

格栅夹层梁热弯曲的等效微极热弹性分析*

张锐¹, 尚新春^{1,2}

(1. 北京科技大学 国家材料服役安全科学中心, 北京 100083;
2. 北京科技大学 数理学院 应用力学系, 北京 100083)

摘要: 将格栅夹层梁热弯曲等效为微极热弹性梁的受热变形,利用平面微极热弹性理论建立了微极梁受热变形的控制方程组,给出了温度载荷下微极梁的位移表达式.通过胞元能量等效的方法,得到了研究的格栅夹层梁等效微极热弹性梁材料参数.对比了等效微极梁模型和 ANSYS 有限元软件计算得到的温度载荷下悬臂格栅夹层梁受热弯曲变形的数值结果,两种方法得到的结果非常接近,证明了微极热弹性梁是一种简单有效的模拟格栅夹层梁热变形的等效模型.

关键词: 格栅夹层梁; 热弯曲; 微极热弹性; 均匀化方法

中图分类号: TB331; O343.6 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.09.005

引言

考虑内部微结构对格栅结构整体变形的影响,精确描述格栅结构的变形一直是人们所研究的对象^[1-11].其理论研究主要分为两个方面:一是研究夹芯(无表板)的面内变形,包括热应力问题,已有许多成果.例如利用胞元分析的方法,分析蜂窝夹芯的等效弹性性能^[12-13].文献[6]指出:分析格栅夹芯的面内变形时,格栅骨架自身旋转变形的影响是必须要考虑的,并且应用微极弹性理论建立了相应的等效模型.通过引入微旋转及分布的微力偶,将不连续的格栅结构整体等效为连续均匀的微极体,简化了建模与计算,得到的结果也非常精确^[14-16].二是研究由表板与格栅夹芯构成的夹层梁和板结构的弯曲变形,由于同时考虑表板与夹芯的相互作用,使得这类问题分析起来较为复杂^[17-19].特别是考虑单纯由变温引起的弯曲问题,所见文献更少.

针对在力载荷作用下格栅夹层梁结构弯曲问题,已有研究者将软夹芯等效为只承受剪切作用的连续体,并且考虑了表板的抗拉效应^[17]和抗拉及剪切效应^[18],建立了夹层连续梁的等效模型.然而,这些模型并未考虑夹芯中腹板自身的旋转变形对结构整体变形的影响.文献[19]指出:在格栅夹层结构的弯曲变形问题中,当腹板与表板的结合节点刚度较大可视为刚性节点时,利用经典的连续体理论模型得到的结果在某些情况下会带来较大误差.并且通过结

* 收稿日期: 2015-02-27; 修订日期: 2015-05-06

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863计划)(2012AA03A513)

作者简介: 张锐(1985—),男,黑龙江虎林人,博士生(E-mail: zhangrui19850424@163.com);
尚新春(1958—),男,山西朔州人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: shangxc@ustb.edu.cn).

构矩阵分析的方法,引入微极弹性理论中的微转角来描述腹板自身弯曲变形的二阶变形效应,给出了相应的考虑微极效应有限元分析模型.由于其采用的是有限元分析方法,并没有给出等效微极梁的数学模型.

此外,考虑温度载荷的影响,分析格栅夹层梁的热弯曲变形的研究目前还比较少见.文献[20]利用有限元方法计算了温度载荷作用下格栅夹层结构的变形,但并未给出等效的理论模型.在文献[19]研究的基础上,文献[21]进一步研究了温度载荷的作用,考虑了格栅夹层梁整体变形所表现出的微极效应,但依然采用有限元方法来数值计算整体变形.文献[22]曾假设夹芯中腹板无弯曲,分析了自由热变形后胞元各组成部分在内力及协调关系约束下的变形,并利用传递矩阵的方法得到了格栅夹层梁受热变形.在腹板与表板的结合节点刚度较大的情况下,计算结果表明腹板无弯曲假设会引起较大的误差.因此,有必要考虑腹板自身的弯曲效应对整体结构变形的影响.将格栅或多孔弹性体等效为微极弹性介质,在建立问题的数学模型时,可以将问题纳入连续介质力学的框架来处理,使得在数学描述上更为简洁,即将由经典 Hooke (胡克)弹性材料制成的格栅夹层梁结构,等效成为一均匀连续的微极弹性梁进行理论分析.较之经典理论来说,它将格栅夹芯中腹板的自身旋转与微极弹性理论中微旋转关联起来,考虑了夹芯位移的局部二阶变形效应,能够更为精确地描述格栅夹层结构的弯曲变形,但是有关等效微极弹性参数的确定仍然有较大的困难.

