文章编号:1000-0887(2015)10-1095-12

关于向量优化问题的 Δ 函数标量化刻画的某些注记*

唐莉萍[1], 李 飞[2], 赵克全[3], 杨新民[3]

(1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067;
2. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021;
3. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 400047)

(我刊编委杨新民来稿)

摘要: 近期,夏远梅等(重庆师范大学(自然科学版), 2015, **32**(1): 12-15)利用 Δ 函数通过非线性标量化方法研究了向量优化问题的 ϵ- 真有效解并举例说明了主要结果.笔者指出:其定理 1 是 Gao 等(*Journal of Industrial and Management Optimization*, 2011, **7**(2): 483-496)建立的定理 4.6(i)的特例;其定理 2 的证明存在不足.通过研究一般的 (C, ε)- 真有效解的 Δ 函数非线性标量化,给出了定理 2 的严谨证明.最后,在 ϵ- 真有效解存在的情况下举例说明了主要结果.

关 键 词: 向量优化; 近似真有效解; Δ 函数; 非线性标量化
中图分类号: O221.6 **文献标志码**: A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.10.009

符 号 说 明

ε ——实数;
$\boldsymbol{\epsilon}$ ——向量;
$\mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon)$ ——向量优化问题(VP)关于 C 的 ε- 有效解集;
$\mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon)$ ——向量优化问题(VP)关于 C 的 ε- 真有效解集;
$\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{PE}(\boldsymbol{f}(S), K)$ ——向量优化问题(VP)的 $\boldsymbol{\epsilon}$- 真有效解集;
$\mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{y}), \theta)$ ——标量化问题 (P_y) 的 θ- 解集;
$\mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{y}), \theta)$—— 标量化问题$(P_y)$ 的严格 θ- 解集.

注 1 参考文献[1]中用 ϵ 表示实数,而本文使用 ε 表示实数,故我们在引用文献[1]时用的是 ε;参考文献[2-3]中用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示向量,而本文是用 $\boldsymbol{\epsilon}$ 表示向量,故本文在引用文献[2-3]时用的是 $\boldsymbol{\epsilon}$.

---

* **收稿日期**: 2015-01-14; **修订日期**: 2015-08-13
基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(11431004);国家自然科学基金(面上项目)(11271391;11201511;11301574);重庆市科委项目(cstc2014pt-sy00001)
作者简介: 唐莉萍(1985—),女,四川资中人,博士生(通讯作者. E-mail: tanglipings@163.com);
李飞(1981—),男,内蒙古巴彦淖儿人,讲师,博士生(E-mail: lifeimath@163.com);
赵克全(1979—),男,四川南充人,副教授,博士(E-mail: kequanz@163.com);
杨新民(1960—),男,四川泸州人,教授,博士生导师(E-mail: xmyang@cqnu.edu.cn).

引　　言

向量优化问题是一类重要的规划问题,它在医学、工程以及生物学等方面有着广泛应用,见文献[4-7].标量化是向量优化重要的研究主题之一,它在数值计算和对偶等方面有着重要的作用,见文献[8-10].标量化方法主要分为线性标量和非线性标量.在线性标量化方法的研究中,凸集分离定理和与其等价的“择一定理”起着关键的作用.故通常要求问题的目标函数和约束函数满足一定的(广义)凸性条件.由于大部分实际问题并不满足(广义)凸性条件假设,因此许多学者开始寻求一些具有较好性质的非线性标量化函数,从而给出向量优化问题的非线性标量化结果.常见的非线性标量化函数有:利用对偶锥定义的非线性标量化函数[4-5]、Δ 函数[11-12]和 Minkowski 型非线性标量化函数(Gerstewitz 泛函)[13-14].第一类非线性标量化函数是基于凸锥而言的;后两类非线性标量化函数是基于拓扑内部和拓扑闭包建立的.其中,Δ 函数比 Gerstewitz 泛函具有较好的分离性质.2003 年,Zaffaroni[15]利用 Δ 函数研究向量优化问题的(弱)有效解、严有效解、(局部)超有效解和紧真有效解的等价性刻画.

