

线性定常系统非齐次两点边值问题的扩展精细积分方法^{*}

谭述君¹, 周文雅², 吴志刚^{1,2}

(1. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116024;

2. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(我刊编委钟万勰推荐)

摘要: 提出了一种求解非齐次线性两点边值问题的高精度和高稳定的扩展精细积分方法(EPIM).首先引入了区段量(即区段矩阵和区段向量)来离散非齐次线性微分方程,建立了非齐次两点边值问题基于区段量的求解框架.在该框架下,不同区段的区段量可以并行计算,整体代数方程组的集成不依赖于边界条件.然后引入区段响应矩阵来处理两点边值问题的非齐次项,导出了多项式函数、指数函数、正/余弦函数及其组合函数形式的非齐次项对应的区段响应矩阵的加法定理,结合增量存储技术提出了EPIM.对具有上述函数形式的非齐次项,该方法可以得到计算机上的精确解,一般形式的非齐次项则利用上述函数近似求解.最后通过两个具有刚性特征的数值算例验证了该方法的高精度和高稳定性.

关键词: 两点边值问题; 非齐次项; 响应矩阵; 精细积分方法; 加法定理

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.11.003

引 言

两点边值问题广泛地存在于科学和工程的重要领域,包括热传导、化学反应模型、扩散以及最优控制和滤波问题的求解等^[1-2].两点边值问题的解更为复杂,可能存在一个解、多个解或者没有解,因此两点边值问题的数值计算方法的研究非常重要^[3].目前学者们已经发展了许多有效方法,例如打靶法^[4]、有限元和有限体积分法^[5]、扩展的Adomian分解方法^[6]、Legendre多项式函数近似方法^[7]和半扫描迭代方法^[8]等,这些工作有效促进了两点边值问题计算方法的研究.这些方法基于传统的差分技术进行离散,简便易行,精度也会随着差分步长减小而不断提高,但计算量的增加往往也是显著的,同时对于刚性问题还会出现算法稳定性问题.

Zhong等^[9]首先提出了线性结构动力方程初值问题的精细积分方法,并应用于求解线性Hamilton系统的齐次两点边值问题及其相关的矩阵Riccati方程^[10],以及最优控制和滤波等领

* 收稿日期: 2015-06-16; 修订日期: 2015-10-08

基金项目: 国家自然科学基金(11002032;11372056;11432010);教育部博士点专项基金(20110041130001)

作者简介: 谭述君(1979—),男,山东潍坊人,讲师,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: tansj@dlut.edu.cn).

域^[11].对于非齐次两点边值问题,Chen 等^[12]通过增维方法将非齐次方程转化为齐次方程,发展了增维的矩阵指数方法和 Riccati 方法;富明慧等^[13]和 Zhang 等^[14]则基于区段传递矩阵的描述关系,提出了基于精细积分的循环约化求解方法.然而增维方法将导致计算量增加,甚至会改变原系统结构和定常特性从而影响求解精度.另外,上述基于传递矩阵的方法本质上属于初参数方法,对于系统同时含有增长模态和衰减模态的情况存在数值溢出的潜在危险^[2].

本文将 Zhong 等^[9]针对 Hamilton 系统齐次两点边值问题提出的精细积分法,推广到一般形式线性定常系统的非齐次两点边值问题的求解,提出了处理非齐次项的扩展精细积分方法^[15].首先基于区段量(区段矩阵和向量)建立了求解非齐次两点边值问题的求解框架,该方法具有很高的并行性和处理边界条件的灵活性;然后借鉴文献[16]处理初值问题非齐次项的方法,提出了计算区段量的扩展精细积分方法,对于具有多项式函数、指数函数、正/余弦函数及其组合函数形式的非齐次项,可以给出计算机上的精确解;对于一般形式的非齐次项则可通过上述函数的近似得到.最后通过两个数值算例验证了算法的精度和稳定性.

1 问题描述

非齐次线性定常系统的两点边值问题可以描述为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p} + \mathbf{f}_q, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{C}\mathbf{p} + \mathbf{f}_p, \quad (2)$$

其中, \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 分别是 n_q 和 n_p 维的向量, $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 是具有相容维数的定常矩阵, \mathbf{f}_q 和 \mathbf{f}_p 分别是 n_q 和 n_p 维的非齐次项向量.式(1)和(2)描述的非齐次线性系统需要补充 $n(n = n_q + n_p)$ 个边界条件才能进行求解,对于两点边值问题则是在 t_0, t_f 两端给定,例如

$$\mathbf{q}(t = t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{p}(t = t_f) = \mathbf{p}_f. \quad (3)$$

当然边界条件的形式是多样的.本文以上述标准形式进行研究,其方法可以方便地应用于其他形式的边界条件.

可以看出,本文研究的非齐次两点边值问题具有一般性, \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 的维数可以不相等,而且系统矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 只需要满足维数相容条件,并不局限于 Hamilton 系统.