本文利用平面热弹性微极理论,建立了温度载荷作用下格栅夹层梁结构的等效微极弹性梁弯曲问题的控制方程.通过胞元的能量等效,确定出了等效微极弹性梁的热弹性参数.作为对比的参考,本文应用实体有限元对 Hooke 弹性材料制成的格栅夹层梁实际结构数值计算了其热变形,而由本文等效微极弹性梁模型计算的结果与之对比,二者结果的一致性验证了等效微极弹性梁模型的正确性.

1 微极热弹性悬臂梁的理论分析

为了建立格栅夹层梁的等效微极弹性梁模型,下面列出经典平面热弹性微极理论的平衡方程、本构方程和几何方程^[11]:

$$t_{ij,i} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j, \quad m_{iz,i} + \varepsilon_{zmn} t_{mn} + \rho l_z = \rho J \ddot{\Phi}_z, \quad i, j, m, n = x, y, \quad (1)$$

$$t_{ij} = -\beta_0 T \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + (\mu + k) \varepsilon_{ij} + \mu \varepsilon_{ji}, \quad m_{iz} = r \gamma_{zi}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijz} \phi_z, \quad \gamma_{zi} = \phi_{z,i}. \quad (3)$$

在温度载荷作用下,不考虑体力和体力偶,仅考虑静态变形,将式(2)和(3)代入式(1)中,得到由位移表达的平衡方程为

$$(\lambda + 2\mu + k) u_{x,xx} + (\mu + k) u_{x,yy} + (\lambda + \mu) u_{y,xy} + k \phi_{z,y} = \beta_0 T_{,x}, \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu) u_{x,xy} + (\mu + k) u_{y,xx} + (\lambda + 2\mu + k) u_{y,yy} - k \phi_{z,x} = \beta_0 T_{,y}, \quad (5)$$

$$r(\phi_{z,xx} + \phi_{z,yy}) - k(u_{x,y} - u_{y,x}) - 2k\phi_z = 0. \quad (6)$$

假设微极梁的位移和微转动有如下形式:

$$u_x = U(x) + y\theta(x), \quad u_y = W(x), \quad \phi_z = \phi(x). \quad (7)$$

将式(7)代入式(4)~(6)中,并将式(4)~(6)沿梁厚度方向积分,即

$$(\lambda + 2\mu + k) \left(\int_{-h/2}^{h/2} U_{,xx} dy + \int_{-h/2}^{h/2} y\theta_{,xx} dy \right) = \beta_0 \int_{-h/2}^{h/2} T_{,x} dy, \quad (8)$$

$$(\lambda + \mu) \int_{-h/2}^{h/2} \theta_{,x} dy + (\mu + k) \int_{-h/2}^{h/2} W_{,xx} dy - k \int_{-h/2}^{h/2} \phi_{,xx} dy = \beta_0 \int_{-h/2}^{h/2} T_{,y} dy, \quad (9)$$

$$r \int_{-h/2}^{h/2} \phi_{,xx} dy - k \left(\int_{-h/2}^{h/2} \theta dy - \int_{-h/2}^{h/2} W_{,x} dy \right) - 2k \int_{-h/2}^{h/2} \phi dy = 0, \quad (10)$$

$$(\lambda + 2\mu + k) \left(\int_{-h/2}^{h/2} y U_{,xx} dy + \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \theta_{,xx} dy \right) = \beta_0 \int_{-h/2}^{h/2} y T_{,x} dy. \quad (11)$$

