

功能梯度板的柱面弯曲弹性力学解^{*}

杨云芳¹, 杨博¹, 陈伟球², 丁皓江³

- (1. 浙江理工大学 建筑工程学院 土木工程系, 杭州 310018;
2. 浙江大学 航空航天学院 工程力学系, 杭州 310027;
3. 浙江大学 建筑工程学院 土木工程系, 杭州 310027)

(本刊编委陈伟球来稿)

摘要: 在推广后的 England-Spencer 功能梯度板理论基础上,研究了功能梯度板在不同荷载作用下的柱面弯曲问题.采用该理论中的位移展开公式,并且材料参数沿板厚方向可以任意连续变化,但将材料由各向同性推广到正交各向异性.假设板在 y 方向无限长,最终建立了一个从弹性力学理论出发的正交各向异性功能梯度板在横向分布荷载作用下柱面弯曲问题的板理论.通过算例分析,讨论了边界条件、材料梯度及板厚跨比等因素对功能梯度板静力响应的影响.

关键词: 功能梯度板; 柱面弯曲; 弹性力学解

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.12.004

引 言

功能梯度材料是一种新型非均匀复合材料(以下简称为 FGM),其组分材料的体积含量在空间上呈光滑和连续变化.这种组分分布特征可以避免传统层合材料的一些问题(例如应力集中和界面脱离等问题).因此,功能梯度材料在许多工程领域都有着重要的应用前景.

在功能梯度板的静力弯曲方面,有许多学者做出了一些有意义的研究工作.例如 Li 等^[1]获得了横观各向同性 FGM 圆板受具有 qr^k (k 为 0 或为有限偶数)形式荷载作用的弹性力学解; Woodward 和 Kashtalyan^[2]给出了简支横观各向同性 FGM 矩形板受横向荷载作用时的三维弹性力学解; Wang 等^[3]基于弹性理论研究了横观各向同性 FGM 圆板受任意横向荷载作用时的轴对称弯曲问题.更多有关 FGM 板的理论研究及应用工作可参见 Birman 和 Byrd^[4]的综述.板的柱面弯曲问题是弹性理论问题中的一个经典问题(参见 Timoshenko 和 Woinowsky-Krieger^[5]

* 收稿日期: 2015-09-17; 修订日期: 2015-10-19

基金项目: 国家自然科学基金(11202188;11172263)

作者简介: 杨云芳(1957—),女,浙江金华人,教授,硕士生导师(E-mail: yfzist@163.com);
杨博(1979—),男,宁夏灵武人,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. Tel: +86-571-86843376; E-mail: bo.young@163.com);
陈伟球(1969—),男,江苏吴江人,教授,博士,博士生导师(E-mail: chenwq@zju.edu.cn);

丁皓江(1934—2015),男,江苏常州人,教授,博士生导师(E-mail: dinghj@zju.edu.cn).

的经典著作).例如,基于 Soldatos 板理论, Bian 等^[6]获得了单跨和多跨正交各向异性 FGM 板弯曲问题的解析解;基于经典板理论, Navazi 等^[7]和 Kaci 等^[8]分别研究了 FGM 板的非线性柱面弯曲问题.在上述柱面弯曲研究工作中,研究者们大多都采用了各种简化板理论.

值得注意的是, Spencer 及其合作者(见 Mian 和 Spencer^[9])发展了一套可以获得各向同性 FGM 板线弹性力学方程三维解析解的方法,板在上下表面均不受荷载作用.杨博等^[10]推广了上述方法并研究了 FGM 板受横向均布荷载作用时的柱面弯曲问题.England^[11]利用复变函数理论将 Mian 和 Spencer 的工作推广到 FGM 板在上表面受双调和荷载作用时的弯曲问题研究.在本文中,上述工作以下将简称为 England-Spencer 板理论. Yang 等^[12-13]将 England-Spencer 板理论推广到了横观各向同性材料,获得了 FGM 矩形板和环板弯曲问题的三维弹性力学解.