近年来,向量优化问题的近似解成为向量优化理论中的研究热点,这主要源于 3 个方面:1) 优化模型的建立通常是在对实际问题作出简化假设的基础上建立的;2) 在计算过程中,数值算法通常产生的是优化问题的近似解;3) 在非紧性条件下(弱)有效解一般不存在,而近似(弱)有效解在较弱的条件下可能存在.故,从理论和应用的角度,研究向量优化问题的近似解是有意义的.最先提出向量优化问题近似解概念的是 Kutateladze[1]和 Loridan[16].随后,White[17]基于数值优化问题的近似解和向量优化问题的有效解的思想,对向量优化问题提出了 6 种新的近似解的概念.Gutiérrez 等[18]利用 co-radiant 集定义了向量优化问题近似(弱)有效解 ((C,ε)-(弱)有效解)的概念,研究了其相关性质和非线性标量化特征,并说明以往研究的诸多近似解(如: Kutateladze[1], White[17], Helbig 等[19])都是它的特殊情况.最近,Δ 函数被用于研究向量优化问题近似(弱、真)有效解的最优性条件、Lagrange 乘子定理和对偶等方面的内容,参见文献[2,20-23].特别地,夏远梅等[2]利用 Δ 函数研究了 Rong, Ma(戎卫东和马毅)[3]定义的近似真有效解的充分和必要条件.

本文首先指出夏远梅等[2]建立的定理 1 是 Gao(高英)等[23]建立的定理 4.6(i)的特例,文献[2]中定理 2 的证明存在不足.本文在闭性条件下,证明了 (C,ε)-有效解是 (C,ε)-真有效解, 并通过建立 (C,ε)-有效解的 Δ 函数标量化结果给出了 (C,ε)-真有效解的刻画,进而得到文献[2]的定理 2;此外,本文给出文献[2]中定理 2 的另一严谨证明过程;最后,举例说明了主要结果.本文的结果是对文献[2],[20]和[23]相应结果的改进与完善.

1 基本概念

这部分主要介绍本文将用到的基本概念及相关性质.

设 R^n 是 n 维欧氏空间,X 是线性空间,Y 是赋范线性空间.设 $A\subseteq Y$. $\operatorname{int}A$, $\operatorname{cl}A$, ∂A 和 $Y\backslash A$ 分别表示 A 的拓扑内部、闭包、边界和补集.A 的锥包定义为 $\operatorname{cone}A=\{\lambda a: a\in A,\ \lambda\geqslant 0\}$, A 的正锥包定义为 $\operatorname{cone}_+A=\{\lambda a: a\in A,\ \lambda>0\}$.若 $\varnothing\neq A\neq Y$,则称集合 A 是真的;若 $A\cap(-A)\subseteq\{\mathbf{0}\}$,则称集合 A 是点的;如果对任意的 $d\in A$, $\alpha>1$, 都有 $\alpha d\in A$,则称 A 是一个 co-radiant 集.

不失一般性,全文假设 $C\subset Y$ 是点的、真的、凸 co-radiant 集, K 是 Y 中非空的点闭凸锥,ε

$\in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\epsilon} \in Y$.令

$$C(\varepsilon)=\varepsilon C,\ \forall \varepsilon>0;\ C(0)=\cup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)=\operatorname{cone}_{+} C .$$

考虑下面的向量优化问题:

$$(\mathrm{VP}) \quad \min_{\boldsymbol{x} \in S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{f}: X \rightarrow Y$, $\varnothing \neq S \subseteq X$.

定义 1[18] 设 $\varepsilon \geqslant 0$, $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$.如果

$$(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-C(\varepsilon)) \cap \boldsymbol{f}(S) \subset\{\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\},$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)关于 C 的 ε-有效解,简称为(C, ε)-有效解.问题(VP)的所有(C, ε)-有效解构成的集合记为 $\mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon)$.

由定义易知

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon) \Leftrightarrow(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap(-C(\varepsilon)) \subset\{\mathbf{0}\}.$$

定义 2[23] 设 $\varepsilon \geqslant 0$, $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$.如果

$$\operatorname{cl} \operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+C(\varepsilon)) \cap(-C(\varepsilon)) \subset\{\mathbf{0}\},$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)关于 C 的 ε-真有效解,简称为(C, ε)-真有效解.问题(VP)的(C, ε)-真有效解全体记为 $\mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon)$.

定义 3[3] 设 $\boldsymbol{\epsilon} \in K$.如果 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ 满足

$$\operatorname{cl} \operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap(-K)=\{\mathbf{0}\},$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的 $\boldsymbol{\epsilon}$-真有效解.问题(VP)的 $\boldsymbol{\epsilon}$-真有效解全体记为 $\boldsymbol{\epsilon}$-$\mathrm{PE}(\boldsymbol{f}(S), K)$.