考虑温度沿梁长度方向无变化的情况,控制方程(8)~(11)可简化为

$$U_{,xx} = 0, \quad (12)$$

$$\theta_{,xx} = 0, \quad (13)$$

$$\theta = W_{,x} + \frac{r}{k} \phi_{,xx} - 2\phi, \quad (14)$$

$$\phi_{,xxxx} + \frac{k(2\mu + k)}{r(\mu + k)} \phi_{,xx} = 0. \quad (15)$$

悬臂梁固支端边界条件为

$$u_x(0) = 0, u_y(0) = 0, u_{y,x}(0) = 0, \phi_z(0) = 0. \quad (16)$$

自由端边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\int_{-h/2}^{h/2} t_{xx} dy \right) \Big|_{x=l} &= \left[-\beta_0 \int_{-h/2}^{h/2} T dy + (\lambda + 2\mu + k) h U_{,x} \right] \Big|_{x=l} = 0, \\ \left(\int_{-h/2}^{h/2} y t_{xx} dy + \int_{-h/2}^{h/2} m_{xz} dy \right) \Big|_{x=l} &= \\ \left[-\beta_0 \int_{-h/2}^{h/2} y T dy + (\lambda + 2\mu + k) \frac{h^3}{12} \theta_{,x} + r h \phi_{,x} \right] \Big|_{x=l} &= 0, \\ \left(\int_{-h/2}^{h/2} t_{xy} dy \right) \Big|_{x=l} &= [(\mu + k) h W_{,x} + \mu h \theta - k h \phi] \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

温度载荷为

$$T(y) = \theta_0 + \theta_1 y. \quad (18)$$

解由式(12)~(15)组成的控制方程组,考虑到边界条件(16)~(17)和温度载荷式(18),得到温度载荷作用下悬臂微极梁的弯曲变形结果:

$$\left\{ \begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{\beta_0 \theta_0}{\lambda + 2\mu + k} x + y \frac{\beta_0 \theta_1}{\lambda} x, \\ u_y(x) &= \left[-x^2 + \frac{12r - h^2(2\mu + k)}{6(2\mu + k)} \frac{\operatorname{ch}(a_0 x) - 1}{\operatorname{ch}(a_0 l)} \right] \frac{\beta_0 \theta_1}{2\lambda}, \\ \phi_z(x) &= -\frac{\beta_0 \theta_1}{\lambda} x + \frac{12r - h^2(2\mu + k)}{12\lambda r a_0 \operatorname{ch}(a_0 l)} \beta_0 \theta_1 \operatorname{sh}(a_0 x), \end{aligned} \right. \quad (19)$$

其中

$$\frac{k(2\mu + k)}{r(\mu + k)} > 0, a_0 = \sqrt{\frac{k(2\mu + k)}{r(\mu + k)}}.$$

2 格栅夹层梁的等效微极热弹性参数确定

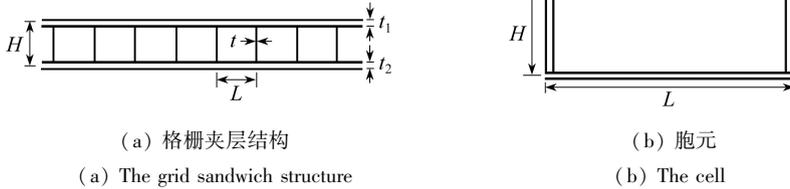
考虑由 Hooke 弹性材料制成的格栅夹层梁结构,其由相互平行的上、下表层和与上、下表层垂直的中间格栅夹芯 3 部分组成,如图 1(a)所示.上、下表层内的温度分别为 T_1, T_2 ($T_2 < T_1$),厚度分别为 t_1, t_2 ,中线的间距为 H ;夹芯内格栅腹板沿梁的长度方向等间距分布,格栅腹板厚度为 t ,相邻腹板间的距离为 L ;夹层梁宽度为 b ,长度为 l .上、下表层和格栅夹芯的弹性模

量、Poisson(泊松)比、热膨胀系数分别为 E_1, E_2 和 $E_3; \nu_1, \nu_2$ 和 $\nu_3; \alpha_1, \alpha_2$ 和 α_3 。

下面应用胞元分析和均匀化方法,将格栅夹层梁结构等效为均匀的微极热弹性梁.等效微极梁的厚度、长度和宽度分别为 H, l 和 b .选取如图 1(b)所示的结构作为胞元进行分析.

