好的表现.

关键词: 浅水方程; 约束 Hamilton 变分原理; 祖冲之类算法

中图分类号: O352 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.01.001

引 言

浅水流的理论在实际海洋工程中有着广泛的运用,目前浅水流问题的研究,主要采用 Euler 描述法^[1-3].在 Euler 坐标的描述下,以流速为基本未知量,并利用水波的速度分布与竖向坐标 z 无关的假定,结合自由水面的非线性条件,可以给出描述浅水流运动的方程,如 Korteweg-de Vries(KdV)方程、Saint-Venant 方程(SVE)、Boussinesq 方程^[3-7]等.

然而,流体力学方程可在 Euler 坐标下描述,也可在 Lagrange 坐标下描述^[1-2, 8].Euler 坐标的描述下,基本变量是流速,相应的 Lagrange 函数、变分原理却不容易找到,而在 Lagrange 坐标的描述下,未知量为位移,Hamilton 变分原理很容易建立,而基于 Hamilton 变分原理构造的数值算法,可以保持体系的基本结构,如辛结构等,因此在长时间仿真方面有突出的优势^[9].2006 年,钟万勰等^[8, 10]基于水平位移与竖向坐标无关的假定提出了一种分析浅水波问题的 Hamilton 变分原理,并根据变分原理导出一种基于位移的浅水波方程(SWE-D).在文献[8]中,SWE-D 被用于分析孤立波问题,并解析给出一种孤立波解.SWE-D 中只有一个未知量,即水平位移,因此使用起来十分方便.虽然在文献[8, 10]所提出的 SWE-D 中,忽略了某些竖向加速度相关的非线性项,但是由于采用位移为基本未知量,因此自由水面可以精确满足.并且基于位移为基本变量,可以很容易建立起变分原理,从而可使用有限元法与保辛算法来处理浅水问题,在

* 收稿日期: 2015-09-30; 修订日期: 2015-12-01

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11472067)

作者简介: 吴锋(1985—),男,博士(E-mail: wufeng_chn@163.com);

钟万勰(1934—),男,教授,中科院院士(通讯作者. E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

保持体系性质方面有优势,因此文献[8, 10]的工作很值得进一步研究和推广.本文在此基础上进一步研究,将不可压缩条件看作是约束,将压强看作是 Lagrange 乘子,从而推出一种基于位移和压强的约束 Hamilton 变分原理,并基于该变分原理导出一种基于位移-压强的浅水方程.与文献[8, 11]提出的浅水方程相比,本文给出的浅水方程保留了与竖向加速度相关的非线性项.

本文提出的浅水波方程可以通过约束 Hamilton 变分原理导出,因此可以采用有限元方法计算.然而采用有限元空间离散,会得到一组微分-代数方程(DAE).文献[12]针对 DAE 构造出一种保约束的离散积分算法,在文献[13]中将该方法命名为祖冲之类方法.祖冲之类算法的关键思路是只在离散后的时间格点处满足约束条件,而在各个时间区段内的积分不用再考虑约束条件,代之以在无约束状态空间中的相轨道.也就是无约束状态空间中的短程线,即最小作用量原理.并结合时间有限元,从而同时具有保约束和保辛的特点^[14].本文将祖冲之类算法用于求解空间离散后得到的 DAE.由于对浅水波来说,约束就是不可压缩条件,因此本文将有限元与祖冲之类算法结合起来分析浅水波问题,可以同时保辛和保体积,特别适合于需要长时间仿真的浅水流问题.

1 基本理论

1.1 水波方程的 Hamilton 变分

本节首先介绍以位移和压强表示的 Hamilton 变分及水波方程,考虑如图 1 所示的一个矩形水域, L 为矩形水域的长度, h 为水域的高度.

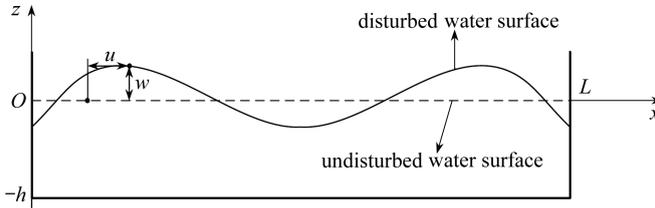


图 1 分析模型

Fig. 1 The considered model

令 $u(x, z, t)$ 和 $w(x, z, t)$ 分别表示静水下在 (x, z) 处质点在 t 时刻的位移,该质点在 t 时刻的位置则记为 (ξ, ζ) , 其中

$$\xi = x + u(x, z, t), \quad \zeta = z + w(x, z, t). \quad (1)$$

本文假定水连续变形,由拓扑学知,变形前在边界的质点,变形后也总处于边界,因此边界处质点的位移为

$$w(x, -h, t) = u(0, z, t) = u(L, z, t) = 0. \quad (2)$$

不可压缩条件可表达为 Jacobi(雅克比)矩阵的行列式恒等于 1:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} = 1, \quad (3)$$

也即

$$(1 + u_x)(1 + w_z) - w_x u_z = 1. \quad (4)$$

动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h}^0 \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dz dx; \quad (5)$$

势能为重力势能,可表示为

$$U = \int_0^L \int_{-h}^0 \rho g (z + w) dz dx, \quad (6)$$

其中, ρ 表示水的密度, g 是重力加速度. 则根据 Hamilton 变分原理可知

$$S = \int_0^t (T - U) ds + \int_0^t p [(1 + u_x)(1 + w_z) - w_x u_z - 1] ds, \quad (7)$$

其中 p 是 Lagrange 乘子. 对上式变分可得

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} + p_x (1 + w_z) - p_z w_x = 0, \\ \rho \ddot{w} + \rho g - p_x u_z + p_z (1 + u_x) = 0, \\ u_x + w_z + u_x w_z - u_z w_x = 0, \end{cases} \quad (8)$$

实际上 p 就是压强.

