

# 薄球壳在均布外压与温度耦合作用下的热屈曲研究\*

李 忱, 田雪坤, 王海任, 苗亚男

(太原科技大学 应用科学学院, 太原 030024)

**摘要:** 从张量方法推导出的轴对称薄球壳屈曲方程出发,推导出在均布外压与温度耦合作用下用位移表示的薄球壳热屈曲方程;应用虚功原理建立薄球壳屈曲最小势能泛函;进一步用 Ritz(里兹)法分析了周边简支的半球壳的3种热屈曲问题,得到了:1) 温度不超过屈曲临界温度值时,均布外压的临界载荷;2) 均布外压载荷为0时,屈曲临界温度值;3) 均布外压载荷不超过临界载荷时,屈曲临界温度值。

**关键词:** 张量; 热屈曲; 薄球壳; Ritz法; 临界载荷; 临界温度

**中图分类号:** O343.6      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.09.004

## 引 言

近年来,许多学者对壳体的热屈曲问题展开了研究.1959年,Abir 和 Nardo 用 Donnell 壳体理论研究了薄壁圆柱壳的热屈曲问题,他们将沿柱坐标变化的热应力用 Fourier(傅里叶)级数表示,得到了在不同热应力条件下的轴向屈曲应力<sup>[1]</sup>.1966年, Mahayni 应用大挠度板壳理论,研究了简支情况下圆柱壳的热屈曲问题,在温度沿轴向呈抛物线变化情况下,求解临界温度<sup>[2]</sup>.1970年, Chang 和 Card 使用有限差分 and 模态迭代的方法分析了环向均匀加强正交多层加筋圆柱壳的热屈曲问题.在假设壳体和加强筋温度均匀分布的条件下,用最小余能原理获得平衡方程,讨论了热荷载的影响<sup>[3-4]</sup>.1973年, Gupta 和 Wang 研究了简支固定条件下的正交各向异性圆柱壳的热屈曲问题,并用 Ritz 法得到了临界温度载荷<sup>[5]</sup>.2004年, Shen 应用基于壳体屈曲的边界层理论研究了圆柱壳在均匀变化条件下的热屈曲问题,研究了热屈曲载荷和后屈曲平衡路径<sup>[6]</sup>.2005年, Wu 等用 Donnell 壳体理论研究了不同温度场下圆柱壳的热屈曲问题<sup>[7]</sup>.2003年, Shahsiah 等研究了各向同性材料扁球壳在均匀、径向线性均匀变化和径向非线性均匀变化3种不同温度载荷作用下的热屈曲稳定性问题<sup>[8]</sup>.2008年, Naj 等基于 Sander 一阶非线性壳体理论研究了去顶圆锥壳热应力载荷下的屈曲行为<sup>[9]</sup>.2010年, Hafezalkotob 和 Eslami 分别研究了功能梯度材料扁球壳简支固定条件下的热屈曲问题,扁球壳在均匀外压、温度以及均匀外压和温度耦合作用下的热屈曲问题<sup>[10]</sup>.2013年, Sabzikar 等研究了功能梯度材料扁

\* 收稿日期: 2015-05-14; 修订日期: 2015-06-25

基金项目: 国家自然科学基金(11372207); 山西省自然科学基金(2013011005-4)

作者简介: 李忱(1959—),男,浙江人,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: tydz\_lc@126.com).

球壳的热屈曲问题,文中考虑了均匀、径向线性均匀变化和径向非线性均匀变化 3 种温度载荷作用下的热屈曲问题<sup>[11]</sup>,2015 年,Anh 等应用前屈曲一致理论分析了去顶环形薄球壳在外载荷和热载荷共同作用下的稳定性问题,用 Galerkin(伽辽金)法获得临界载荷(温度)-挠度曲线<sup>[12]</sup>。

热屈曲问题已成为固体力学分支的前沿课题,但是,对于薄球壳外压和温度耦合作用的热屈曲研究尚未见到文献报道,本文研究了薄球壳分支点热屈曲问题,从张量方法推导出的薄球壳屈曲方程出发,推导出均布外压与温度耦合作用下,用位移表示的薄球壳热屈曲方程,应用虚功原理建立薄球壳屈曲最小势能泛函,进一步用 Ritz 法分析了  $Zr_{58.6}Al_{15.4}Co_{13}Cu_{13}$  金属玻璃半球壳周边简支的 3 种热屈曲问题,得到临界载荷(温度)-厚度曲线,并将纯荷载数值计算结果与分支点失稳问题经典理论结果比较,本文得到的结论更接近实验结果。