利用文献[14]中的胞元分析方法,假设夹层结构内上、下表层中任意一点的位移均可由夹层结构中线处的横向位移 u^0 和转角 ϕ^0 ,纵向位移 v^0 及微转动 θ^0 , 表示为

$$u = u^0 + y\phi^0, v = v^0, \theta = \theta^0. \quad (20)$$



(a) 格栅夹层结构

(a) The grid sandwich structure

(b) 胞元

(b) The cell

图 1 格栅夹层结构及胞元示意图

Fig. 1 Schematics of the grid sandwich structure and the cell

以位移 u^0, v^0 和转角 ϕ^0 及微转动 θ^0 做为初始位移,与其间隔 x 长度的截面上的位移与微转动可以用 Taylor(泰勒)展开的方法表示为

$$\begin{cases} u^+ = u^0 + \frac{H}{2}\phi^0 + x\left(\varepsilon_x^0 + \frac{H}{2}\kappa_x^0\right), \\ u^- = u^0 - \frac{H}{2}\phi^0 + x\left(\varepsilon_x^0 - \frac{H}{2}\kappa_x^0\right), \\ v = v^0 + x\varepsilon_y^0, \theta = \theta^0 + x\mu_x^0, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\varepsilon_x^0 = \frac{du^0}{dx}, \kappa_x^0 = \frac{d\phi^0}{dx}, \varepsilon_y^0 = \frac{dv^0}{dx}, \mu_x^0 = \frac{d\theta^0}{dx},$$

上标“+”表示上表层内的横向位移,上标“-”表示下表层内的横向位移.纵向位移和微转动不随梁厚度变化,其在上、下表层内相同.考虑上、下表层材料、厚度相同的情况,其横截面积和惯性矩分别为 $A_1 = bt_1, I_1 = bt_1^3/12$.腹板的惯性矩为 $I_3 = bt_3^3/12$.温度载荷作用下,胞元的应变能为

$$\begin{aligned} U = & \frac{L}{2} \left[2E_1A_1(\varepsilon_x^0)^2 + \left(\frac{1}{2}E_1A_1H^2 + 3E_3I_3 \frac{L}{H} \right) (\kappa_x^0)^2 + 6E_3I_3 \frac{L}{H} \kappa_x^0\mu_x^0 + \right. \\ & \frac{24E_1I_1}{L^2}(\varepsilon_y^0 - \theta^0)^2 + \frac{12E_3I_3}{LH}(\phi^0 + \theta^0)^2 + \left. \left(2E_1I_1 + \frac{3E_3I_3L}{H} \right) (\mu_x^0)^2 - \right. \\ & \left. 2E_1A_1\alpha_1(T_1 + T_2)\varepsilon_x^0 - E_1A_1\alpha_1H(T_1 - T_2)\kappa_x^0 + E_1A_1\alpha_1^2(T_1^2 + T_2^2) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

考虑微极热弹性梁沿其长度方向与厚度方向性能的差异,对于同胞元长度相同的微极梁中所包含的应变能可表示为

$$U = \frac{b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + k_1 & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \mu + k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} -$$

$$2\beta_0 T \varepsilon_{xx} + \frac{\beta_0^2 T^2}{\lambda + 2\mu + k} \Bigg) dy dx. \quad (23)$$