1.2 浅水波的 Hamilton 变分

浅水波的基本假定是, 可以认为水平位移与竖向坐标无关^[8], 因此取

$$u = u(x, t). \quad (9)$$

在水底的竖向位移为 0, 而在水面的竖向位移可写为

$$\eta(x, t) = w(x, 0, t). \quad (10)$$

对竖向位移进行线性插值, 令

$$w(x, z, t) = \left(\frac{z + h}{h} \right) \eta(x, t), \quad (11)$$

由上式可知, 竖向速度为

$$\dot{w}(x, z, t) = \left(\frac{z + h}{h} \right) \dot{\eta}(x, t). \quad (12)$$

在水面压强为 0, 在水底的压强记为

$$\beta(x, t) = p(x, -h, t), \quad (13)$$

对压强也可以进行线性插值, 可得

$$p(x, z, t) = -\frac{z}{h} \beta(x, t). \quad (14)$$

根据式(9)和(12), 则动能表达式可以改写为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h}^0 \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dz dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{u}^2 h dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{h \rho \dot{\eta}^2}{3} dx. \quad (15)$$

根据式(9)、(11)和(14), 势能表达式为

$$U = C + \int_0^L \frac{h \rho g}{2} \eta(x, t) dx, \quad C = \int_0^L \int_{-h}^0 \rho g z dz dx. \quad (16)$$

Lagrange 函数修正项可写为

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-h}^0 p (u_x + w_z + u_x w_z - u_z w_x) dz dx = \\ \frac{1}{2} \int_0^L \beta(x, t) (u_x h + \eta + u_x \eta) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

于是作用量可以写为

$$S = \int_0^t \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{u}^2 h dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{h\rho\dot{\eta}^2}{3} dx - C - \int_0^L \frac{h\rho g}{2} \eta(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \beta(x,t) (u_x h + \eta + u_x \eta) dx \right] ds. \quad (18)$$

对上式变分即可得到

$$\begin{cases} \rho h \ddot{u} + \frac{1}{2} [(h + \eta)\beta_x + \eta_x \beta] = 0, \\ \frac{h\rho}{3} \ddot{\eta} + \frac{h\rho g}{2} - \frac{1}{2} \beta(1 + u_x) = 0, \\ (u_x + 1)(h + \eta) = h. \end{cases} \quad (19)$$

上式便是基于位移和压强的浅水方程(SWE-DP),对应的是约束 Hamilton 系统,约束条件就是体积不变条件.实际上,上式与文献[8]中提出的基于位移的浅水波方程(SWE-D)是等价的.根据不可压缩条件,有

$$u_x h + \eta + u_x \eta = 0 \rightarrow \eta = -\frac{u_x h}{1 + u_x} \approx h(-u_x + u_x^2). \quad (20)$$

上式中略去了3阶以上小量.根据上式进一步可得

$$\dot{\eta} = -\dot{u}_x h. \quad (21)$$

这里,考虑到竖向位移的速度是小量,因此进一步忽略了高阶小量.根据式(19)的第2式和式(21),有

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{(1 + u_x)} \left(-\frac{2\rho}{3} \ddot{u}_x h^2 + h\rho g \right) \approx \\ &-\frac{2\rho}{3} \ddot{u}_x h^2 + h\rho g(1 - u_x + u_x^2), \end{aligned} \quad (22)$$

于是有

$$\beta_x = -\frac{2\rho}{3} \ddot{u}_{xx} h^2 + h\rho g(-u_{xx} + 2u_x u_{xx}). \quad (23)$$

根据式(20)可知

$$\eta_x = h(-u_{xx} + 2u_x u_{xx}). \quad (24)$$

将式(23)、(24)、(20)和(22)代入式(19)中的第1式,并忽略高阶小量,则得到

$$\ddot{u} - \frac{1}{3} \ddot{u}_{xx} h^2 - gh(u_{xx} - 3u_x u_{xx}) = 0. \quad (25)$$

上式与文献[8]中的公式是完全一样的,根据式(25)还可以进一步研究孤立波问题.

2 数值求解

本文提出的浅水波模型(19)是一个非线性方程组,其求解需要构造数值方法.由于本文模型是通过 Hamilton 变分原理导出的,因此可以利用有限元分析,下面介绍数值计算方法.