注 2

(i) 由文献[23]的注 2(ii)知

$$\bar{x} \in \mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon) \Leftrightarrow \operatorname{cl} \operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+C(\varepsilon)) \cap(-C(0)) \subset\{\mathbf{0}\}.$$

(ii) 若 $\boldsymbol{\epsilon} \in K$, 则 $\boldsymbol{\epsilon}+K$ 是点的、真的、凸 co-radiant 集,且

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{PE}(\boldsymbol{f}(S), K) \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\epsilon}+K, 1).$$

设 A 是 Y 中的非空集合.函数 $\Delta_A: Y \rightarrow \mathbf{R} \cup\{ \pm \infty\}$ 定义为

$$\Delta_A(\boldsymbol{y})=d_A(\boldsymbol{y})-d_{Y \backslash A}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in Y,$$

其中 $d_A(\boldsymbol{y})=\inf_{\boldsymbol{z} \in A}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$,且记 $d_{\varnothing}(\boldsymbol{y})=+\infty$.

$\Delta_A(\cdot)$ 函数的提出最初是用于非光滑优化问题的几何性质及其最优性条件的研究(见文献[11-12]).由于 $\Delta_A(\cdot)$ 函数本身具有很好的分离性质(见引理 1),故许多学者利用 $\Delta_A(\cdot)$ 函数研究向量优化问题的(弱)有效解[15]和近似(真)有效解[20,23]的非线性标量化特征.

引理 1[15] 设 A 是 Y 中的非空真子集,则

(i) $\operatorname{int} A=\{\boldsymbol{y} \in Y: \Delta_A(\boldsymbol{y})<0\}$, $\operatorname{cl} A=\{\boldsymbol{y} \in Y: \Delta_A(\boldsymbol{y}) \leqslant 0\}$, $Y \backslash(\operatorname{cl} A)=\{\boldsymbol{y} \in Y: \Delta_A(\boldsymbol{y})>0\}$;

(ii) 若 A 是凸集,则 $\Delta_A(\cdot)$ 是凸函数;

(iii) 若 A 是锥,则 $\Delta_A(\cdot)$ 是正齐次函数.

本文考虑向量优化问题(VP)的非线性标量化问题:

$$(P_{\boldsymbol{y}}) \quad \min_{\boldsymbol{x} \in S} \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y} \in Y$, $\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})=d_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})-d_{Y \backslash(-K)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})$.

设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$, $\theta \in \mathbf{R}$:$\theta \geqslant 0$.若对任意的 $\boldsymbol{x} \in S$,$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}) \geqslant \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{y})-\theta$,则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$

为标量化问题(P_y)的θ-解;若对任意的$\boldsymbol{x} \in S \setminus \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$,$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}) > \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{y}) - \theta$,则称$\bar{\boldsymbol{x}}$为标量化问题($P_y$)的严格$\theta$-解,并分别记标量化问题($P_y$)的$\theta$-解集和严格$\theta$-解集为

$$\mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{y}), \theta), \ \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{y}), \theta).$$

2 主要结果

近期,夏远梅等[2]利用Δ函数对Rong,Ma(戎卫东和马毅)[3]定义的近似真有效解建立了以下结果:

定理1(见文献[2]中的定理1) 设$K \subset Y$是点闭凸锥,$\boldsymbol{\epsilon} \in K$,则

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S), K) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\boldsymbol{0})).$$

定理2(见文献[2]中的定理2) 设$K \subset Y$是点闭凸锥,$\boldsymbol{\epsilon} \in K$, $\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S) + \boldsymbol{\epsilon} + K - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$闭,$\beta = \inf_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k})$,则

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \beta) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S), K).$$

进一步地,夏远梅等[2]举例说明定理1的逆不一定成立.

例1(见文献[2]中的例1) 令$X = Y = R^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $K = R^2$, $\boldsymbol{\epsilon} = (1, 1) \in K$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 1, 2x_2)$且$S = \{(x_1, x_2): x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geqslant 1/2\}$.

为说明当$\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S) + \boldsymbol{\epsilon} + K - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$不是闭集或者$\bar{\boldsymbol{x}} \notin \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \beta)$时,定理2不一定成立,夏远梅等在文献[2]中举了如下例子:

例2(见文献[2]中的例2) 令$X = Y = R^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $K = R^2$, $\boldsymbol{\epsilon} = (1, 1) \in K$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$且$S\{(x_1, x_2): x_1 < 0, x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

例3(见文献[2]中的例3) 令$X = Y = R^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $K = R^2$, $\boldsymbol{\epsilon} = (1, 1) \in K$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$且$S = \{(x_1, x_2): x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant -1\}$.

而Gao(高英)等[23]则利用Δ函数研究了基于co-radiant集定义的近似真有效解的非线性标量化结果:

定理3(见文献[23]中的定理4.6(i)) 设$\boldsymbol{0} \notin C \subset Y$是凸的、真co-radiant集,$\varepsilon \geqslant 0$, $\beta = d_C(\boldsymbol{0})$.则

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{PE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AMin}(\Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \varepsilon\beta).$$

基于以上结果,我们首先指出定理1(文献[2]的定理1)是定理3(文献[23]的定理4.6(i))的特例.