将式(21)代入式(23)得到微极热弹性梁胞元应变能的表达形式为

$$U = \frac{bHL}{2} \left\{ (\lambda + 2\mu + k_1) (\varepsilon_x^0)^2 + \left[\frac{H^2}{12} (\lambda + 2\mu + k_1) + \frac{L^2}{12} (\mu + k_2) \right] (\kappa_x^0)^2 + \frac{L^2}{6} k_2 \kappa_x^0 \mu_x^0 + \left[\frac{L^2}{12} (k_1 + k_2) + r \right] (\mu_x^0)^2 + (\mu + k_1) (\varepsilon_y^0 - \theta^0)^2 + 2\mu (\varepsilon_y^0 - \theta^0) (\phi^0 + \theta^0) - (\mu + k_2) (\phi^0 + \theta^0)^2 \frac{2\beta_0}{H} \left(\varepsilon_x^0 \int_{-H/2}^{H/2} T dy + \kappa_x^0 \int_{-H/2}^{H/2} y T dy \right) - \frac{\beta_0^2}{(\lambda + 2\mu + k) H} \int_{-H/2}^{H/2} T^2 dy \right\}. \quad (24)$$

设等效的微极梁横向热膨胀性能须与格栅夹层梁横向热膨胀性能相同,对比式(22)和式(24),得到微极梁的等效热弹性材料参数为

$$\begin{cases} \beta_0 = (\lambda + k_1) \alpha_1, \lambda = \frac{2E_1 t_1}{L} \left(\frac{3L}{H} - \frac{t_1^2}{HL} \right) + \frac{2E_3 t_3^3 L}{H^4}, \mu = 0, \\ k_1 = \frac{2E_1 t_1^3}{HL^2}, k_2 = \frac{E_3 t_3^3}{LH^2}, r = \frac{E_3 t_3^3 L}{6H^2}. \end{cases} \quad (25)$$

等效微极梁中材料参数 k 取沿其长度方向的材料参数 k_1 代替,认为沿梁厚度方向的材料参数 k_2 对格栅夹层梁整体变形无影响。

3 数值算例及结果

取总长度为 $l = nL$ (n 为胞元个数) 的悬臂格栅夹层梁结构作为算例,利用本文等效微极热弹性梁方法计算悬臂格栅夹层梁受热后的弯曲变形,并与有限元方法(FEM)计算得到的结果进行比较.上、下表层和中间腹板材料相同,均为铝合金材料,弹性模量为 $E_1 = E_2 = E_3 = 75 \text{ GPa}$ 、Poisson 比为 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$,热膨胀系数为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.8 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.夹层结构的形状可由几何参数 $t_1/L = t_2/L = t_3/L = b/L = 0.04$ 和 $H/L = 1$ 得到.取胞元数 $n = 20$,上表层内的温度 $T_1 = 400 \text{ } ^\circ\text{C}$,下表层内的温度 $T_2 = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$.将坐标原点固定于悬臂结构固定端中点,应用 ANSYS 有限元软件计算时,采用 Solid45 三维体单元。

在上述材料参数和几何参数的条件下,改变上、下表层和腹板厚度以及格栅夹层梁的整体宽度 $t_1/L = t_2/L = t_3/L = b/L = 0.04$,采用有限元方法、文献[22]中的方法以及本文方法计算得到的温度载荷作用下悬臂格栅夹层梁上层挠度的结果如表1所示.与文献[22]中方法计算得到的悬臂格栅夹层梁上层挠度曲线相比,本文等效微极梁方法计算得到的结果与有限元方法得到的结果更为接近.与参考文献相比,本文等效微极梁方法考虑了格栅夹芯内腹板自身的弯曲变形对格栅夹层结构整体弯曲的影响,在分析格栅夹层结构弯曲变形时,腹板自身的弯曲效应不可被忽略,否则会造成较大的误差。

图2给出了由本文等效微极热弹性梁方法和有限元方法计算得到的悬臂格栅夹层梁受热后,等效微极梁和有限元方法得到的夹层梁上、下表层挠度随结构长度方向的变化曲线.由有限元方法得到的结果可见,夹层梁上、下表层挠度曲线非常接近,夹层梁整体厚度基本无变化,

取夹层梁上表层的挠度曲线作为其整体的挠度曲线,挠度最大值位于悬臂梁自由端.本文等效微极热弹性梁方法与有限元方法计算得到的挠度曲线基本重合,等效微极热弹性梁方法可以准确地计算悬臂格栅夹层结构受热弯曲变形.