据作者了解,有关 FGM 板柱面弯曲问题的弹性力学解很少.本文从 England-Spencer 板理论出发,将材料由各向同性推广到正交各向异性,并考虑在板上表面受不同横向荷载作用,进而得到了功能梯度板柱面弯曲时的弹性力学解.通过算例分析,讨论了边界条件、梯度变化程度及板厚跨比对功能梯度板静力响应的影响.

1 FGM 板柱面弯曲问题的控制方程

考虑 1 个等厚度 FGM 板,坐标系 xy 平面与板中面重合,如图 1 所示, $0 \leq x \leq l$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, $-\infty < y < \infty$. u 和 w 分别表示 x 方向和 z 方向的位移分量, σ_{xx} , τ_{xz} 和 σ_{zz} 分别表示应力分量.在上表面分布荷载 $p(x)$ 作用下板处于柱面弯曲状态,位移和应力均与坐标 y 无关.

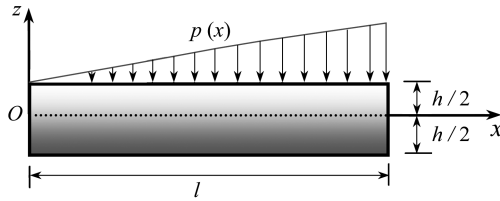


图 1 FGM 板柱面弯曲示意图

Fig. 1 The geometry and coordinates of an FGM plate in cylindrical bending

弹性力学平衡方程为

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xz,z} = 0, \quad \tau_{xz,x} + \sigma_{zz,z} = 0. \quad (1)$$

正交各向异性材料的应力-位移关系为

$$\sigma_{xx}(x, z) = c_{11}u_{,x} + c_{13}w_{,z}, \quad \sigma_{zz}(x, z) = c_{13}u_{,x} + c_{33}w_{,z}, \quad \tau_{xz}(x, z) = c_{55}(u_{,z} + w_{,x}), \quad (2)$$

式中 c_{11} , c_{13} , c_{33} 和 c_{55} 均为材料的弹性常数;对于功能梯度材料,它们是坐标 z 的函数,即 $c_{ij} = c_{ij}(z)$.

根据 England-Spencer 板理论,现寻求式(1)和(2)如下形式的解:

$$\begin{cases} u(x, z) = \bar{u}(x) + R_1 \bar{u}^{(2)} + R_0 \bar{w}^{(1)} + R_2 \bar{w}^{(3)} + R_3 \bar{w}^{(5)} + R_4 \bar{w}^{(7)}, \\ w(x, z) = \bar{w}(x) + T_1 \bar{u}^{(1)} + T_2 \bar{w}^{(2)} + T_3 \bar{w}^{(4)} + T_4 \bar{w}^{(6)}, \end{cases} \quad (3)$$

式中 $R_0, R_1, \dots, R_4, T_1, T_2, T_3, T_4$ 均为 z 的函数,上标中的数字表示对 x 的求导次数.

假设 \bar{u} 和 \bar{w} 为板的中面位移,利用文献[12]中的式(21)和(41)可以获得 FGM 板处于柱面弯曲状态时的控制方程:

$$\kappa_1 \bar{u}^{(2)} + \kappa_2 \bar{w}^{(3)} + \kappa_3 \bar{w}^{(5)} + \kappa_4 \bar{w}^{(7)} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{w}^{(4)} = -\frac{p(x)}{S_1(h/2)} + \frac{S_{21}}{S_1(h/2)} p^{(2)}(x), \quad (5)$$

式中 $S_{21} = S_2(h/2)/S_1(h/2)$, $\kappa_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为任意常数, 以及

$$S_1(z) = c_{33}T'_3 + c_{13}\left(R_2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}R_1\right), S_2(z) = c_{33}T'_4 + c_{13}\left(R_3 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1}R_1\right). \quad (6)$$

假设板的上下表面均无剪应力作用, 在板上表面受分布荷载 $p(x)$ 作用, 即在 $z = h/2$ 处, $\sigma_{zz} = -p(x)$, $\tau_{xz} = 0$; 在 $z = -h/2$ 处, $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = 0$. 利用上述应力边界条件可以确定函数 $R_j (j = 0, 1, \dots, 4)$ 和 $T_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 的表达式 (参见 Yang 等^[12]).