结论1 定理1是定理3的特例.

证明 分两种情况:

1)当$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\epsilon} \in K$时,显然结论成立.

2)当$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{\epsilon} \in K$时,令

$$C = \boldsymbol{\epsilon} + K.$$

显然C是点的、真的、凸co-radiant集且$\boldsymbol{0} \notin C$.

由注2(ii)知,定理1中的$\boldsymbol{\epsilon}$-PE$(\boldsymbol{f}(S), K)$对应于定理3中的PE$(\boldsymbol{f}, C, 1)$,即

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S), K) \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{PE}(\boldsymbol{f}, C, 1). \tag{1}$$

据定理3,

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{PE}(\boldsymbol{f}, C, 1) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AMin}(\Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), 1 \cdot \beta). \tag{2}$$

下面,我们说明

$$\Delta_{-C(0)}(\cdot) = \Delta_{-\mathrm{cl}(C(0))}(\cdot) = \Delta_{-K}(\cdot). \tag{3}$$

易知 cl cone$(\boldsymbol{\epsilon} + K) = K$(事实上,由 K 是闭凸锥易知 cl cone$(\boldsymbol{\epsilon} + K) \subseteq K$;另一方面,对任意的 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{k} \in K$, 有

$$\boldsymbol{k} = \lim_{n\to\infty}(1/n)(\boldsymbol{\epsilon} + n\boldsymbol{k}) \in \mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{\epsilon} + K),$$

从而 cl cone$(\boldsymbol{\epsilon} + K) \supseteq K$).所以

$$\mathrm{cl}\ C(0) = \mathrm{cl\ cone}_+ C = \mathrm{cl\ cone}\ C = \mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{\epsilon} + K) = K.$$

从而,式(3)成立.

注意到,

$$1\cdot\beta = d_C(\mathbf{0}) = d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0}). \tag{4}$$

结合式(1)~(4),有

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S), K) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0})).$$

综上,结论 1 得证.

注 3 在定理 1 中

$$d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0}) = \inf_{\boldsymbol{k}\in K}\Delta_{-K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) = \inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{-K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) = \inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{-\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}).$$

接下来,在 cone$(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + C(\varepsilon))$ 闭的条件下,我们证明(C, ε)-有效解是(C, ε)-真有效解, 并通过建立(C, ε)-有效解的 Δ 函数标量化结果给出(C, ε)-真有效解的刻画,进而得到文献[2]的定理 2.

结论 2 若 cone$(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + C(\varepsilon))$ 闭,则

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon).$$

证明 由定义,

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon) \Leftrightarrow (\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap (-C(\varepsilon)) \subseteq \{\mathbf{0}\}.$$

从而

$$\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + C(\varepsilon)) \cap (-C(0)) \subseteq \{\mathbf{0}\}.$$

否则,存在 $\lambda > 0$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$,$\boldsymbol{c} \in C$ 使得

$$\mathbf{0} \neq \lambda(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon\boldsymbol{c}) \in -C(0).$$

由于 C 是点的,故 $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}$.而 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in -\varepsilon\boldsymbol{c} - C(0) \subseteq -C(\varepsilon)$,这与 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, C, \varepsilon)$ 矛盾.

因 cone$(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + C(\varepsilon))$ 是闭集,有

$$\mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + C(\varepsilon)) \cap (-C(0)) \subseteq \{\mathbf{0}\}.$$

由注 2(i),有

$$\bar{x} \in \mathrm{PAE}(\boldsymbol{f}, S, C(\varepsilon)).$$

结论得证.

注 4 类似于结论 2 的证明,有:当 $\boldsymbol{\epsilon} \in K$ 且 cone$(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + K)$ 闭时,

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\epsilon} + K, 1) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S), K).$$

结论 3 设 $\varepsilon \geqslant 0$.令 $\beta = \inf_{\boldsymbol{c}\in C} d_{\partial C(0)}(\boldsymbol{c})$, 则

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{SMin}(\Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \varepsilon\cdot\beta) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, S, C(\varepsilon)).$$

证明 设 $\bar{\boldsymbol{x}} \notin \mathrm{AE}(\boldsymbol{f}, S, C(\varepsilon))$, 则存在 $\hat{\boldsymbol{x}} \in S\backslash\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$ 使得

$$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in -C(\varepsilon).$$

从而

$$\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon \boldsymbol{c} \in -C(\varepsilon) \subseteq -C(0), \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C.$$

由引理 1(i),

$$\Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon \boldsymbol{c}) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C. \tag{5}$$