表 1 3种方法计算得到的上表层挠度值 u_y/L

Table 1 The deflections u_y/L of the top face layer calculated with the 3 methods

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
FEM	0.008 1	0.040 7	0.094 9	0.170 7	0.268 0	0.387 0	0.527 5	0.689 5	0.873 2	1.077 9
ref.[22]	0.011 0	0.044 0	0.099 1	0.176 1	0.275 2	0.396 2	0.539 3	0.704 3	0.891 4	1.100 5
present	0.010 8	0.043 2	0.097 2	0.172 8	0.270 0	0.388 9	0.529 3	0.691 3	0.874 9	1.080 1

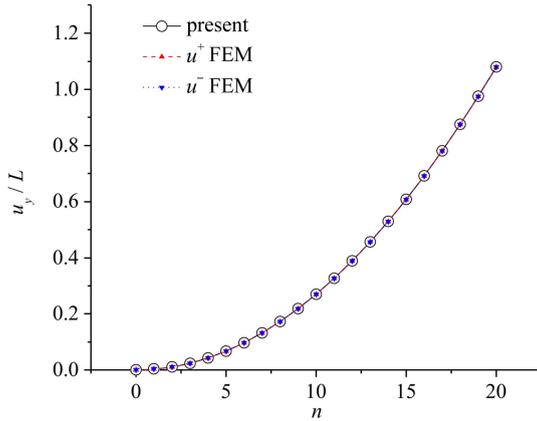


图 2 悬臂格栅夹层梁挠度曲线

Fig. 2 The deflection curves of the cantilever grid sandwich beam

表 2 上、下表层相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响

Table 2 The effect of the relative thickness of top and bottom face layers on maximal deflection $u_{y,max}$ of the grid sandwich beam

t_1/L		0.02	0.04	0.08	0.10	0.20
$u_{y,max}/L$	present	1.076 1	1.079 7	1.081 8	1.083 1	1.094 1
	FEM	1.078 0	1.077 7	1.072 9	1.067 6	1.010 8

表 3 腹板相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响

Table 3 The effect of the relative thickness of webs on maximal deflection $u_{y,max}$ of the grid sandwich beam

t_3/L		0.02	0.04	0.08	0.10	0.20
$u_{y,max}/L$	present	1.080 1	1.079 7	1.076 5	1.073 1	1.024 0
	FEM	1.074 6	1.077 7	1.075 1	1.072 6	1.046 3

表 4 夹芯相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响

Table 4 The effect of the relative thickness of the core on maximal deflection $u_{y,max}$ of the grid sandwich beam

H/L		0.5	1	2	3	4	5
$u_{y,max}/L$	present	2.159 1	1.079 7	0.539 3	0.358 8	0.268 3	0.213 8
	FEM	2.153 6	1.077 7	0.538 20	0.358 40	0.267 64	0.215 86

表 2~表 4 分别给出了上、下表层相对厚度,腹板相对厚度和夹芯相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响.如表 2 所示,上、下表层相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值影响非常小.利用本文方法与有限元方法计算得到的上、下表层相对厚度对格栅夹层梁挠度最大值的影

响趋势相反.利用等效微极梁方法计算得到的格栅夹层梁挠度最大值随上、下表层厚度的增加而增加,有限元方法计算得到的格栅夹层梁挠度最大值随上、下表层厚度的增加而减小.本文中等效的微极梁厚度仅与上、下表层中线间距有关,并未考虑到上、下表层厚度变化后微极梁整体厚度的变化,造成本文等效微极梁中对格栅夹层梁上、下表层相对厚度变化的影响趋势与有限元方法得到的结果不一致.表3、表4的结果表明,夹层梁挠度最大值随腹板厚度的增加和腹板长度的增加而减小,本文方法与有限元方法计算得到的结果非常接近.腹板厚度越厚或长度越长,对夹层梁弯曲的抑制效果越明显,夹层梁弯曲最大值越小.