令 $p^{(4)}(x) = 0$, 因此分布荷载 $p(x)$ 可展开为如下形式:

$$p(x) = q_1 + q_2x + q_3x^2 + q_4x^3, \quad (7)$$

式中 q_1, q_2, q_3, q_4 为已知常数.

式(7)表明荷载 $p(x)$ 为不同荷载的组合. 接下来将分别考虑每个荷载的响应.

1.1 均布荷载 q_1

取 $p(x) = q_1$, 由式(5)可得

$$\bar{w}^{(4)} = -\frac{q_1}{S_1(h/2)} = f_1. \quad (8)$$

积分式(8)可得

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{24}f_1x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4, \quad (9)$$

式中 C_1, C_2, C_3 和 C_4 为待定常数. 将式(9)代入式(4)并积分可得

$$\bar{u}(x) = -\frac{\kappa_2}{6\kappa_1}f_1x^3 - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1}C_1x^2 + C_5x + C_6, \quad (10)$$

式中 C_5 和 C_6 为待定常数. 由于 $f_1 = \kappa_4$ 及 $\kappa_3 = -\kappa_2\kappa_4/\kappa_1$, 可以发现式(9)和(10)的板中面位移表达式与文献[10]中完全一致.

1.2 荷载 q_2x

令 $p(x) = q_2x$, 由式(5)可得

$$\bar{w}^{(4)} = -\frac{q_2}{S_1(h/2)}x = f_2x. \quad (11)$$

积分式(11)可得

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{120}f_2x^5 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4. \quad (12)$$

将式(12)代入式(4)并积分可得

$$\bar{u}(x) = -\frac{\kappa_2}{24\kappa_1}f_2x^4 - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1}C_1x^2 - \frac{\kappa_3}{2\kappa_1}f_2x^2 + C_5x + C_6. \quad (13)$$

1.3 荷载 q_3x^2

令 $p(x) = q_3x^2$, 由式(5)可得

$$\bar{w}^{(4)} = -\frac{q_3}{S_1(h/2)}x^2 + \frac{2S_{21}}{S_1(h/2)}q_3 = f_3x^2 + f_4. \quad (14)$$

积分式(14)可得

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{360}f_3x^6 + \frac{1}{24}f_4x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4. \quad (15)$$

将式(15)代入式(4)并积分可得

$$\bar{u}(x) = -\frac{\kappa_2}{60\kappa_1} f_3 x^5 - \frac{\kappa_2}{6\kappa_1} f_4 x^3 - \frac{\kappa_3}{3\kappa_1} f_3 x^3 - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} C x^2 + C_5 x + C_6. \quad (16)$$

1.4 荷载 $q_4 x^3$

令 $p(x) = q_4 x^3$, 由式(5)可得

$$\bar{w}^{(4)} = -\frac{q_4}{S_1(h/2)} x^3 + \frac{6S_{21}}{S_1(h/2)} q_4 x = f_5 x^3 + f_6 x. \quad (17)$$

积分式(17)可得

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{840} f_5 x^7 + \frac{1}{120} f_6 x^5 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad (18)$$

将式(18)代入式(4)并积分可得

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) = & -\frac{\kappa_2}{120\kappa_1} f_5 x^6 - \frac{\kappa_2}{24\kappa_1} f_6 x^4 - \frac{\kappa_3}{4\kappa_1} f_5 x^4 - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} C_1 x^2 - \\ & \frac{1}{2\kappa_1} (\kappa_3 f_6 + 6\kappa_4 f_5) x^2 + C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (19)$$