2.1 空间离散

在空间上 $[0, L]$ 内进行离散,如图2所示,共 $N_d - 1$ 个单元,在每个单元上,对水平位移 $u(x)$ 线性插值,而令 $\eta(x)$ 和 $\beta(x)$ 为常值,因此第 n 个单元上的面积可以表示为

$$\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x_n} + 1 \right) (h + \eta_{n+0.5}) \Delta x_n = h \Delta x_n. \quad (26)$$



图2 有限元网格

Fig. 2 The finite element mesh

动能的计算采用集中质量矩阵计算较为方便,于是作用量可以表示为

$$S = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}_\eta \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\theta} \right) d\tau, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M}_u = \text{diag} \left\{ \rho h \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}, \dots, \rho h \frac{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}}{2}, \dots, \rho h \frac{\Delta x_{N_d-2} + \Delta x_{N_d-1}}{2} \right\}, \\ \mathbf{M}_\eta = \text{diag} \left\{ \frac{h\rho}{3} \Delta x_1, \dots, \frac{h\rho}{3} \Delta x_n, \dots, \frac{h\rho}{3} \Delta x_{N_d-1} \right\}, \\ \mathbf{G} = \left(\frac{h\rho g}{2} \Delta x_1 \quad \frac{h\rho g}{2} \Delta x_2 \quad \dots \quad \frac{h\rho g}{2} \Delta x_{N_d-1} \right)^T, \\ \boldsymbol{\beta} = (\beta_{1.5} \quad \beta_{2.5} \quad \dots \quad \beta_{N_d-0.5})^T, \\ \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = (\theta_{1.5} \quad \theta_{2.5} \quad \dots \quad \theta_{N_d-0.5})^T, \\ \theta_{n+0.5} = \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x_n} h + \eta_{n+0.5} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x_n} \eta_{n+0.5} \right) \Delta x_n. \end{cases} \quad (28)$$

上式中, \mathbf{u} 和 $\boldsymbol{\eta}$ 分别是水平和竖向位移向量, \mathbf{M}_u 和 \mathbf{M}_η 则分别是与 \mathbf{u} 和 $\boldsymbol{\eta}$ 对应的质量矩阵, \mathbf{G} 是重力向量, $\boldsymbol{\beta}$ 是压强向量, $\boldsymbol{\theta}$ 是体积变形向量, 对上式变分得

$$\begin{aligned} \delta S = & -\delta \mathbf{u}^T \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}} - \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M}_\eta \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) + \\ & \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_u(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{F}_\eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}) + \\ & \frac{1}{2} \delta u_{N_d} \beta_{N_d-0.5} (h + \eta_{N_d-0.5}) - \frac{1}{2} \delta u_1 \beta_{1.5} (h + \eta_{1.5}), \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\beta_{1.5} (\Delta x_1 + u_2 - u_1) \quad \beta_{2.5} (\Delta x_2 + u_3 - u_2) \quad \dots \\ \quad \beta_{N_d-0.5} (\Delta x_{N_d-1} + u_{N_d} - u_{N_d-1}))^T, \\ \mathbf{F}_u(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} (f_{u,2} \quad f_{u,3} \quad \dots \quad f_{u,N_d-1})^T, \\ f_{u,n} = \beta_{n-0.5} (h + \eta_{n-0.5}) - \beta_{n+0.5} (h + \eta_{n+0.5}). \end{cases} \quad (30)$$

考虑到 $\delta u_1 = \delta u_{N_d} = 0$, 因此有

$$\begin{cases} \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}_u(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_\eta \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{G} - \mathbf{F}_\eta(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (31)$$

上式是一组微分代数方程(DAE).

2.2 祖冲之类算法

非线性微分代数方程组 (31) 由式 (27) 变分得到, 式 (27) 描述的是一个约束 Hamilton 系统, 其时间积分需要保辛, 而对于约束 Hamilton 系统, 时间积分不仅需要保辛, 还需要保约束. 文献 [12] 曾提出一种针对约束 Hamilton 系统的保约束方法, 在文献 [13] 中将该方法命名为祖冲之类方法. 祖冲之类算法的关键思路是只在离散后的时间格点处满足约束条件, 而在各个时间区段内的积分不用再考虑约束条件, 代之以在无约束状态空间中的相轨道. 也就是无约束状态空间中的短程线, 即最小作用量. 并结合时间有限元, 从而同时具有保约束和保辛的特点 [14], 优点是可以长时间计算保真, 且没有约束违约问题. 对于本文考虑的浅水波系统, Hamilton 函数可以写为

$$H(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}_\eta \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}. \quad (32)$$

Hamilton 函数往往表征能量, 采用祖冲之类算法, 能量也可保持得很好. 本文将采用祖冲之类算法计算式 (31). 对作用量进行时间离散为

$$t = t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, \quad t_k = k\Delta t. \quad (33)$$

在一个时间步长 $[t_k, t_{k+1}]$ 内, 速度可以近似为

$$\dot{\mathbf{u}}_k(t) = \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{\Delta t}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_k(t) = \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k}{\Delta t}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (34)$$

其中, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$, $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\eta}(t_k)$. 位移近似为

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k}{2}, \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_k}{2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (35)$$

压强近似为常值:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (36)$$

对作用量采用梯形公式进行积分:

$$S_k = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{k+1}^T - \mathbf{u}_k^T) \mathbf{M}_u \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\eta}_{k+1}^T - \boldsymbol{\eta}_k^T) \mathbf{M}_\eta \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k}{\Delta t} - (\boldsymbol{\eta}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_k) \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} + \frac{\Delta t}{4} \boldsymbol{\beta}_k^T \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\eta}_k) + \frac{\Delta t}{4} \boldsymbol{\beta}_k^T \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_{k+1}). \quad (37)$$