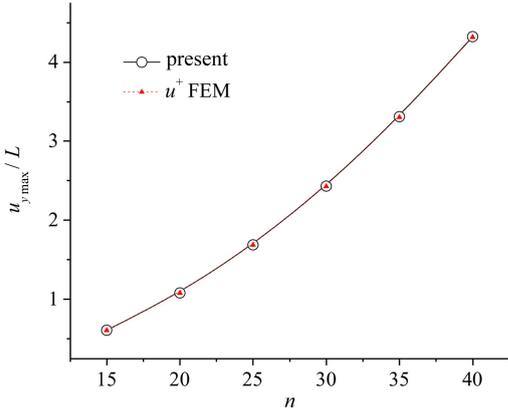


图3 整体相对长度对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响

Fig. 3 The effect of the relative length on maximal deflection $u_{y,max}$ of the grid sandwich beam

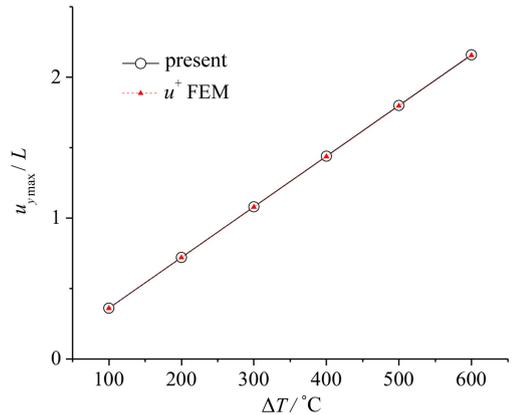


图4 温差对格栅夹层梁挠度最大值 $u_{y,max}$ 的影响

Fig. 4 The effect of the temperature difference on maximal deflection $u_{y,max}$ of the grid sandwich beam

图3~图4分别给出了格栅夹层梁整体相对长度和上、下表层温差 $\Delta T (= T_1 - T_2)$ 对格栅夹层梁挠度最大值的影响.格栅夹层梁挠度最大值随格栅夹层梁包含的胞元数的增加和上、下表层间温差的增加而增加,本文等效微极梁得到的结果与有限元方法得到的结果基本吻合,夹层梁包含的胞元数目和上、下表层间温差对本文方法精确性并无显著影响.

4 结 论

本文将格栅夹层梁热弯曲等效为微极热弹性梁的受热变形,利用经典的平面微极热弹性理论建立了微极梁受热变形的控制方程组,给出了温度载荷下微极梁弯曲的位移表达式.通过对比微极热弹性梁与矩阵分析方法得到的格栅夹层梁胞元能量确定了等效的微极梁材料参数.数值比较了等效微极梁模型和 ANSYS 有限元软件计算得到的温度载荷下悬臂格栅夹层梁在温度载荷下的弯曲变形.结果表明本文模型与有限元模型计算得到的结果非常接近,证明了本文模型的正确性.本文模型可以作为一种简单有效的计算温度载荷作用下格栅夹层梁弯曲变形的的方法.

参考文献 (References):

- [1] Bažant Z P. Micropolar medium as model for buckling of grid frameworks[C]//*Developments in Mechanics, Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference*, 1971, **6**: 587-594.
- [2] Bazant Z P, Christensen M. Analogy between micropolar continuum and grid framework under initial stress[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1972, **8**: 327-346.