2 轴力、弯矩、剪力和柱面边界条件

利用应力表达式(2), 可得到板的轴力 N_x 、弯矩 M_x 和剪力 Q_x 的表达式

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = N_1 \bar{u}^{(1)} + N_3 \bar{w}^{(2)} + N_5 \bar{u}^{(3)} + N_7 \bar{w}^{(4)} + N_9 \bar{w}^{(6)}, \quad (20)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = M_1 \bar{u}^{(1)} + M_3 \bar{w}^{(2)} + M_5 \bar{u}^{(3)} + M_7 \bar{w}^{(4)} + M_9 \bar{w}^{(6)}, \quad (21)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = Q_1 \bar{u}^{(2)} + Q_2 \bar{w}^{(3)} + Q_3 \bar{u}^{(5)} + Q_4 \bar{w}^{(7)}, \quad (22)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + c_{13} T_1') dz, \quad N_3 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_0 + c_{13} T_2') dz, \\ N_5 &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} R_1 dz, \quad N_7 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_2 + c_{13} T_3') dz, \\ N_9 &= \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_3 + c_{13} T_4') dz, \quad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + c_{13} T_1') z dz, \\ M_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_0 + c_{13} T_2') z dz, \quad M_5 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} R_1 z dz, \\ M_7 &= \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_2 + c_{13} T_3') z dz, \quad M_9 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} R_3 + c_{13} T_4') z dz, \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (R_1' + T_1) dz, \quad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (R_2' + T_2) dz, \\ Q_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (R_3' + T_3) dz, \quad Q_4 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (R_4' + T_4) dz. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

现考虑3种典型的板柱面边界条件, 分别为简支(S), 固支(C)和自由(F), 即

$$S: \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad M_x = 0, \quad (24)$$

$$C: \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{w}_{,x} = 0, \quad (25)$$

$$F: \quad N_x = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_x = 0. \quad (26)$$

利用式(24)~(26)可以组合得到4种不同柱面边界条件的FGM板,即S-S,C-C,S-C及C-F.4种类型板中任意一个板均可以建立6个边界条件方程,联立求解确定6个待定常数 $C_i(i=1,2,\dots,6)$.最终可以获得不同荷载作用下FGM板中任意位置处的位移和应力分量表达式.

3 数值算例

方便起见,现引入如下无量纲量:

$$\bar{W} = 10^4 \bar{w}/h, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x/q_3, \quad \bar{\tau}_{zx} = \tau_{zx}/q_3.$$

考虑1个处于柱面弯曲状态的功能梯度板,上表面受荷载 $q_3 x^2$ 作用.取 $q_3 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, $l = 1 \text{ m}$,假设材料参数沿板的厚度方向按如下幂律模式变化^[1,12-13]:

$$c_{ij} = c_{ij}^{0(A)} (0.5 - z/h)^\lambda + c_{ij}^{0(S)} [1 - (0.5 - z/h)^\lambda] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (27)$$

式中 $c_{ij}^{0(A)}$ 表示在 $z = -h/2$ 处铝(aluminum)的弹性常数, $c_{ij}^{0(S)}$ 表示在 $z = h/2$ 处碳化硅(silicon carbide)的弹性常数,见表1所示. λ 为材料的梯度因子,反映材料的非均匀程度.显然,当 $\lambda = 0$ 时对应为均匀材料.

表1 两种材料的弹性常数(单位:GPa)

Table 1 Elastic constants of 2 isotropic materials(unit: GPa)

material	c_{11}	c_{13}	c_{33}	c_{55}
aluminum	94.23	40.38	94.23	26.92
silicon carbide	565.38	242.31	565.38	161.54

表2 在 $x = l/2$ 处的无量纲挠度 \bar{W}

Table 2 Dimensionless deflection \bar{W} at $x = l/2$

λ	boundary condition			
	S-S	C-C	S-C	C-F
0	-12.545 4	-2.182 0	-5.850 0	-74.934 7
1	-3.709 8	-0.754 7	-1.944 3	-25.801 7
2	-3.190 3	-0.624 7	-1.612 0	-21.298 6
3	-2.973 6	-0.564 8	-1.464 4	-19.245 5
4	-2.839 1	-0.528 4	-1.376 0	-18.010 0
5	-2.742 6	-0.503 6	-1.315 7	-17.169 1
10	-2.488 3	-0.443 8	-1.171 0	-15.161 8
20	-2.313 3	-0.406 9	-1.081 3	-13.930 7