另一方面,因 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{SMin}(\Delta_{C(0)}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \varepsilon \cdot \beta)$ 且注意到

$$d_{\partial C(0)}(\boldsymbol{c}) = -\Delta_{-C(0)}(-\boldsymbol{c}), \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C,$$

以及 $\Delta_{-C(0)}(\cdot)$ 的次线性,有

$$\begin{aligned}
&\Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) > 0 - \varepsilon \cdot \inf_{\boldsymbol{c} \in C} d_{\partial C(0)}(\boldsymbol{c}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Leftrightarrow \\
&\quad \Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) + \varepsilon \cdot \inf_{\boldsymbol{c} \in C} d_{\partial C(0)}(\boldsymbol{c}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Rightarrow \\
&\quad \Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) + \varepsilon \cdot d_{\partial C(0)}(\boldsymbol{c}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Rightarrow \\
&\quad \Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) - \varepsilon \cdot \Delta_{-C(0)}(-\boldsymbol{c}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Rightarrow \\
&\quad \Delta_{-C(0)}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon \boldsymbol{c}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{c} \in C,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\}.
\end{aligned}$$

这与式(5)矛盾.结论得证.

结论 4 结合注 3 和结论 3, 立即得到定理 2.

注 5 此外,我们给出定理 2 的另一种证明方法:

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})), \inf_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k})) \Leftrightarrow \\
&\quad \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) > \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) - \inf_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Leftrightarrow \\
&\quad \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) + \inf_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Leftrightarrow \\
&\quad \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) + d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{k} \in K,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Leftrightarrow \\
&\quad \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) - \Delta_{-K}(-\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{k}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{k} \in K,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Rightarrow \\
&\quad \Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{k} \in K,\ \forall \boldsymbol{x} \in S \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\} \Rightarrow \\
&\quad (\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + K) \cap (-K) \subseteq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\
&\quad \mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + K) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}$$

因 $\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + K)$ 是闭集,所以

$$\mathrm{cl\,cone}(\boldsymbol{f}(S) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\epsilon} + K) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}.$$

从而, $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{PE}(\boldsymbol{f}(S), K)$.

注 6

(i) 关于 $\inf_{\boldsymbol{k} \in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + K)$ 与 $d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0})$ 的大小关系,有

$$\inf_{\boldsymbol{k} \in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) \leqslant d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0}) = \inf_{\boldsymbol{k} \in K} d_{-\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}).$$

如,取 $K = R^2_+$.取 $\boldsymbol{\epsilon} = (1, 1) \in K$.则

$$\inf_{\boldsymbol{k} \in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) = 1 < \sqrt{2} = d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\mathbf{0}).$$

(ii) 由距离函数的性质和集合 K 的凸锥性,有

$$\inf_{\boldsymbol{k} \in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}) = d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}).$$

事实上,对任意给定的 $\boldsymbol{k} \in K$, 有

$$\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k} - Y \backslash K \subseteq \boldsymbol{\epsilon} - Y \backslash K,$$

否则,存在 $\boldsymbol{k}_0 \in K \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{y}_0 \in Y \backslash K$, 使得 $\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{y}_0 \notin \boldsymbol{\epsilon} - Y \backslash K$,即 $\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{k}_0 \in K$.注意到 $\boldsymbol{y}_0 \in K$ 且 K 是凸锥,故 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{k}_0 + \boldsymbol{k}_0 \in K$ 矛盾.从而

$$d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) = \inf_{\boldsymbol{y}\in Y\setminus K}\|\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{y}\| \geqslant \inf_{\boldsymbol{y}\in Y\setminus K}\|\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{y}\| = d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}) = d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}), \qquad \forall \boldsymbol{k}\in K.$$

故

$$\inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) = \inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) \geqslant d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}) = d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}).$$

另一方面,

$$\inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) = \inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) \leqslant d_{Y\setminus K}(\boldsymbol{\epsilon}) = d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}).$$

结合式(6),

$$\inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k}) = d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}).$$

注意到在例 1~3(文献[2]的例 1~3)中向量优化问题的近似真有效解均不存在.事实上,在例 1~3 中, 对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 及任意的 $\boldsymbol{\epsilon}\in K=R_+^2$, 都有

$$\mathrm{cl\,cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)=\{(x_1,0): x_1\leqslant 0\}\neq\{(0,0)\}.$$

为说明主要结果,在向量优化问题的近似真有效解存在的情况下,举如下例子.

例 4 令 $X=Y=R^2$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$, $K=R_+^2$, $S=\{(x_1,x_2): x_1\geqslant -3,\ x_2\geqslant -1\}=R_+^2+\{(-3,-1)\}$ 且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}\in S$.取 $\boldsymbol{\epsilon}=(1,1)\in K$.