- [3] Kanatani K. A theory of continua with projective microstructure as a model for large truss[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1978, **12**(4): 341-356.
- [4] Adachi T, Tomita Y, Tanaka M. Computational simulation of deformation behavior of 2D-lattice continuum[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998, **40**(9): 857-866.
- [5] Chen J Y, Huang Y, Ortiz M. Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(5): 789-828.
- [6] Kumar R S, McDowell D L. Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(26): 7399-7422.
- [7] Evans A G, Hutchinson J W, Fleck N A, Ashby M F, Wadley H N G. The topological design of multifunctional cellular metals[J]. *Progress in Materials Science*, 2001, **46**(3): 309-327.
- [8] Gibson L J, Ashby M F. *Cellular Solids: Structure and Properties* [M]. Cambridge, NY: Cambridge University Press, 1998.
- [9] Romanoff J, Varsta P. Bending response of web-core sandwich plates[J]. *Composite Structures*, 2007, **81**(2): 292-302.
- [10] 蔺鹏臻, 杨子江, 孙理想, 冀伟. 集中弯矩作用下箱梁剪力滞效应的解析解[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(7): 750-758. (LIN Peng-zhen, YANG Zi-jiang, SUN Li-xiang, JI Wei. Analytic method for shear lag effect of box girders under concentrated bending moments[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 750-758. (in Chinese))
- [11] 郝加琼, 李明成, 邓宗白. 基于高阶变形理论的硬夹芯夹层板横向载荷条件下的弯曲[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(8): 873-882. (HAO Jia-qiong, LI Ming-cheng, DENG Zong-bai. Bending of sandwich plates with hard cores under transverse loading based on the high-order deformation theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(8): 873-882. (in Chinese))
- [12] Gibson L J, Ashby M F, Schajer G S. The mechanics of two-dimension cellular materials[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1982, **382**(1782): 25-42.
- [13] 富明慧, 尹久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数[J]. 力学学报, 1999, **31**(1): 113-118. (FU Ming-hui, YIN Jiu-ren. Equivalent elastic parameters of the honeycomb core[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, **31**(1): 113-118. (in Chinese))
- [14] Kanatani K. A micropolar continuum model for vibrating grid frameworks[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1979, **17**(4): 409-418.
- [15] Eringen A C. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids* [M]. New York: Springer, 1999.
- [16] Wang X L, Stronge W J. Micropolar theory for two-dimensional stresses in elastic honeycomb [J]. *Proceedings of the Royal Society of London in Materials Science A*, 1999, **455**(1986): 2091-2116.
- [17] Allen H G. *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels* [M]. Oxford: Pergamon Press, 1969.
- [18] Sokolinsky V, Frostig Y. Branching behavior in the nonlinear response of sandwich panels with a transversely flexible core[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(40): 5745-5772.
- [19] Noor A K, Nemeth M P. Micropolar beam models for lattice grids with rigid joints[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1980, **21**(2): 249-263.
- [20] XIE Gong-nan, WANG Qi, Sunden B, ZHANG Wei-hong. Thermomechanical optimization of lightweight thermal protection system under aerodynamic heating[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2013, **59**(1/2): 425-434.

- [21] Noor A K, Anderson M S, Greene W H. Continuum models for beam- and platelike lattice structures[J]. *AIAA Journal*, 1987, **16**(12): 1219-1228.
- [22] 张锐, 尚新春. 格栅夹层梁的热弯曲变形[J]. *复合材料学报*, 2014, **31**(6): 1558-1565.(ZHANG Rui, SHANG Xin-chun. Thermal bending deformation of grid sandwich beam[J]. *Acta Materialiae Compositae Sinica*, 2014, **31**(6): 1558-1565.(in Chinese))

Equivalent Micropolar Thermoelastic Analysis of Thermal Bending for Grid Sandwich Beams

ZHANG Rui¹, SHANG Xin-chun^{1,2}

(1. *National Center for Materials Service Safety, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P.R.China;*

2. *Department of Applied Mechanics, School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P.R.China*)

Abstract: The thermal bending of the grid sandwich beam was considered to be equivalent to the deformation of the micropolar thermoelastic beam under thermal load, and the control equations of thermal deformation for the equivalent micropolar thermoelastic beam were established based on the plane micropolar thermoelastic theory, with the expression of the thermal displacements given. The material parameters of the equivalent micropolar thermoelastic beam were obtained with the cell energy equivalence method. The example cantilever grid sandwich beam's thermal bending deformations calculated according to the proposed analytical equivalent micropolar beam model and the numerical ANSYS FEM were compared. The results from the proposed analytical method are perfectly close to those from the numerical method, which validates that the equivalent micropolar thermoelastic beam is a simple and effective model to simulate the thermal deformations of grid sandwich beams.

Key words: grid sandwich beam; thermal bending; micropolar thermoelasticity; homogenization method

Foundation item: The National High-tech R&D Program of China (863 Program) (2012AA03A513)