2 基于区段量的求解框架

2.1 利用区段量进行离散

由于式(1)~(3)是线性系统,因此任意区段 $[t_a, t_b]$ 两端的的状态 $\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a$ 和 $\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_b$ 之间是线性关系,可以描述为

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{F}(t_a, t_b)\mathbf{q}_a + \mathbf{G}(t_a, t_b)\mathbf{p}_b + \mathbf{r}_q(t_a, t_b), \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_a = -\mathbf{Q}(t_a, t_b)\mathbf{q}_a + \mathbf{E}(t_a, t_b)\mathbf{p}_b + \mathbf{r}_p(t_a, t_b), \quad (5)$$

其中, $\mathbf{Q}(t_a, t_b), \mathbf{G}(t_a, t_b), \mathbf{F}(t_a, t_b), \mathbf{E}(t_a, t_b)$ 是连续系统 $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 在区段 $[t_a, t_b]$ 上的离散化区段矩阵, $\mathbf{r}_q(t_a, t_b), \mathbf{r}_p(t_a, t_b)$ 则是非齐次项 $\mathbf{f}_q, \mathbf{f}_p$ 在区段 $[t_a, t_b]$ 上的离散化区段向量.上面描述也适合于线性时变系统.为了描述上的方便,在下文不易混淆的地方采用 $\mathbf{Q}, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p$ 来表示 $\mathbf{Q}(t_a, t_b), \mathbf{G}(t_a, t_b), \mathbf{F}(t_a, t_b), \mathbf{E}(t_a, t_b), \mathbf{r}_q(t_a, t_b), \mathbf{r}_p(t_a, t_b)$, 但要注意它们是区段量.

离散化区段量 $\mathbf{Q}(t_a, t_b), \mathbf{G}(t_a, t_b), \mathbf{F}(t_a, t_b), \mathbf{E}(t_a, t_b)$ 和 $\mathbf{r}_q(t_a, t_b), \mathbf{r}_p(t_a, t_b)$ 与连续系统的 $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{f}_q, \mathbf{f}_p$ 之间是对应的,下面的微分方程揭示了它们之间的联系^[11]:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t_a, t)}{\partial t} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{F}, \quad (6)$$

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_2 + \mathbf{F}_2(\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{E}_2, \quad (17)$$

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{E}_1(\mathbf{I}_p + \mathbf{Q}_2\mathbf{G}_1)^{-1}\mathbf{Q}_2\mathbf{F}_1, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_2(\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}\mathbf{F}_1, \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_1(\mathbf{I}_p + \mathbf{Q}_2\mathbf{G}_1)^{-1}\mathbf{E}_2, \quad (20)$$

$$\mathbf{r}_{q,c} = \mathbf{r}_{q,2} + \mathbf{F}_2(\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}(\mathbf{r}_{q,1} + \mathbf{G}_1\mathbf{r}_{p,2}), \quad (21)$$

$$\mathbf{r}_{p,c} = \mathbf{r}_{p,1} + \mathbf{E}_1(\mathbf{I}_p + \mathbf{Q}_2\mathbf{G}_1)^{-1}(\mathbf{r}_{p,2} - \mathbf{Q}_2\mathbf{r}_{q,1}). \quad (22)$$

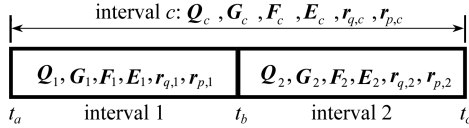


图1 相连的两个区段的合并

Fig. 1 Combination of 2 adjacent intervals

3.2 区段矩阵的精细积分方法

对于定常系统,区段传递只与区段长度有关,因此相邻等区段的区段矩阵是相等的,即

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\tau, 2\tau) = \mathbf{Q}(0, \tau), \mathbf{G}(\tau, 2\tau) = \mathbf{G}(0, \tau), \\ \mathbf{E}(\tau, 2\tau) = \mathbf{E}(0, \tau), \mathbf{F}(\tau, 2\tau) = \mathbf{F}(0, \tau). \end{cases} \quad (23)$$

因此,将式(23)代入式(17)~(20),即可由 $[0, \tau]$ 的区段矩阵得到 $[0, 2\tau]$ 区段的矩阵,这就是区段矩阵的加法定理^[17],也称之为倍加公式。

加法定理使得我们可以通过增加基本区段的精细划分来提高数值精度.将基本区段 η 划分为 2^{N_0} 份,得到精细区段 τ :

$$\tau = \eta/2^{N_0}, \quad (24)$$

其中 N_0 为加权参数,可以采用Zhong等^[9]的方案保守选取 $N_0 = 20$,也可以根据误差准则优化选取^[18-19].由于 τ 是非常精细的区段, $\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{G}(\tau), \mathbf{F}(\tau), \mathbf{E}(\tau)$ 的计算可以采用传统的近似方法求解,如Taylor级数近似、Padé近似等^[19].有了精细区段值 $\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{G}(\tau), \mathbf{F}(\tau), \mathbf{E}(\tau)$,理论上我们利用式(23)重复执行区段合并式(17)~(20) N_0 次就得到了基本区段的 $\mathbf{Q}(\eta), \mathbf{G}(\eta), \mathbf{F}(\eta), \mathbf{E}(\eta)$ 。

然而,值得注意的是当 τ 很小时, $\mathbf{F}(\tau)$ 和 $\mathbf{E}(\tau)$ 分别接近于单位阵 \mathbf{I}_q 和 \mathbf{I}_p ,直接应用式(19)和(20)计算 $\mathbf{F}(2\tau), \mathbf{E}(2\tau)$ 时,计算机的截断误差会对精度产生严重影响^[11, 19].对此,Zhong等^[9, 11]提出了增量存储技术,将 $\mathbf{F}(\tau)$ 和 $\mathbf{E}(\tau)$ 中的单位阵及其增量阵分别存储,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_q + \mathbf{F}', \mathbf{E} = \mathbf{I}_p + \mathbf{E}', \quad (25)$$

其中 \mathbf{F}' 和 \mathbf{E}' 分别是区段阵 \mathbf{F} 和 \mathbf{E} 的增量部分.将式(25)代入关于 \mathbf{F} 和 \mathbf{E} 的区段合并式(19)和(20),整理得到关于其增量 \mathbf{F}' 和 \mathbf{E}' 的合并公式,如下:

$$\mathbf{F}'_c = \mathbf{F}'_1 + (\mathbf{F}'_2 - \mathbf{F}_2\mathbf{G}_1(\mathbf{I}_p + \mathbf{Q}_2\mathbf{G}_1)^{-1}\mathbf{Q}_2)\mathbf{F}'_1, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}'_c = \mathbf{E}'_2 + (\mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}_1\mathbf{Q}_2(\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}\mathbf{G}_1)\mathbf{E}'_2. \quad (27)$$