根据作用量变分可知

$$\begin{cases} \mathbf{M}_u \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_u(\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\eta}_{k+1}) - \mathbf{p}_{u,k+1} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{M}_u \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_u(\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{p}_{u,k} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_\eta \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_\eta(\boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{p}_{\eta,k+1} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{M}_\eta \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_\eta(\boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{p}_{\eta,k} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_{k+1}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (38)$$

其中, \mathbf{p}_u 和 \mathbf{p}_η 是动量向量

$$\mathbf{p}_u = \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{p}_\eta = \mathbf{M}_\eta \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (39)$$

式 (38) 是一个非线性方程组, 可以采用 Newton 迭代法求解. 如果将 $\mathbf{M}_\eta = \mathbf{M}_\eta \boldsymbol{\varepsilon}$ 代入式 (38), 其

中 $\varepsilon \ll 1$, 则式(38)可以用于分析不考虑竖向加速度的浅水波动, 其结果与 Euler 坐标下的 SVE 解相同.

3 数值算例

考虑 $L = 50 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, 水密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度为 $g = 10 \text{ m/s}^2$. 本节将通过数值算例, 一方面验证本文所提出的基于位移法的浅水波模型的正确性, 也即式(19)的正确性, 另一方面验证本文给出的数值算法的正确性. 本文将通过两种情况计算验证 SWE-DP 的正确性, 一种是不考虑竖向加速度, 一种是考虑竖向加速度. 当不考虑竖向加速度时, 本文将与 SVE 进行比较; 当考虑竖向加速度时, 将与 SWE-D 进行比较. 通过这两种比较, 验证本文提出的 SWE-DP 的可靠性, 以及本文提出的保辛数值算法的正确性.

3.1 不考虑竖向加速度

首先采用 SVE 计算, 初始流场为 0, 而初始水面形状为

$$\bar{\eta}(\xi, 0) = A \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha L}{2} - \alpha \xi \right) - \frac{2}{L} \tanh \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \right], \quad (40)$$

其中, $\xi = x + u(x, 0)$, α 和 A 为两个形状参数, 通过调节 α 和 A 可以改变初始水面形状. α 或者 A 越小, 初始水面越平坦. 式(40) 满足 $\int_0^L \bar{\eta}(\xi, 0) d\xi = 0$, 因此初始状态水的变形满足不可压缩条件. SVE 的求解, 采用有限差分法计算, 网格均匀剖分, $\Delta x = 0.1 \text{ m}$, 时间步长取 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $\alpha = 0.3$, $A = 0.1$ 和 0.5 . 本文 SWE-DP 的求解, 采用有限元空间离散, 网格均匀剖分, $\Delta x = 0.25 \text{ m}$, 时间积分采用祖冲之类算法计算, 时间步长取 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 非线性方程采用 Newton 迭代法计算, 收敛准则为残差向量的 2 范数小于 10^{-6} . 本文模型以位移和压强为基本变量, 初始位移可以通过式(40) 给出. 根据式(40) 知初始的水面竖向位移为

$$\eta(x, 0) = A \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha L}{2} - \alpha (x + u(x, 0)) \right) - \frac{2}{L} \tanh \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \right]. \quad (41)$$

上式是一个关于 $u(x, 0)$ 的非线性方程, 初始时刻已经采用线性单元对 $u(x, 0)$ 进行插值, 因此在每个单元上有

$$(u_{n+1} - u_n)h + \eta_{n+0.5} \Delta x_n + (u_{n+1} - u_n) \eta_{n+0.5} = 0, \quad 1 \leq n \leq N_e, \quad (42)$$

其中 N_e 为单元数,

$$\eta_{n+0.5} = A \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha L}{2} - \alpha \left(x_{n+0.5} + \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \right) \right) - \frac{2}{L} \tanh \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \right]. \quad (43)$$

式(42)中, $u_1 = u_{N_e} = 0$, 求解非线性方程(42) 即可得到初始时刻的各节点上的初始位移 u_n , 而初始速度则为 0. 进一步可以利用式(43) 得到各个节点上的 $\eta_{n+0.5}$. 采用本文模型计算时, 则取 M_η 为 $0.001 M_\eta$, 近似忽略竖向加速度的影响. 这里也采用 M_η 计算出一份结果, 并一起绘在图中, 以展示竖向加速度的作用.

图 3 绘制的是 $\alpha = 0.3$ 和 $A = 0.1$ 情况下, 采用 SVE 以及采用本文模型计算得到的不同时刻的水自由面. 图 4 绘制的是 $\alpha = 0.3$ 和 $A = 0.5$ 情况下, 采用 SVE 以及采用本文模型计算得到的不同时刻的水自由面. 由图 3 和 4 可见, 本文模型与 SVE 模型的解十分吻合. 然而当取 M_η 计算时, SWE-DP 解与 SVE 解的差异明显, 这表明竖向加速度的影响不可忽略.