图2给出了 λ 取不同值时,材料常数 c_{11} 沿板厚度方向的变化规律.显然,当 $\lambda = 0$ 时对应为均匀材料(铝)板;当 $\lambda > 0$ 时,对应为FGM板,此时材料属性从板底部($z = -h/2$)由铝连续变化到板上部($z = h/2$)的碳化硅.

表2给出了在 $x = l/2$ 处,当 $h/l = 0.15$ 时,对应不同 λ 及边界条件的无量纲挠度 \bar{W} .结果表明, \bar{W} 随着 λ 的增大而减小,这是因为FGM板的刚度随着 λ 增大而增大.另外,在所有4种边界条件中,C-F和C-C板的 \bar{W} 分别为最大值和最小值.

图3给出了S-S FGM板中无量纲挠度 \bar{W} 沿 x 方向随 λ 变化的规律, $h/l = 0.15$.可以发现, \bar{W} 具有抛物线分布特征,在 $x = l/2$ 有最大值.

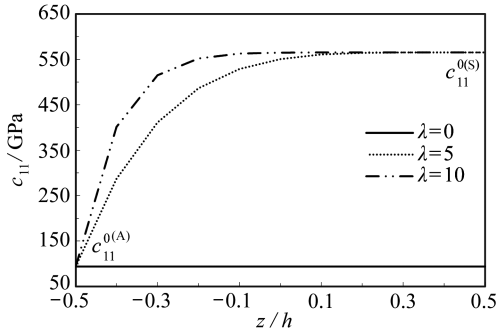


图2 弹性常数 c_{11} 沿板厚方向随 λ 变化

Fig. 2 Variation of elastic constant c_{11} along the thickness vs. λ

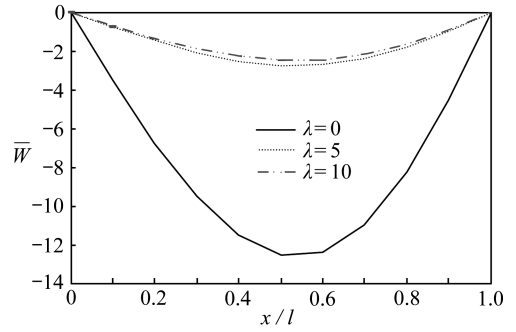


图3 S-S FGM 板中无量纲挠度 \bar{W} 沿 x 方向随 λ 变化

Fig. 3 Dimensionless deflection \bar{W} along direction x of the S-S FGM plate vs. λ

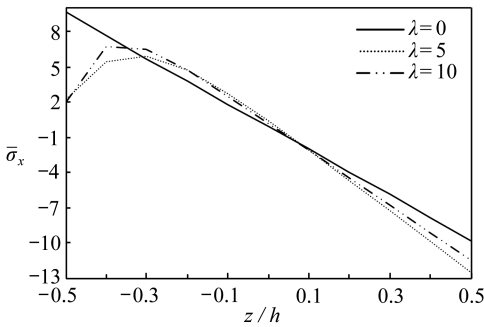


图4 S-S FGM 板中无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$ 沿厚度方向随 λ 变化

Fig. 4 Dimensionless normal stress $\bar{\sigma}_x$ along the thickness direction of the S-S FGM plate vs. λ

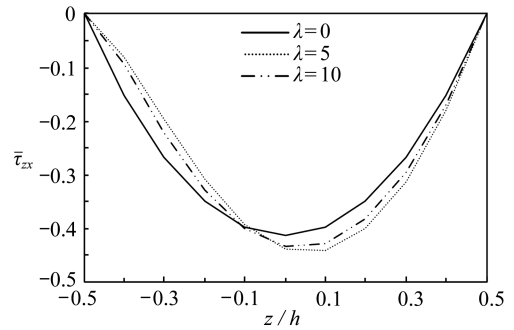


图5 S-S FGM 板中无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 沿厚度方向随 λ 变化

Fig. 5 Dimensionless shear stress $\bar{\tau}_{xz}$ along the thickness direction of the S-S FGM plate vs. λ