增量存储技术避免了精细区段时计算机截断误差的影响,对于初始精细区段 τ 的区段阵 $\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{G}(\tau)$ 和 $\mathbf{F}'(\tau), \mathbf{E}'(\tau)$ 重复执行区段合并式(17)和(18)以及式(26)和(27) N_0 次,得到基本区段的区段阵 $\mathbf{Q}(\eta), \mathbf{G}(\eta), \mathbf{F}'(\eta), \mathbf{E}'(\eta)$,此时 $\mathbf{F}'(\eta), \mathbf{E}'(\eta)$ 已不是很小的量了,再执行 $\mathbf{F}(\eta) = \mathbf{I}_q + \mathbf{F}'(\eta)$ 和 $\mathbf{E}(\eta) = \mathbf{I}_p + \mathbf{E}'(\eta)$ 得到 $\mathbf{F}(\eta)$ 和 $\mathbf{E}(\eta)$ 。

3.3 区段向量的扩展精细积分方法

文献[16]针对动力初值问题提出了非齐次项响应矩阵的扩展精细积分方法,不但具有精

细积分法同样的高精度,更重要的是避免了系统矩阵的求逆运算,增强了算法稳定性并扩展了应用范围.本文将这套方法扩展应用于两点边值问题的非齐次项的处理.

3.3.1 非齐次项的处理和区段响应矩阵

不失一般性,非齐次项可以表述成下面形式:

$$\mathbf{f}_q(t) = \mathbf{X}_q \mathbf{f}_{q,s}(t), \mathbf{f}_p(t) = \mathbf{X}_p \mathbf{f}_{p,s}(t), \quad (28)$$

其中, $\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_p$ 可称之为非齐次项 $\mathbf{f}_{q,s}(t), \mathbf{f}_{p,s}(t)$ 的位置矩阵.例如在最优控制系统中,一般有 $\mathbf{f}_q(t) = \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t)$ 等,其中 \mathbf{B}_u 是控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 作用的位置矩阵^[2].

区段向量 $\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p$ 满足的微分方程(10)和(11)是线性系统,适用于叠加原理.因此,如果将一般形式的非齐次项 $\mathbf{f}_{q,s}(t), \mathbf{f}_{p,s}(t)$ 利用某些基函数进行展开(或近似),只要获得这些特殊基函数对应的响应矩阵,那么区段向量就可以由响应矩阵和展开系数组合得到,即

$$\mathbf{f}_{q,s}(t) = \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^0 \phi_0(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^1 \phi_1(t) + \dots, \quad (29)$$

其中, $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots$ 表示展开的基函数, $\tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^0, \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^1, \dots$ 则是 $\mathbf{f}_{q,s}(t)$ 的展开(近似)系数.将式(10)和(11)改写成基函数 $\phi(t)$ 的响应矩阵的微分方程:

$$\dot{\mathbf{R}}_{q,q}^\phi = (\mathbf{A} - \mathbf{GB})\mathbf{R}_{q,q}^\phi + \mathbf{X}_q \phi(t), \quad \mathbf{R}_{q,q}^\phi(0) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{p,q}^\phi = -\mathbf{EBR}_{p,q}^\phi, \quad \mathbf{R}_{p,q}^\phi(0) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

其中, $\mathbf{R}_{(\cdot),(\cdot)}^\phi$ 表示基函数产生的区段响应矩阵,第1个下标 q 或 p 与区段向量 \mathbf{r}_q 和 \mathbf{r}_p 的下标对应,第2个下标 q 或 p 与非齐次项 $\mathbf{f}_{q,s}$ 和 $\mathbf{f}_{p,s}$ 的下标对应,上标表示基函数的形式.因此, $\mathbf{R}_{q,q}^\phi$ 表示由 $\mathbf{f}_{q,s}(t)$ 的 $\phi(t)$ 产生的 \mathbf{r}_q 对应的响应矩阵.

基于区段响应矩阵,非齐次项 $\mathbf{f}_{q,s}(t)$ 产生的区段向量 \mathbf{r}_q 和 \mathbf{r}_p 可以由式(29)的展开系数组合得到

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{R}_{q,q}^{\phi_0} \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^0 + \mathbf{R}_{q,q}^{\phi_1} \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^1 + \dots, \quad (32)$$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{R}_{p,q}^{\phi_0} \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^0 + \mathbf{R}_{p,q}^{\phi_1} \tilde{\mathbf{f}}_{q,s}^1 + \dots. \quad (33)$$

因此,对于相同的基函数,等长度的区段响应矩阵只需计算一次.