3.2 考虑竖向加速度

考虑竖向加速度时, 比较本文模型(19) 与文献[8] 中浅水波方程(25). 初始时刻的速度为

0, 而初始时刻的水面形状仍然取式(40), 初始时刻的位移也与上个例题相同. 对于浅水波方程(25), 文献中提供了一种基于保辛的时空混合有限元方法, 本文采用该方法计算该浅水波方程(25), 空间有限元网格均匀剖分, $\Delta x = 0.25$ m, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s, $A = 1$, $\alpha = 0.1$ 和 0.3 . 对于本文模型(19), 本文仍然采用第2节提出的离散方法计算, 空间有限元网格同样均匀剖分, $\Delta x = 0.25$ m, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s, 非线性方程采用 Newton 迭代法计算, 收敛准则为残差向量的 2 范数小于 10^{-6} .

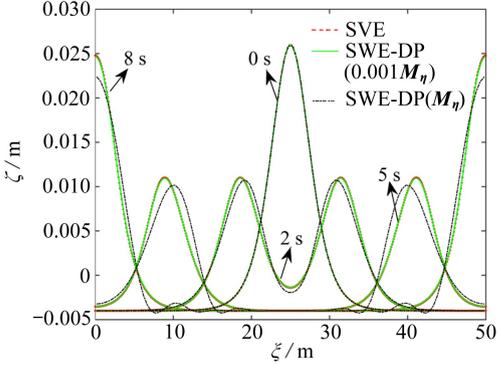


图3 不同时间点的自由面, $\alpha = 0.3$, $A = 0.1$
Fig. 3 The free water surfaces at different times for $\alpha = 0.3$, $A = 0.1$

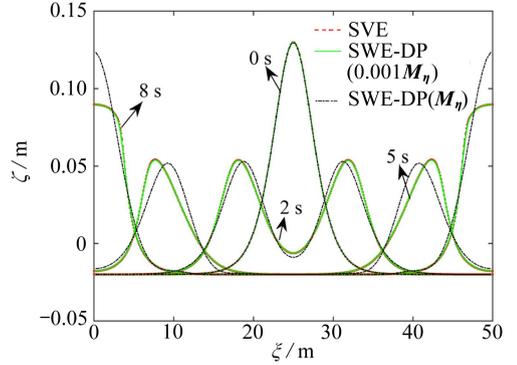


图4 不同时间点的自由面, $\alpha = 0.3$, $A = 0.5$
Fig. 4 The free water surfaces at different times for $\alpha = 0.3$, $A = 0.5$

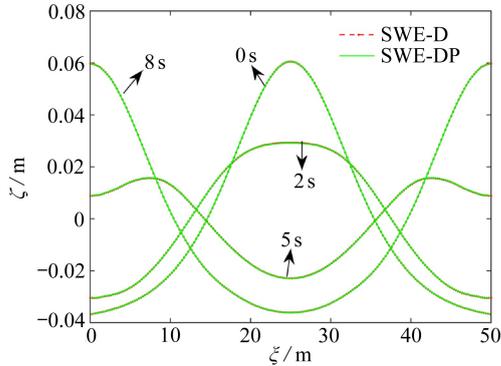


图5 不同时间点的自由面, $\alpha = 0.1$, $A = 1$
Fig. 5 The free water surfaces at different times for $\alpha = 0.1$, $A = 1$

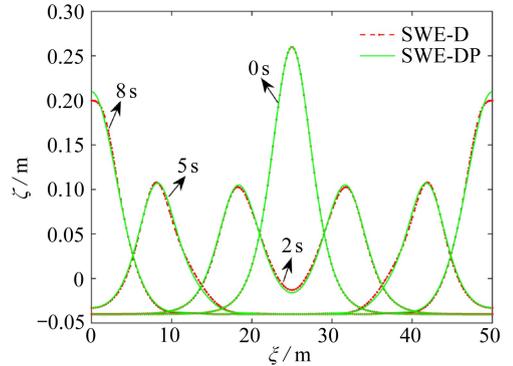


图6 不同时间点的自由面, $\alpha = 0.3$, $A = 1$
Fig. 6 The free water surfaces at different times for $\alpha = 0.3$, $A = 1$

图5绘制的是 $\alpha = 0.1$ 和 $A = 1$ 情况下, 采用 SWE-D 以及采用本文模型计算得到的不同时刻的水自由面; 图6绘制的是 $\alpha = 0.3$ 和 $A = 1$ 情况下, 采用 SWE-D 以及采用本文模型计算得到的不同时刻的水自由面. SWE-D 是文献[8]中提出的浅水波方程, 由图5可见, 本文模型与 SWE-D 的解十分吻合. 图6中, 本文 SWE-DP 的解与 SWE-D 解有微小差异, 这种微小差异反应了本文 SWE-DP 与 SEW-D 之间的差异, 即 SWE-D 中忽略了与竖向加速度相关的某些非线性项, 而在 SWE-DP 中则保留了这些非线性项.

3.3 收敛性分析

收敛性分析包含两个部分, 一个是分析算法误差受空间网格尺寸的影响, 一个是分析算法误差受时间步长的影响. 先考察算法误差受空间网格尺寸的影响, 此时算法误差可以表示为 $e = C\Delta x^s$, 其中 C 与 Δx 无关, s 是算法精度的阶数, Δx 是空间单元长度. 假设两种不同的单元长度

Δx_1 和 Δx_2 分别对应两个不同的误差:

$$e_1 = C\Delta x_1^s, e_2 = C\Delta x_2^s, \tag{44}$$

则算法精度可以表示为

$$s = \frac{\ln(e_1) - \ln(e_2)}{\ln(\Delta x_1) - \ln(\Delta x_2)}. \tag{45}$$

给定 5 种单元长度 $\Delta x = 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625$ m, 最后一种单元长度的解作为参考解, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s, 其余计算参数取 $\alpha = 0.1$ 和 $0.3, A = 0.8$. 这里通过选取两个代表性点在不同时间 $t = 1$ s, 2 s 和 5 s 上的计算结果, 来考察本文方法关于空间单元长度的收敛性, 这两个点分别是在 $x = 12.5$ m 处的水平位移 $u(x, t)$, 在 $x = 25$ m 处的水面竖向位移 $\eta(x, t)$ 和水底压强 $\beta(x, t)$, 计算结果列于表 1 和表 2. 表 1 和表 2 表明, 本文的空间离散格式是 2 阶精度的.