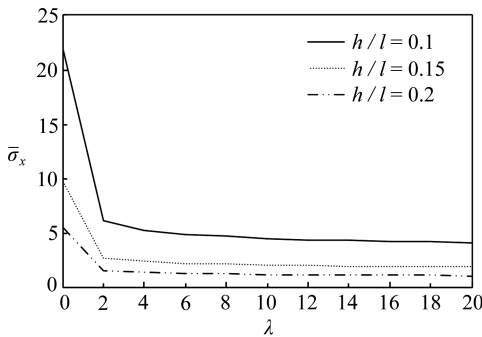


图6 S-S FGM 板中无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$ 随 h/l 变化

Fig. 6 Dimensionless normal stress $\bar{\sigma}_x$ of the S-S FGM plate vs. h/l

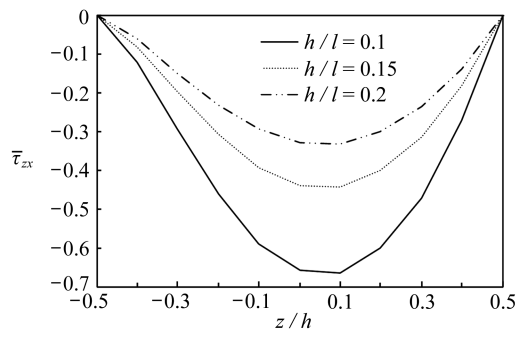


图7 S-S FGM 板中无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 沿板厚方向随 h/l 变化

Fig. 7 Dimensionless shear stress $\bar{\tau}_{xz}$ along the thickness direction of the S-S FGM plate vs. h/l

图4给出了S-S FGM板在 $x = l/2$ 处无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$ 沿板厚度方向随 λ 变化的变化规律, $h/l = 0.15$. 可以发现, 当 $\lambda = 0$ 时, $\bar{\sigma}_x$ 基本呈线性分布. 当 $\lambda = 5$ 或 10 时, $\bar{\sigma}_x$ 不再呈线性分布, 此时最大压应力出现在板上表面处 ($z = h/2$); 拉应力随着 λ 的增大逐渐向板下表面 ($z = -h/2$)

靠近。

图 5 给出了 S-S FGM 板在 $x = l/2$ 处无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{zx}$ 沿板厚度方向随 λ 变化的规律, $h/l = 0.15$ 。可以发现, 当 $\lambda = 0$ 时, $\bar{\tau}_{zx}$ 基本呈抛物线分布, 最大值出现在 $z = 0$ 处, 符合经典板理论中关于剪应力 $\bar{\tau}_{zx}$ 分布的假定。当 $\lambda = 5$ 或 10 时, $\bar{\tau}_{zx}$ 不再呈抛物线分布, 此时最大剪应力向板上表面 ($z = h/2$) 方向偏移。

图 6 给出了 S-S FGM 板在 $x = l/2, z = -h/2$ 处无量纲正应力 $\bar{\sigma}_x$ 随 λ 和板厚跨比 h/l 变化的规律。可以发现, $\bar{\sigma}_x$ 随着 λ 或 h/l 的增大而减小。当 $\lambda < 2$ 时, 减小的幅度较大; 当 $\lambda > 2$ 时, 减小的幅度会逐渐放缓。

图 7 给出了 S-S FGM 板在 $x = l/2$ 处无量纲剪应力 $\bar{\tau}_{zx}$ 沿板厚方向随板厚跨比 h/l 变化的规律, $\lambda = 5$ 。可以发现, $\bar{\tau}_{zx}$ 最大值出现在板中面附近并且随着 h/l 的增大而减小。