同样,非齐次项 $\mathbf{f}_{p,s}(t)$ 对 $\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p$ 的贡献也可以由基函数响应矩阵得到,其响应矩阵满足如下微分方程:

$$\dot{\mathbf{R}}_{q,p}^\phi = (\mathbf{A} - \mathbf{GB})\mathbf{R}_{q,p}^\phi - \mathbf{GX}_p \phi(t), \quad \mathbf{R}_{q,p}^\phi(0) = \mathbf{0}, \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{p,p}^\phi = -\mathbf{E}(\mathbf{BR}_{p,p}^\phi + \mathbf{X}_p \phi(t)), \quad \mathbf{R}_{p,p}^\phi(0) = \mathbf{0}. \quad (35)$$

根据 $\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p$ 的区段合并式(21)和(22)得到区段响应矩阵的合并公式为

$$\mathbf{R}_{q,\cdot,c}^\phi = \mathbf{R}_{q,\cdot,2}^\phi + \mathbf{F}_2(\mathbf{I}_q + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_2)^{-1}(\mathbf{R}_{q,\cdot,1}^\phi + \mathbf{G}_1 \mathbf{R}_{p,\cdot,2}^\phi), \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_{p,\cdot,c}^\phi = \mathbf{R}_{p,\cdot,1}^\phi + \mathbf{E}_1(\mathbf{I}_p + \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}_1)^{-1}(\mathbf{R}_{p,\cdot,2}^\phi - \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_{q,\cdot,1}^\phi), \quad (37)$$

其中, \mathbf{R} 的第3个下标 $1, 2, c$ 分别表示相连的第1区段、第2区段和合并后的区段,第2个下标 (\cdot) 表示对 q 或 p 都成立.

可以看出,非齐次项处理的关键在于基函数对应的区段响应矩阵的计算.然而,与区段矩阵的性质(23)不同的是,由于基函数在相连区段 $[0, \tau]$ 和 $[0, 2\tau]$ 的值不同,必然导致两个相连等长区段的响应矩阵不同,因此,如何导出区段响应矩阵的加法定理是构造区段响应矩阵精细积分方法的难点.下面给出当基函数 $\phi(t)$ 为多项式函数、指数函数、正/余弦函数以及这些函数的组合形式时,产生的区段响应矩阵 $\mathbf{R}_{q,q}^\phi, \mathbf{R}_{p,q}^\phi$ 和 $\mathbf{R}_{q,p}^\phi, \mathbf{R}_{p,p}^\phi$ 的加法定理.

3.3.2 区段响应矩阵的加法定理

多项式函数、指数函数、正/余弦函数以及这些函数组合形式的基函数可以用下面两种形

式描述,即

$$\phi_n(t) = e^{\rho t} t^n, \quad (38)$$

$$\phi_{s,n}(t) = e^{\rho t} t^n \sin(\omega t), \quad \phi_{c,n}(t) = e^{\rho t} t^n \cos(\omega t), \quad (39)$$

其中, $n = 0, 1, 2, \dots$ 表示多项式的阶次, ρ 是指数函数的幂, ω 是正/余弦函数的角频率.

相连等长的区段响应矩阵 $\mathbf{R}(0, \tau)$ 和 $\mathbf{R}(\tau, 2\tau)$ 虽然不同,但式(30)和(31)以及式(34)和(35)表明, $\mathbf{R}_{q,q}^\phi, \mathbf{R}_{p,q}^\phi$ 和 $\mathbf{R}_{q,p}^\phi, \mathbf{R}_{p,p}^\phi$ 均满足线性微分方程,因此 $\mathbf{R}(0, \tau)$ 和 $\mathbf{R}(\tau, 2\tau)$ 之间的关系可以由非齐次项的基函数在区段 $[0, \tau]$ 和 $[\tau, 2\tau]$ 上的关系得到.

同时式(23)表明 $\mathbf{Q}, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{E}$ 在区段 $[0, \tau]$ 和 $[\tau, 2\tau]$ 上值是一样的,因此 $\mathbf{R}_{q,q}^\phi, \mathbf{R}_{p,q}^\phi$ 和 $\mathbf{R}_{q,p}^\phi, \mathbf{R}_{p,p}^\phi$ 在区段 $[0, \tau]$ 和 $[\tau, 2\tau]$ 的关系仅仅由基函数 $\phi(t)$ 决定,而与下标 q 和 p 无关.因此,可以用 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^\phi(0, \tau)$ 和 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^\phi(\tau, 2\tau)$ 之间的关系来统一描述 $\mathbf{R}_{q,q}^\phi, \mathbf{R}_{p,q}^\phi$ 和 $\mathbf{R}_{q,p}^\phi, \mathbf{R}_{p,p}^\phi$ 在相连等长区段上的关系.下面给出式(38)和(39)所示基函数作用下,相连等长区段的响应矩阵之间的关系.

情形 1 $\phi_n(t) = e^{\rho t} t^n$

当 $t \in [\tau, 2\tau]$ 时,做变量替换 $t = t_1 + \tau, t_1 \in [0, \tau]$, 得到

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \phi_n(t_1 + \tau) = \\ &e^{\rho\tau} (\tau^n \phi_0(t_1) + \tau^{n-1} C_n^1 \phi_1(t_1) + \tau^{n-2} C_n^2 \phi_2(t_1) + \dots + \phi_n(t_1)), \end{aligned} \quad (40)$$

其中 $C_n^k = n! / (k! (n-k)!)$ 是二项式展开系数,上面推导过程用到了二项式展开定理.

用 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{epn}}(t_a, t_b)$ 标记基函数 $\phi_n(t)$ 在区段 $[t_a, t_b]$ 上产生的区段响应矩阵.根据线性系统的叠加原理,有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{epn}}(\tau, 2\tau) &= e^{\rho\tau} (\tau^n \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep0}}(0, \tau) + \\ &\tau^{n-1} C_n^1 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep1}}(0, \tau) + \tau^{n-2} C_n^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep2}}(0, \tau) + \dots + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{epn}}(0, \tau)). \end{aligned} \quad (41)$$

为了使用上的方便,下面给出了 $n = 0, 1, 2$ 时 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{epn}}(\tau, 2\tau)$ 的具体表达式,即

$$\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep0}}(\tau, 2\tau) = e^{\rho\tau} \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep0}}(0, \tau), \quad (42)$$

$$\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep1}}(\tau, 2\tau) = e^{\rho\tau} (\tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep0}}(0, \tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep1}}(0, \tau)), \quad (43)$$

$$\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep2}}(\tau, 2\tau) = e^{\rho\tau} (\tau^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep0}}(0, \tau) + 2\tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep1}}(0, \tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{ep2}}(0, \tau)). \quad (44)$$