表 1 单元长度对收敛性的影响, $\alpha = 0.1$

Table 1 The effect of mesh size on the convergence rate for $\alpha = 0.1$

$\Delta x / \text{m}$	$u(x, t) / \text{m}$			$\eta(x, t) / \text{m}$			$\beta(x, t) / \text{Pa}$		
	(12.5 m, 1 s)	(12.5 m, 2 s)	(12.5 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)
2.5	0.267 54	0.208 17	-0.120 84	0.040 29	0.023 65	-0.018 442	10 395.98	10 235.75	9 818.10
1.25	0.266 81	0.207 21	-0.122 32	0.040 71	0.023 43	-0.018 537	10 400.03	10 233.92	9 817.08
0.625	0.266 63	0.206 96	-0.122 67	0.040 81	0.023 37	-0.018 560	10 401.02	10 233.45	9 816.83
0.312 5	0.266 59	0.206 90	-0.122 76	0.040 83	0.023 36	-0.018 566	10 401.26	10 233.33	9 816.77
0.156 25	0.266 58	0.206 89	-0.122 78	0.040 84	0.023 35	-0.018 567	10 401.32	10 233.30	9 816.76
s									
	2.13	2.13	2.16	2.14	2.11	2.15	2.14	2.11	2.15

表 2 单元长度对收敛性的影响, $\alpha = 0.3$

Table 2 The effect of mesh size on the convergence rate for $\alpha = 0.3$

$\Delta x / \text{m}$	$u(x, t) / \text{m}$			$\eta(x, t) / \text{m}$			$\beta(x, t) / \text{Pa}$		
	(12.5 m, 1 s)	(12.5 m, 2 s)	(12.5 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)
2.5	0.406 64	0.379 05	-0.325 9	0.090 7	-0.010 64	-0.031 940	10 923.6	9 952.6	9 681.97
1.25	0.408 36	0.382 88	-0.325 5	0.082 6	-0.013 16	-0.031 901	10 887.0	9 921.4	9 680.83
0.625	0.408 79	0.383 94	-0.322 4	0.080 3	-0.013 30	-0.031 937	10 877.6	9 916.7	9 680.75
0.312 5	0.408 90	0.384 21	-0.321 5	0.079 7	-0.013 31	-0.031 948	10 875.2	9 915.6	9 680.70
0.156 25	0.408 92	0.384 28	-0.321 3	0.079 6	-0.013 32	-0.031 950	10 874.6	9 915.3	9 680.69
s									
	2.14	2.08	1.50	2.08	3.77	0.84	2.12	2.37	2.16

再研究算法误差受时间步长的影响, 此时算法误差可以表示为 $e = C\Delta t^l$, 其中 C 与 Δt 无关, l 是算法精度的阶数, Δt 是时间步长. 假设两种不同的单元长度 Δt_1 和 Δt_2 分别对应两个不同的误差:

$$e_1 = C\Delta t_1^l, e_2 = C\Delta t_2^l, \tag{46}$$

则算法精度可以表示为

$$l = \frac{\ln(e_1) - \ln(e_2)}{\ln(\Delta t_1) - \ln(\Delta t_2)}. \tag{47}$$

给定 5 种不同时间步长 $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.001$ s, 最后一种时间步长的解作为参考解, 空间网格均匀剖分, $N_e = 100$, 其余计算参数取 $\alpha = 0.1$ 和 0.3 , $A = 0.8$. 仍然选取在 $x = 12.5$ m 处的水平位移 $u(x, t)$, 在 $x = 25$ m 处的水面竖向位移 $\eta(x, t)$ 和水底压强 $\beta(x, t)$ 在 3 个不同时间点 $t = 1, 2, 5$ s 上的计算结果, 以考察本文方法关于时间单元长度的收敛性, 计算结果列于表 3 和表 4. 表 3 和 4 表明, 本文采用祖冲之类算法计算水波, 时间积分的精度也是 2 阶.