1) 向量优化问题(VP)的 $\boldsymbol{\epsilon}$- 真有效解存在, 即, $\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K)\neq\varnothing$.事实上,$\bar{\boldsymbol{x}}=(-3,-1)\in\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K)$.

2) 定理 1 的逆不一定成立.

取 $\bar{\boldsymbol{x}}=(0,0)\in S$, 则

$$\bar{\boldsymbol{x}}\in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\boldsymbol{0})),$$

但

$$\bar{\boldsymbol{x}}\notin\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K).$$

事实上

$$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\geqslant -1>-\sqrt{2}=\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))-d_{\boldsymbol{\epsilon}+K}(\boldsymbol{0}), \qquad \forall \boldsymbol{x}\in S.$$

而

$$\mathrm{cl\,cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)=\{(x_1,0): x_1\leqslant 0\}\neq\{(0,0)\}.$$

3) 定理 2 的逆不一定成立.

取 $\bar{\boldsymbol{x}}=(-2,0)\in S$, 显然 $\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 是闭集, 即满足定理 2 中的条件,且

$$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K),$$

但

$$\bar{\boldsymbol{x}}\notin \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ \inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}))=\mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),1).$$

事实上,

$$\mathrm{cl\,cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)=\{(0,0)\},$$

但存在 $\hat{\boldsymbol{x}}=(-3,-1)\in S$ 使得

$$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))=-1=\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))-\inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}).$$

4) 定理 2 中,当

$$\bar{\boldsymbol{x}}\in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ \inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}))\setminus \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ \inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}))$$

时,可能有 $\bar{\boldsymbol{x}}\notin\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K)$.

取 $\bar{\boldsymbol{x}}=(0,0)\in S$, 显然 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 是闭集, 即满足定理 2 中的条件.但

$$\bar{\boldsymbol{x}}\in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ \inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}))\setminus \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),\ \inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}))$$

且

$$\bar{\boldsymbol{x}}\notin \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K).$$

事实上,

$$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\geqslant -1=\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))-\inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}),\qquad \forall \boldsymbol{x}\in S.$$

但存在 $\hat{\boldsymbol{x}}=(-3,-1)\in S$, 使得

$$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))=-1=\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))-\inf_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\epsilon}+K} d_{\partial K}(\boldsymbol{k}).$$

且 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)\neq\{(0,0)\}$.

最后,我们在向量优化问题的 $\boldsymbol{\epsilon}$- 真有效解存在的条件下,说明当 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 不是闭集时,定理 2 不一定成立.

例 5 令

$$X=Y=R^2,\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_2,\ K=R^2_+,$$

$$\begin{aligned}S=&\{(x_1,x_2)\in R^2: x_1\geqslant 2,\ 1\geqslant x_2\geqslant 0\}\cup\\&\{(x_1,x_2)\in R^2: 1<x_1<2,\ 0<x_2\leqslant 1\}\cup\\&\{(x_1,x_2)\in R^2: (x_1-1)^2+(x_2-1)^2\leqslant 1,\ 0\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0<x_2\leqslant 1\},\end{aligned}$$

且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}\in S$.取 $\boldsymbol{\epsilon}=(1,0)\in K$.见图 1.

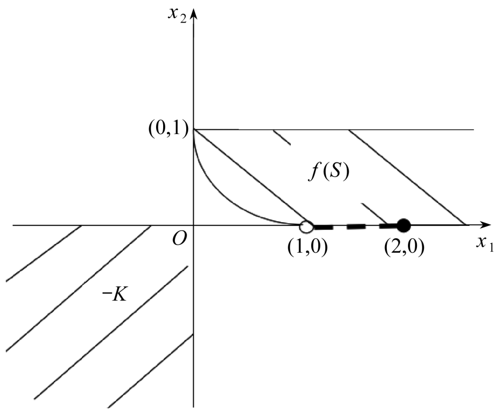

图 1 集合 $f(S)$ 和集合 $-K$

Fig. 1 Sets $f(S)$ and $-K$

图 1 中,实心点表示取到,空心点表示不取到,虚线表示取不到.左下角阴影部分表示集合 $-K$,右上角所围部分表示集合 $f(S)$.

1) 向量优化问题(VP)的近似真有效解存在,即, $\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K)\neq\varnothing$.事实上,

$$\bar{\boldsymbol{x}}=(0,1)\in\boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K),$$

见图 2.

图 2 中右边阴影部分表示集合 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$,图 2 表示 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)=\{\boldsymbol{0}\}$.

2) 当 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 不是闭集,定理 2 不一定成立.