4 结 论

本文利用 England-Spencer 板理论研究了 FGM 板在横向分布荷载作用下的柱面弯曲问题。材料参数沿厚度方向可以任意变化。最终分别给出了荷载 $q_1, q_2x, q_3x^2, q_4x^3$ 作用下 FGM 板柱面弯曲问题的弹性力学解。数值结果表明, 板的柱面边界条件、材料梯度因子和厚跨比对处于柱面弯曲的 FGM 板具有显著的影响。因此, 可以在工程应用中通过调整上述影响因素进而对 FGM 柱面弯曲板予以优化设计。

本文给出的解析解精确满足弹性力学的全部方程及上下板表面的边界条件, 只是在板的柱面边界上, 采用 Saint-Venant (圣维南) 原理对边界条件予以放松。因此, 可用以评价在同类板分析中采用的各种近似的弹性板理论以及各种数值解法。

致谢 本文得到了浙江理工大学科研创新团队专项资助及浙江省科技厅公益技术研究社会发展项目资助 (2015C33017), 特此感谢。

参考文献 (References):

- [1] Li X Y, Ding H J, Chen W Q. Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(1): 191-210.
- [2] Woodward B, Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates [J]. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2011, **30**(5): 705-718.
- [3] WANG Yun, XU Rong-qiao, DING Hao-jiang. Three-dimensional solution of axisymmetric bending of functionally graded circular plates [J]. *Composite Structures*, 2010, **92**(7): 1683-1693.
- [4] Birman V, Byrd L W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures [J]. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 2007, **60**(5): 195-216.
- [5] Timoshenko S P, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells* [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [6] Bian Z G, Chen W Q, Lim C W, Zhang N. Analytical solutions for single- and multi-span functionally graded plates in cylindrical bending [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(24/25): 6433-6456.
- [7] Navazi H M, Haddadpour H, Rasekh M. An analytical solution for nonlinear cylindrical ben-

- ding of functionally graded plates[J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, **44**(11): 1129-1137.
- [8] Kaci A, Bakhti K, Hebali H, Tounsi A. Mathematical solution for nonlinear cylindrical bending of sigmoid functionally graded plates[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, **54**(1): 124-131.
- [9] Mian M A, Spencer A J M. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(12): 2283-2295.
- [10] 杨博, 丁皓江, 陈伟球. 功能梯度板柱面弯曲的弹性力学解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(8): 905-910. (YANG Bo, DING Hao-jiang, CHEN Wei-qiu. Elasticity solutions for functionally graded plates in cylindrical bending[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(8): 905-910. (in Chinese))
- [11] England A H. Bending solutions for inhomogeneous and laminated elastic plates[J]. *Journal of Elasticity*, 2006, **82**(2): 129-173.
- [12] Yang B, Ding H J, Chen W Q. Elasticity solutions for functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(1): 488-503.
- [13] Yang B, Chen W Q, Ding H J. Elasticity solutions for functionally graded annular plates subject to biharmonic loads[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, **84**(1): 51-65.

Elasticity Solutions for Cylindrical Bending of Functionally Graded Plates

YANG Yun-fang¹, YANG Bo¹, CHEN Wei-qiu², DING Hao-jiang³

(1. *Department of Civil Engineering, School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, P.R.China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P.R.China;*

3. *Department of Civil Engineering, College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P.R.China)*

(Contributed by CHEN Wei-qiu, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The cylindrical bending of functionally graded rectangular plates under different loads was studied based on a generalization of the England-Spencer theory. The expansion formulae for displacements and the assumption that the material parameters can vary along the thickness direction in an arbitrary fashion were adopted. The elasticity solutions were obtained for an orthotropic functionally graded plate in cylindrical bending with an infinite length in y -direction. The effects of the boundary conditions, the material gradient and the thickness-to-span ratio on the static responses of the functionally graded plates were investigated through a numerical example. The proposed solutions are useful for the validation of various numerical methods or approximate plate theories.

Key words: functionally graded plate; cylindrical bending; elasticity solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202188;11172263)