表 3 时间步长对收敛性的影响, $\alpha = 0.1$ Table 3 The effect of time step length on the convergence rate for $\alpha = 0.1$

$\Delta t / s$	$u(x, t) / m$			$\eta(x, t) / m$			$\beta(x, t) / Pa$		
	(12.5 m, 1 s)	(12.5 m, 2 s)	(12.5 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)
0.2	0.266 610 158	0.206 911 4	-0.122 868	0.040 805 3	0.023 338 2	-0.018 550 5	10 400.990	10 233.128	9 816.921
0.1	0.266 609 944	0.206 929 4	-0.122 750	0.040 817 3	0.023 358 4	-0.018 559 8	10 401.099	10 233.325	9 816.831
0.05	0.266 609 903	0.206 934 0	-0.122 720	0.040 820 3	0.023 363 4	-0.018 562 2	10 401.126	10 233.374	9 816.809
0.025	0.266 609 893	0.206 935 1	-0.122 713	0.040 821 0	0.023 364 6	-0.018 562 8	10 401.133	10 233.386	9 816.804
0.001	0.266 609 890	0.206 935 5	-0.122 710	0.040 821 3	0.023 365 1	-0.018 562 9	10 401.135	10 233.390	9 816.802
l									
	2.13	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

表 4 时间步长对收敛性的影响, $\alpha = 0.3$ Table 4 The effect of time step length on the convergence rate for $\alpha = 0.3$

$\Delta t / s$	$u(x, t) / m$			$\eta(x, t) / m$			$\beta(x, t) / Pa$		
	(12.5 m, 1 s)	(12.5 m, 2 s)	(12.5 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)	(25 m, 1 s)	(25 m, 2 s)	(25 m, 5 s)
0.2	0.408 890	0.384 49	-0.320 42	0.079 414	-0.012 79	-0.031 943 6	10 870.5	9 919.9	9 680.746
0.1	0.408 853	0.384 17	-0.321 61	0.079 857	-0.013 18	-0.031 943 3	10 875.0	9 917.1	9 680.731
0.05	0.408 844	0.384 09	-0.321 89	0.079 968	-0.013 28	-0.031 942 7	10 876.1	9 916.4	9 680.727
0.025	0.408 842	0.384 07	-0.321 95	0.079 996	-0.013 30	-0.031 942 6	10 876.4	9 916.2	9 680.726
0.001	0.408 841	0.384 06	-0.321 98	0.080 006	-0.013 31	-0.031 942 5	10 876.5	9 916.1	9 680.726
l									
	1.99	2.01	2.04	2.00	2.00	1.46	2.00	2.01	1.93

对于 Hamilton 体系来说, 能量守恒是一个重要的性质. 祖冲之类算法在计算微分代数方程时, 有保约束和保辛的优点, 对于浅水波方程, 约束就是体积不变, 因此利用祖冲之类算法计算, 具有保体积和保辛的优点, 同时祖冲之类算法在能量方面也能保得很好. 这里测试其对保能量的性能. 时间步长采用 $\Delta t = 0.1$ s, 空间网格尺寸采用 $\Delta x = 0.5$ m, 积分区间为 $[0, 100]$ s, $\alpha = 0.1$ 和 0.28 , $A = 0.8$. 其能量计算采用式 (32), 能量的相对误差定义为 $[H(t) - H(0)] / H(0)$. 图 7 所示为能量的相对误差随时间的演化, 图 7 表明, 祖冲之类算法在计算浅水波时, 在长时间的范围内, 能量的相对误差都很小.

与采用速度为基本变量的浅水方程相比, 采用位移法描述的浅水方程, 可以很方便地给出水中质点的运动轨迹. 图 8 所示为 $(12.5, 0)$ m 处质点的运动轨迹. 由图 8 可见, 当 $\alpha = 0.1$ 时, 质点的运动轨迹不封闭, 而当 $\alpha = 0.28$ 时, 质点的运动轨迹几乎重合于一条曲线, 这是因为当 $\alpha = 0.28$ 时, 水面的运动十分规律, 且近似于孤立波的传播, $\alpha = 0.28$ 时的水面随时间的演化过程可参见图 9, 由图 9 可见, 在 100 s 内, 波来回传播了约 6 个半周期, 然而波形仍然保持很好.

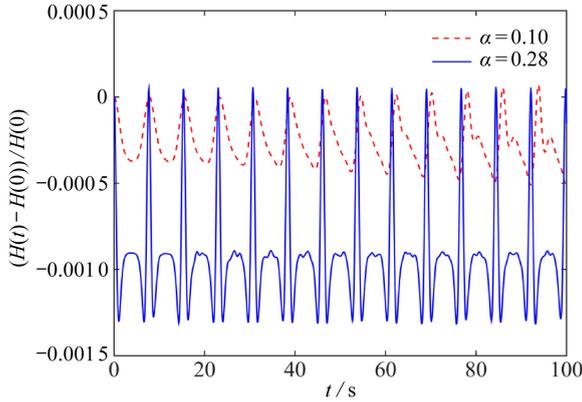
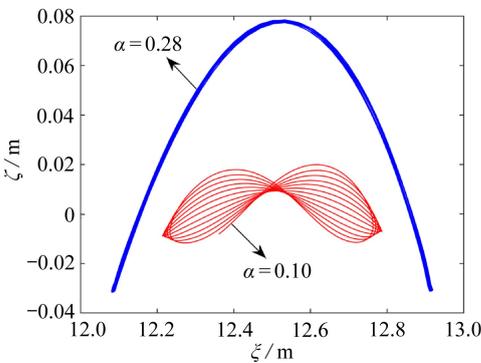
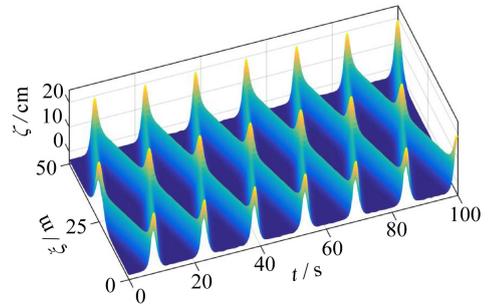