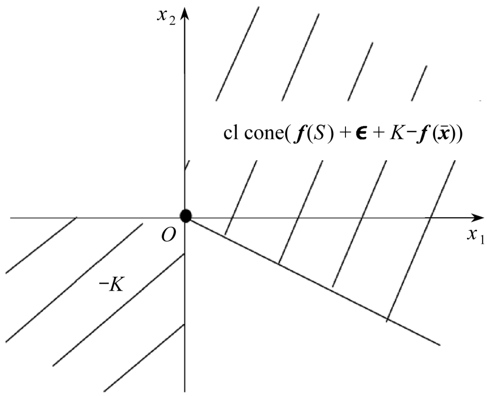

图 2 集合 cl cone$(f(S)+\epsilon+K-f(\bar{x}))$ 与集合 $-K$ 的交

Fig. 2 The intersection of sets cl cone$(f(S)+\epsilon+K-f(\bar{x}))$ and $-K$

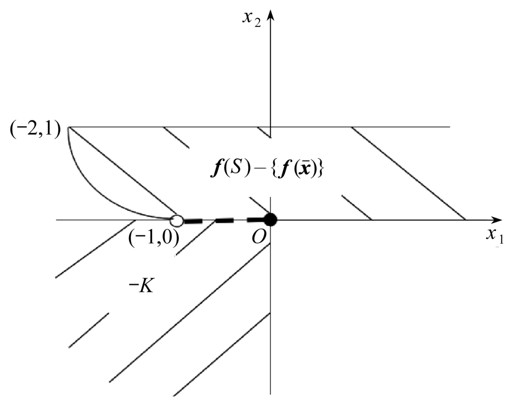

图 3 集合 $f(S)-\{f(\bar{x})\}$ 与集合 $-K$ 的交

Fig. 3 The intersection of sets $f(S)-\{f(\bar{x})\}$ and $-K$

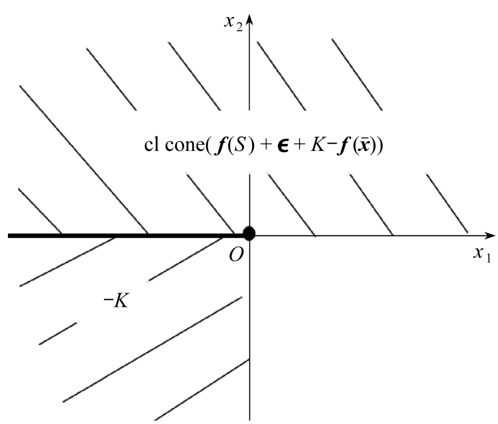

图 4 集合 cl cone$(f(S)+\epsilon+K-f(\bar{x}))$ 与集合 $-K$ 的交

Fig. 4 The intersection of sets cl cone$(f(S)+\epsilon+K-f(\bar{x}))$ and $-K$

取 $\bar{x}=(2,0)\in S$，因 $\inf_{k\in K} d_{\partial K}(\epsilon+k)=d_{\partial K}(\epsilon)=0$，则

$$\bar{x}\in \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(f(S)-f(\bar{x})),\ d_{\partial K}(\epsilon)),$$

见图 3.

图 3 中 x_1 轴上半平面内曲线所围图形表示集合 $\boldsymbol{f}(S)-\{\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\}$，图 3 表示 $(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)=\{\boldsymbol{0}\}$，从而，由引理 1(i)，$\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))>\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))=0$，$\forall \boldsymbol{x}\in S\backslash\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$，即 $\bar{\boldsymbol{x}}\in \mathrm{SAMin}(\Delta_{-K}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})),d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}))$.

但，

$$\bar{\boldsymbol{x}}\notin \boldsymbol{\epsilon}\text{-PE}(\boldsymbol{f}(S),K),$$

见图 4.

图 4 中 x_1 轴上半平面表示集合 $\mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$，从而，图 4 表示 $\mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{f}(S)+\boldsymbol{\epsilon}+K-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-K)\neq\{\boldsymbol{0}\}$.

3 结　语

本文指出文献[2]中定理 1 实际上是文献[23]中定理 4.6(i)的特例.在 $\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(S)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+C(\varepsilon))$ 闭的条件下，证明了 (C,ε)-有效解是 (C,ε)-真有效解，并通过建立 (C,ε)-有效解的 Δ 函数标量化结果给出了 (C,ε)-真有效解的 Δ 函数标量化刻画，从而得到文献[2]的定理2；因文献[2]定理2的证明存在不足，另给出了文献[2]定理2的严谨证明过程，并得到 $\inf_{\boldsymbol{k}\in K} d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{k})=d_{\partial K}(\boldsymbol{\epsilon})$ 这一结果.最后在 $\boldsymbol{\epsilon}$-真有效解存在的情况下，举例说明了主要结果.