情形 2 $\phi_{s,n}(t) = e^{\rho t} t^n \sin(\omega t), \phi_{c,n}(t) = e^{\rho t} t^n \cos(\omega t)$

当 $t \in [\tau, 2\tau]$ 时,做变量替换 $t = t_1 + \tau, t_1 \in [0, \tau]$, 得到

$$\begin{cases} \phi_{s,n}(t) = \phi_{s,n}(t_1 + \tau) = e^{\rho\tau} (\sin(\omega\tau) \cdot \tilde{\phi}_{c,n}(t_1) + \cos(\omega\tau) \cdot \tilde{\phi}_{s,n}(t_1)), \\ \phi_{c,n}(t) = \phi_{c,n}(t_1 + \tau) = e^{\rho\tau} (\cos(\omega\tau) \cdot \tilde{\phi}_{c,n}(t_1) - \sin(\omega\tau) \cdot \tilde{\phi}_{s,n}(t_1)), \end{cases} \quad (45)$$

其中 $\tilde{\phi}_{s,n}(t_1), \tilde{\phi}_{c,n}(t_1)$ 表示如下:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{s,n}(t_1) = e^{\rho t_1} (t_1 + \tau)^n \sin(\omega t_1) = \\ \tau^n \phi_{s,0}(t_1) + \tau^{n-1} C_n^1 \phi_{s,1}(t_1) + \tau^{n-2} C_n^2 \phi_{s,2}(t_1) + \dots + \phi_{s,n}(t_1), \\ \tilde{\phi}_{c,n}(t_1) = e^{\rho t_1} (t_1 + \tau)^n \cos(\omega t_1) = \\ \tau^n \phi_{c,0}(t_1) + \tau^{n-1} C_n^1 \phi_{c,1}(t_1) + \tau^{n-2} C_n^2 \phi_{c,2}(t_1) + \dots + \phi_{c,n}(t_1). \end{cases} \quad (46)$$

上面的推导利用了二项式定理和弦函数的倍角公式.

用 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sepn}}$ 和 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cepn}}$ 分别标记基函数 $\phi_{s,n}(t)$ 和 $\phi_{c,n}(t)$ 在区段 $[t_a, t_b]$ 上产生的区段响应矩阵.根据线性系统叠加原理,可以得到区段 $[\tau, 2\tau]$ 的响应矩阵:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sepn}}(\tau, 2\tau) = e^{\rho\tau} (\sin(\omega\tau) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cepn}}(0, \tau) + \cos(\omega\tau) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sepn}}(0, \tau)), \\ \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cepn}}(\tau, 2\tau) = e^{\rho\tau} (\cos(\omega\tau) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cepn}}(0, \tau) - \sin(\omega\tau) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sepn}}(0, \tau)), \end{cases} \quad (47)$$

其中,引入了标记 $\tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}n}(0,\tau), \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}n}(0,\tau)$, 表示式(46)中 $\tilde{\Phi}_{s,n}(t_1), \tilde{\Phi}_{c,n}(t_1)$ 在 $t_1 \in [0,\tau]$ 的响应矩阵:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}n}(0,\tau) = \tau^n \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}0}(0,\tau) + \\ \quad \tau^{n-1} C_n^1 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}1}(0,\tau) + \tau^{n-2} C_n^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}2}(0,\tau) + \cdots + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}n}(0,\tau), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}n}(0,\tau) = \tau^n \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}0}(0,\tau) + \\ \quad \tau^{n-1} C_n^1 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}1}(0,\tau) + \tau^{n-2} C_n^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}2}(0,\tau) + \cdots + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}n}(0,\tau). \end{cases} \quad (48)$$

为了使用上的方便,下面给出了 $n=0,1,2$ 时 $\tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}n}(\tau,2\tau), \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}n}(\tau,2\tau)$ 的具体表达式,即

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}0}(0,\tau) = \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}0}(0,\tau), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}0}(0,\tau) = \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}0}(0,\tau), \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}1}(0,\tau) = \tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}0}(0,\tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}1}(0,\tau), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}1}(0,\tau) = \tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}0}(0,\tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}1}(0,\tau), \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}2}(0,\tau) = \tau^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}0}(0,\tau) + 2\tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}1}(0,\tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{sep}2}(0,\tau), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}2}(0,\tau) = \tau^2 \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}0}(0,\tau) + 2\tau \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}1}(0,\tau) + \mathbf{R}_{\cdot,\cdot}^{\text{cep}2}(0,\tau). \end{cases} \quad (51)$$

基于上述关系,由 $[0,\tau]$ 的区段响应矩阵 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot,1}^{\phi}$ 就可以得到 $[\tau,2\tau]$ 的区段响应矩阵 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot,2}^{\phi}$,然后利用区段合并式(36)和(37)就可以得到区段 $[0,2\tau]$ 的响应矩阵 $\mathbf{R}_{\cdot,\cdot,c}^{\phi}$,再执行区段矩阵的合并式(17)和(18)以及式(26)和(27) N_0 次,就得到基本区段 η 的区段响应矩阵了。

说明3 观察本文对非齐次项的基函数(多项式函数、正/余弦函数、指数函数及其组合函数)对应的区段响应矩阵加法定理的推导过程,可以发现只要基函数在平移区段上的形式不变,那么对应的区段响应矩阵加法定理就存在,而这种不变性可望通过群论从更深层次上来揭示。