图7 能量的守恒性

Fig. 7 Conservation of energy over time

图8 质点的运动轨迹 $(x, z) = (12.5, 0)$ mFig. 8 The motion of point $(x, z) = (12.5, 0)$ m图9 自由面的演化过程, $\alpha = 0.28$ Fig. 9 The evolution of the free water surface for $\alpha = 0.28$

4 结束语

本文针对浅水流问题,将不可压缩条件作为约束,建立了浅水流的约束 Hamilton 变分原理,并通过该变分原理导出一种基于位移和约束的浅水波方程(SWE-DP),针对该浅水波方程,本文构造了一种保辛、保体积的数值算法,该算法基于约束 Hamilton 变分原理,通过有限元进行空间离散,并利用祖冲之类算法进行时间积分.通过与传统 Euler 描述的 Saint-Venant 方程以及文献[8, 11]所提出的基于位移的浅水波方程进行数值比较,本文验证了 SWE-DP 的正确性.通过数值算例,也验证了本文所提数值方法的正确性.

本文虽然处理的是二维平底浅水问题,但由于采用了位移为基本未知量,相比 Euler 描述方法,可以更方便地处理复杂边界条件(如自由面),并且基于位移为基本变量,可以很容易建立起变分原理,从而可使用有限元法与保辛算法来处理流体力学问题,在保持体系性质方面有优势,因此很值得推广到其他流体力学问题.在后续研究中,将研究考虑不平水底的浅水波位移法方程,考虑三维浅水波位移法方程,以及相应的保辛数值算法.

参考文献(References):

- [1] 兰姆 H. 理论流体力学[M]. 游镇雄, 牛家玉, 译. 北京: 科学出版社, 1990. (Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. YOU Zhen-xiong, NIU Jia-yu, transl. Beijing: Science Press, 1990. (Chinese

- version))
- [2] Stoker J J. *Water Waves: The Mathematical Theory With Applications*[M]. New York: Interscience Publishers Ltd, 1957.
 - [3] Vreugdenhil C B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*[M]. Netherlands: Springer, 1994.
 - [4] Kernkamp H W J, Van Dam A, Stelling G S, de Goede E D. Efficient scheme for the shallow water equations on unstructured grids with application to the continental shelf[J]. *Ocean Dynamics*, 2011, **61**(8): 1175-1188.
 - [5] LIU Hai-fei, WANG Hong-da, LIU Shu, HU Chang-wei, DING Yu, ZHANG Jie. Lattice Boltzmann method for the Saint-Venant equations[J]. *Journal of Hydrology*, 2015, **524**: 411-416.
 - [6] Chalfen M, Niemiec A. Analytical and numerical-solution of Saint-Venant equations[J]. *Journal of Hydrology*, 1986, **86**(1/2): 1-13.
 - [7] Remoissenet M. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*[M]. Berlin: Springer, 1996.
 - [8] 钟万颢. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.(ZHONG Wang-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.(in Chinese))
 - [9] FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*[M]. Heidelberg, Berlin: Springer, 2010.
 - [10] 钟万颢, 陈晓辉. 浅水波的位移法求解[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2006, **21**(4): 486-493.(ZHONG Wan-xie, CHEN Xiao-hui. Solving shallow water waves with the displacement method[J]. *Journal of Hydrodynamics(Ser A)*, 2006, **21**(4): 486-493.(in Chinese))
 - [11] 钟万颢, 姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(1): 151-156.(ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(1): 151-156.(in Chinese))
 - [12] 钟万颢, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, **4**(3): 193-200.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, **4**(3): 193-200.(in Chinese))
 - [13] 钟万颢, 高强, 彭海军. 经典力学辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics—Its Symplectic Description*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013.(in Chinese))
 - [14] 吴锋, 钟万颢. 基于祖冲之类方法具有保辛性[J]. 计算力学学报, 2015, **32**(4): 447-450.(WU Feng, ZHONG Wan-xie. The Zu-type method is symplectic[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(4): 447-450.(in Chinese))

The Constrained Hamilton Variational Principle for Shallow Water Problems and the Zu-Type Symplectic Algorithm

WU Feng, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The shallow water problems were addressed. With the incompressible condition as the constraint, a constrained Hamilton variational principle was proposed for the shallow water problems. Based on the constrained Hamilton variational principle, the corresponding shallow water equations based on the displacement and pressure (SWE-DP) were developed. A hybrid numerical method combining the finite element method for the spatial discretization and the Zu-type symplectic method for the time integration was proposed to solve the SWE-DP. The correctness of the proposed SWE-DP is verified through the numerical comparisons of the present results with those from 2 sets of existing shallow water equations. The feasibility of the hybrid numerical method proposed for the SWE-DP is also proved through the numerical experiments. Moreover, the numerical experiments demonstrate the excellent performance of the Zu-type method for the simulation of the long time evolution of the shallow water motion.

Key words: shallow water equation; constrained Hamilton variational principle;
Zu-type method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (General Program)
(11472067)

引用本文/Cite this paper:

吴锋, 钟万勰. 浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(1): 1-13.

WU Feng, ZHONG Wan-xie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(1): 1-13.