参考文献(References)：

[1] Kutateladze S S. Convex ε-programming[J]. *Soviet Mathematics Doklady*, 1979, **20**: 390-393.

[2] 夏远梅，张万里，赵克全. ε-真有效解的非线性标量化[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，**32**(1)：12-15.(XIA Yuan-mei, ZHANG Wang-li, ZHAO Ke-quan. Nonlinear scalarization of ε-properly efficient solutions[J]. *Journal of Chongqing Normal University* (*Natural Science*), 2015, **32**(1): 12-15.(in Chinese))

[3] RONG Wei-dong, MA Yi. Connectedness of ε-super efficient solution set of vector optimization problems with set-valued maps[J]. *OR Transactions*, 2000, **4**(4): 21-32.

[4] Eichfelder G. *Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization*[M]. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[5] Jahn J. *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*[M]. Berlin: Springer, 2011.

[6] Soleimani-Damaneh M. An optimization modelling for string selection in molecular biology using Pareto optimality[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(8): 3887-3892.

[7] Soleimani-Damaneh M. On some multiobjective optimization problems arising in biology[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2011, **88**(6): 1103-1119.

[8] Engau A, Wiecek M M. Generating ε-efficient solutions in multiobjective programming[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, **177**(3): 1566-1579.

[9] Khoshkhabar-Amiranloo S, Soleimani-Damaneh M. Scalarization of set-valued optimization problems and variational inequalities in topological vector spaces[J]. *Nonlinear Analysis*, 2012, **75**(3): 1429-1440.

[10] Son T Q, Strodiot J J, Nguyen V H. ε-optimality and ε-Lagrangian duality for a nonconvex programming problem with an infinite number of constraints[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **141**(2): 389-409.

[11] Hiriart-Urruty J B. New concepts in nondifferentiable programming[J]. *Mémoires de la*

Société Mathématique de France, 1979, **60**: 57-85.

[12] Hiriart-Urruty J B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1979, **4**(1): 79-97.

[13] Gerth C, Weidner P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1990, **67**(2): 297-320.

[14] Göpfert A, Riahi H, Tammer C, Zalinescu C. *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[15] Zaffaroni A. Degrees of efficiency and degrees of minimality[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2003, **42**(3): 1071-1086.

[16] Loridan P. ϵ- solutions in vector minimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1984, **43**(2): 265-276.

[17] White D J. Epsilon effieiency[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, **49**(2): 319-337.

[18] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **17**(3): 688-710.

[19] Helbig S, Pateva D. On several concepts for ε- efficiency[J]. *Operations Research Spektrum*, 1994, **16**(3): 179-186.

[20] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. Optimality conditions via scalarization for a new ε- efficiency concept in vector optimization problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, **201**(1): 11-22.

[21] Ha T X D. The Ekeland variational principle for Henig proper minimizers and super minimizers[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **364**(1): 156-170.

[22] Durea M, Dutta J, Tammer C. Lagrange multipliers for ε- Pareto solutions in vector optimization with nonsolid cones in Banach spaces[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, **145**(1): 196-211.

[23] Gao Y, Yang X M, Teo K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2011, **7**(2): 483-496.

Some Notes on the Scalarization of Function Δ for Vector Optimization Problems

TANG Li-ping[1], LI Fei[2], ZHAO Ke-quan[3], YANG Xin-min[3]

(1. *College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *P.R.China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *P.R.China*;
3. *School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 400047, *P.R.China*)

(Contributed by YANG Xin-min, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Recently, XIA Yuan-mei, et al. (*Journal of Chongqing Normal University* (*Natural Science*), 2015, **32**(1): 12-15) studied the ϵ- properly efficient solutions to vector optimization problems via scalar function Δ in terms of the nonlinear scalarization method, and gave some examples to illustrate their results. It was point out here that theorem 1 established by XIA Yuan-mei, et al. was a special case of theorem 4.6(i) obtained by Gao, et al. (*Journal of Industrial and Management Optimization*, 2011, **7**(2): 483-496), and the proof of theorem 2 given by XIA Yuan-mei, et al. had some deficiency. Through investigation the nonlinear scalarization of function Δ for the (C, ε)- properly efficient solutions, theorem 2 obtained by XIA Yuan-mei, et al. was proved again rigorously. In the end, some examples in which ϵ- properly efficient solutions did exist, were given to illustrate the main results.

Key words: vector optimization; approximate properly efficient solution; function Δ; nonlinear scalarization

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (Key Program) (11431004); The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11271391; 11201511; 11301574)