4 算例

本节采用两个刚性算例来验证本文提出的扩展精细积分方法的高精度和稳定性。

算例1 采用文献[4]中的一个2维刚性问题,描述如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 998 & 1\ 998 \\ -999 & -1\ 999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t),$$

该问题系统矩阵具有两个相差很大的本征值, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1\ 000$,表现出很强的刚性特征。作为初值问题,当 $f(t)$ 为某些函数时可得到解析解 $\tilde{q}(t), \tilde{p}(t)$ 。我们将该问题转化为在区间 $[0,1]$ 上的两点边值问题,边界条件给定为

$$q(0) = \tilde{q}(t=0), p(1) = \tilde{p}(t=1).$$

采用本文提出的 EPIM 进行计算,并把计算结果与解析解进行比较。为了说明 EPIM 广泛的适用性,本文对下面6种函数形式 $f(t)$ 进行求解与比较:

- (a) $f(t) = 0$; (b) $f(t) = t$; (c) $f(t) = t^2$; (d) $f(t) = e^{-t}$;
 (e) $f(t) = (1+t) \cdot e^{-t}$; (f) $f(t) = (1+t) \cdot e^{-t} \cdot \sin(t)$ 。

表1给出了将整个区段 $[0,1]$ 划分成一个区段 ($\eta = 1.0$) 时得到两端未知状态 $q(t=1), p(t=0)$ 的数值解和解析解比较。可以看出,本文 EPIM 只需一步(大步长)就可以获得很高精度 (10^{-10} 以上)的计算结果,说明 EPIM 方法在算法精度和稳定性上的优势。图2~7给出了 $\eta = 0.1$ 时,针对不同形式的函数 $f(t)$ EPIM 得到的数值解和解析解的绝对误差的对数分布,绝对误差都小于 10^{-10} ,是高度精确的。

表 1 刚性问题的数值解

Table 1 Numerical solutions to the stiff problem

		analytical solutions	numerical solutions ($\eta = 1$)
case (a)	$\tilde{q}(t = 1)$	0.735 758 882 342 885	0.735 758 882 342 885
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-1.435 296 326 23E-012
case (b)	$\tilde{q}(t = 1)$	2.204 279 647 028 65	2.204 279 647 028 66
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-2.240 208 019 08E-012
case (c)	$\tilde{q}(t = 1)$	1.789 729 346 971 35	1.789 729 346 971 35
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-1.877 387 134 64E-012
case (d)	$\tilde{q}(t = 1)$	2.206 171 903 962 07	2.206 171 903 962 07
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-2.868 483 228 72E-012
case (e)	$\tilde{q}(t = 1)$	2.940 827 149 087 29	2.940 827 149 087 29
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-3.345 768 107 01E-012
case (f)	$\tilde{q}(t = 1)$	1.853 530 174 585 39	1.853 530 174 585 39
	$\tilde{p}(t = 0)$	0	-2.112 310 326 65E-012

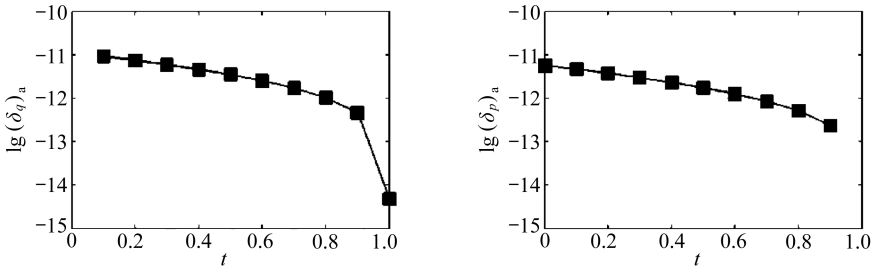


图 2 绝对误差的对数分布(对于函数形式(a))

Fig. 2 The logarithmic distributions of absolute errors for form (a)

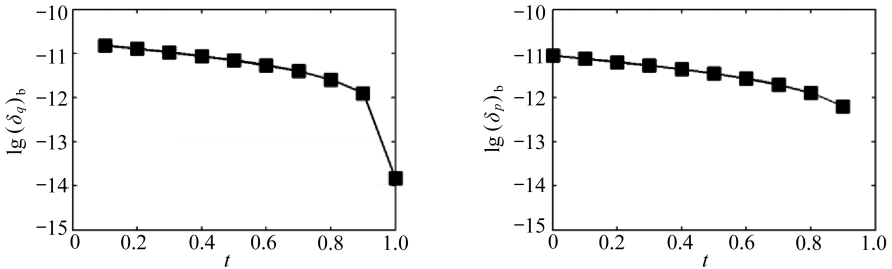


图 3 绝对误差的对数分布(对于函数形式(b))

Fig. 3 The logarithmic distributions of absolute errors for form (b)

算例 2 考虑文献[20]一个无限长时间的非齐次两点边值问题,表示为

$$-\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) = e^{-2t},$$

其中 $y(0) = 1.0, y(t_f = \infty) = 0.0$.

该问题的解析解为

$$y(t) = (e^{-(1+\sqrt{3})t} + e^{-2t})/2.$$

引入 $q = y(t), p = \dot{y}(t)$, 将方程改写为式(1)的形式,即

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}, q(0) = 1.0, q(\infty) = 0.0,$$

该线性系统具有正、负两个本征值 $-1 \pm \sqrt{3}$, 无论向哪个方向积分都存在数值溢出的危险. 对于 16 位精度的计算机而言, 当区段长度 $t_f - t_0 = 2^{10}$ 时, 状态传递矩阵 $\Phi(t_0, t_f)$ 的值就超出了计算机浮点数表示的范围, 因此采用状态传递矩阵的初参数法^[12] 会产生数值稳定性问题. 而本文提出的 EPIM 则不存在这个问题. 表 2 给出了采用 $t_f = 2$ 和 $t_f = 2^{10}$ 来近似无限长时间区段的数值结果与解析解的比较. 可以看出, 选用 $t_f = 2^{10}$ 来近似, 本文方法得到了几乎与解析解完全一致的结果, 不存在数值溢出问题. 图 8 给出了区段矩阵 $Q(t), G(t), F(t), E(t)$ 随区段长度增加的变化, 可见 $Q(t), G(t)$ 稳定收敛于常数, 而 $F(t), E(t)$ 稳定收敛于 0.

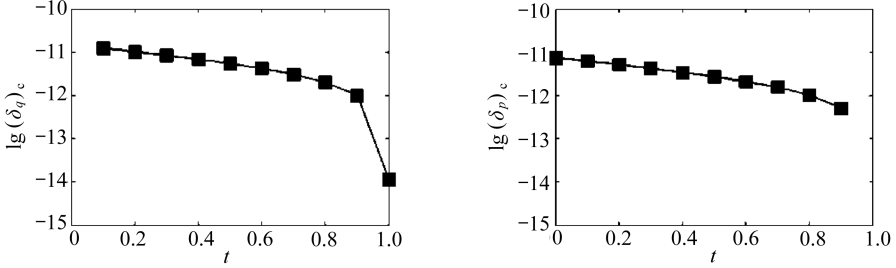


图 4 绝对误差的对数分布(对于函数形式(c))

Fig. 4 The logarithmic distributions of absolute errors for form (c)

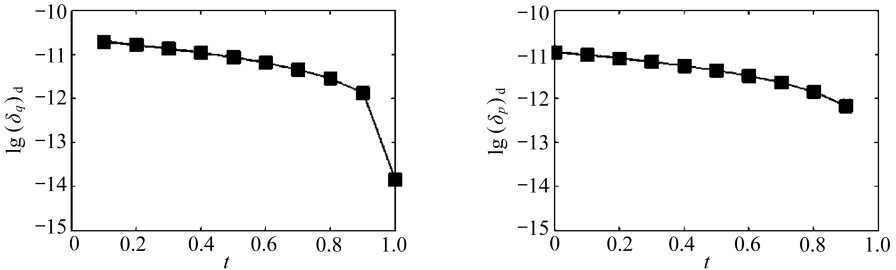


图 5 绝对误差的对数分布(对于函数形式(d))

Fig. 5 The logarithmic distributions of absolute errors for form (d)

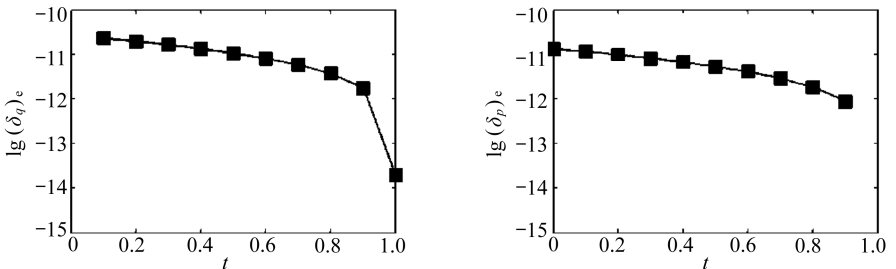


图 6 绝对误差的对数分布(对于函数形式(e))

Fig. 6 The logarithmic distributions of absolute errors for form (e)

表 2 取不同长度区段近似无限长区段的数值结果

Table 2 Numerical solutions approximated with finite intervals of different lengths

	analytical solutions	numerical solutions	
		$t_f = 2$	$t_f = 2^{10}$
$\dot{y}(0)$	-2.366 025 403 784 438	-2.375 068 475 799 152	-2.366 025 403 784 439
$\dot{y}(\infty)$	0	-3.239 515 418 743E-02	0

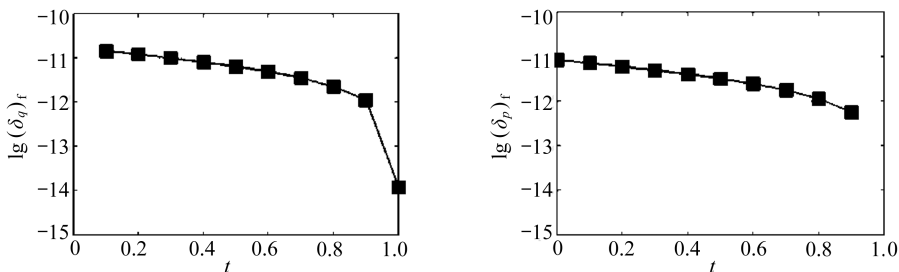


图7 绝对误差的对数分布(对于函数形式(t))

Fig. 7 The logarithmic distributions of absolute errors for form (f)

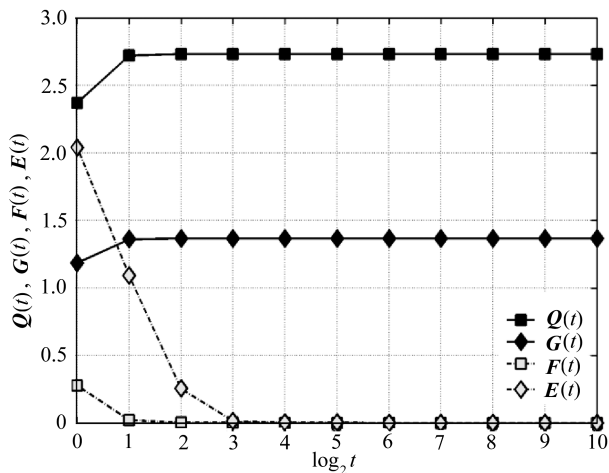


图8 区段矩阵的变化趋势(对于函数形式(t))

Fig. 8 Evolution of the interval matrices

5 结 论

非齐次线性两点边值问题在众多科学和工程领域都有重要应用,研究它的高精度算法是很有必要的.本文针对非齐次线性两点边值问题,建立了基于区段量的求解框架,并提出了计算区段量(特别是区段响应矩阵)的扩展精细积分方法.

在基于区段量的求解框架下,各个区段的区段量计算是完全独立的,可以并行运算;而且整体分析的代数方程组只需集成一次,从而可以大大简化研究不同边值条件对系统影响的计算流程.针对非齐次项产生的区段向量的计算,提出了基于区段响应矩阵的扩展精细积分方法.对于多项式函数、指数函数、正/余弦函数及其组合函数对应的区段响应矩阵,可以得到计算机精度的数值解.算例验证了本文的扩展精细积分方法是一种高精度和高稳定性的算法.本文的思路和方法还可以推广到线性时变系统两点边值问题的求解,而对于一类可以通过拟线性化处理的非线性系统边值问题,也有望在本文的框架下求解,这将作为后续的研究工作.

参考文献(References):

[1] Frank-Kamenetskii D A. *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*[M]. New York: Plenum Press, 1969.

[2] Bryson A E. *Applied Linear Optimal Control: Examples and Algorithms*[M]. Cambridge:

- Cambridge University Press, 2002.
- [3] Heath M T. *Scientific Computing: an Introductory Survey*[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [4] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, Flannery B P. *Numerical Recipes in C++*[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [5] Caglar H, Caglar N, Elfaituri K. B-spline interpolation compared with finite difference, finite element and finite volume methods which applied to two-point boundary value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 72-79.
- [6] Jang B. Two-point boundary value problems by the extended adomian decomposition method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **219**(1): 253-262.
- [7] Hoseini S M, Hoseini M, Orooji H. Numerical solution of two-point boundary value problem in linear differential equation[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2009, **3**(30): 1493-1499.
- [8] Fauzi N, Sulaiman J. Half-sweep modified successive over relaxation method for solving second order two-point boundary value problems using cubic spline[J]. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2012, **7**(32): 1579-1589.
- [9] ZHONG Wan-xie, Williams F W. A precise time step integration method[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1994, **208**(6): 427-430.
- [10] ZHONG Wan-xie. Combined method for the solution of asymmetric Riccati differential equations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **191**(1/2): 93-102.
- [11] ZHONG Wan-xie. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control*[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [12] CHEN Biao-song, TONG Li-yong, GU Yuan-xian. Precise time integration for linear two-point boundary value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 182-211.
- [13] 富明慧, 张文志, 薛申宁 S V. 求解奇异摄动边值问题的精细积分法[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(11): 1382-1392.(FU Ming-hui, ZHANG Wen-zhi, Sheshenin S V. Precise integration method for solving singular perturbation problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(11): 1382-1392.(in Chinese))
- [14] ZHANG Wen-zhi, HUANG Pei-yan. Precise integration method for a class of singular two-point boundary value problems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, **29**(2): 233-240.
- [15] 谭述君. 精细积分方法的改进及其在动力学与控制中的应用[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2009.(TAN Shu-jun. Improvement of precise integration method and its application in dynamics and control[D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2009.(in Chinese))
- [16] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. *力学学报*, 2007, **39**(3): 374-381.(TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Precise integration method for Duhamel terms arising from non-homogenous dynamic systems[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(3): 374-381.(in Chinese))
- [17] ZHONG Wan-xie. On precise integration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **163**(1): 59-78.
- [18] 谭述君, 吴志刚, 钟万勰. 矩阵指数精细积分方法中参数的自适应选择[J]. *力学学报*, 2009, **41**(6): 961-966.(TAN Shu-jun, WU Zhi-gang, ZHONG Wan-xie. Adaptive selection of parameters for precise computation of matrix exponential based on Padé approximation[J]. *Chinese*

- Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, **41**(6): 961-966. (in Chinese))
- [19] Moler C, Loan C V. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later[J]. *SIAM Review*, 2003, **45**(1): 3-49.
- [20] Ravi K A S V, Reddy Y N. A numerical method for solving two-point boundary value problems over infinite intervals[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **144**(2/3): 483-494.

An Extended Precise Integration Method for Solving Inhomogeneous Two-Point Boundary Value Problems of Linear Time-Invariant Systems

TAN Shu-jun¹, ZHOU Wen-ya², WU Zhi-gang^{1,2}

(1. *School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Recommended by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: An extended precise integration method (EPIM) for solving inhomogeneous two-point boundary value problems (TPBVPs) of linear time-invariant systems was proposed. Firstly, the interval quantities of the interval matrices and vectors were introduced to describe the discretization of the differential equations for the TPBVPs. Thus a general framework for solving the TPBVPs was established, where the interval quantities for different intervals were computed in parallel, and the assembled algebraic equations for global analysis were independent of the boundary conditions. Secondly the interval response matrices corresponding to the interval vectors were used to deal with the inhomogeneous terms. The addition theorems for the interval response matrices were derived with the inhomogeneous terms in the forms of polynomial function, sine/cosine function, exponential function and their combinations. Then the extended precise integration method was proposed in combination with the incremental storage technique, of which the accuracy approached the machine precision for the inhomogeneous terms in the above forms. The general forms of the inhomogeneous terms can be approximated with the mentioned forms. In comparison with the analytical methods, two numerical examples of stiff problems give results showing the high accuracy and stability of the proposed method.

Key words: two-point boundary problem; inhomogeneous term; response matrix; precise integration method; addition theorem

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11002032; 11372056; 11432010)