## 1 基本方程

### 1.1 几何方程

设  $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$  和  $\varepsilon_r$  分别表示壳体中面上任意点在正交坐标系下沿  $\varphi, \theta$  和  $r$  3 个坐标轴(见图 1)的正应变; $u, v$  和  $w$  为沿  $\varphi, \theta$  和  $r$  的位移分量; $\kappa_\varphi$  和  $\kappa_\theta$  分别是  $\varphi$  和  $\theta$  方向的曲率变化,考虑轴对称性,壳体上任一点都只有沿子午线方向和沿中面法线方向的两个位移  $u$  和  $w$ ,而  $v=0$ ,由此可以得到球壳中面上在球坐标系下的应变为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = (u^* + w)/R, & \varepsilon_\theta = (u \cot \varphi + w)/R, \\ \kappa_\varphi = (w^* - u)^*/R^2, & \kappa_\theta = \cot \varphi (w^* - u)/R^2, \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $( )^* = \partial( )/\partial\varphi$ , 以下采用相同的标记。

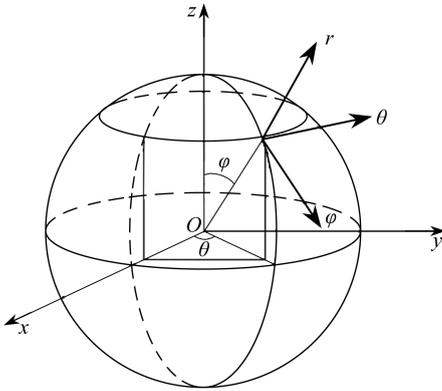


图 1 球坐标系

Fig. 1 The spherical coordinate system

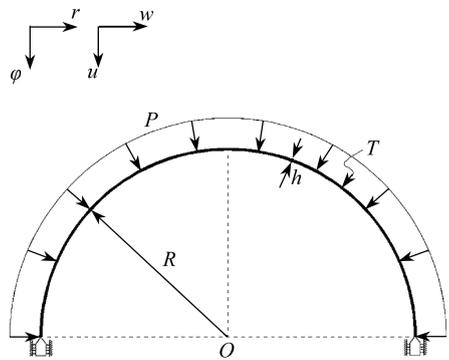


图 2 薄球壳的载荷图

Fig. 2 The loading on the thin spherical shell

### 1.2 球壳热本构方程

弹性理论中研究的是外力作用下产生的应力,但是引起物体产生应力的不仅仅有外力,温度同样可以引起物体产生应力、应变和位移,在仅考虑温度初值和增值的情况时,根据文献[14]推出球壳的热本构方程为

$$\begin{cases} N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) - Eh\alpha T/(1 - \mu), \\ N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) - Eh\alpha T/(1 - \mu), \\ M_\varphi = K(\kappa_\varphi + \mu\kappa_\theta) - (Eh^3\alpha T)/[12R(1 - \mu)], \\ M_\theta = K(\kappa_\theta + \mu\kappa_\varphi) - (Eh^3\alpha T)/[12R(1 - \mu)], \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $D = Eh/(1 - \mu^2)$ ,  $K = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ ;  $T$  为温度差。

### 1.3 球壳的热稳定性方程

文献[15]研究薄球壳稳定性问题时,选择各向同性材料厚度均匀的球壳,并假设壳体是无初始应力的理想完善模型。随着载荷逐渐增加到某一值,薄球壳以初始的无矩状态 I 转变为附加的有矩状态 II,并且以此来定义分支点稳定性问题。限制在线性理论范围内,认为附加状态 II 非常接近初始状态 I。分支点是从初始的无矩状态 I 转变为附加的有矩状态 II 的分界点,即临界点。由文献[15]得到张量方法推导出的球坐标系下的轴对称薄球壳的屈曲方程:

$$\begin{cases} (N_\varphi R \sin \varphi)^* - N_\theta R \cos \varphi - Q_\varphi R \sin \varphi + PR(w^* - u) \sin \varphi + \\ \bar{N}_\varphi(w^* - u) \sin \varphi + \bar{N}_\theta[(u^* + w)^* \sin \varphi + (u^* + w) \cos \varphi] - \\ \bar{N}_\theta(u \cot \varphi + w) \cos \varphi = 0, \\ N_\theta R \sin \varphi + N_\varphi R \sin \varphi + (Q_\varphi R \sin \varphi)^* + PR(u^* + u \cot \varphi + 2w) \sin \varphi - \\ \bar{N}_\varphi[(w^* - u) \sin \varphi]^* + \bar{N}_\theta(u \cot \varphi + w) \sin \varphi + \bar{N}_\varphi(u^* + w) \sin \varphi = 0, \\ (M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi - RQ_\varphi \sin \varphi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\bar{N}_\varphi$  和  $\bar{N}_\theta$  分别表示状态 I 时外压  $P$  在  $\varphi$  和  $\theta$  轴方向的薄膜力;  $N_\varphi$  和  $N_\theta$  分别表示状态 II 时在  $\varphi$  和  $\theta$  轴方向的薄球壳内力;  $M_\varphi$  和  $M_\theta$  分别表示状态 II 时在  $\varphi$  和  $\theta$  轴方向的薄球壳内力矩;  $Q_\varphi$  表示状态 II 时在  $\varphi$  轴方向的薄球壳横向剪力。

考虑球壳只受到轴对称均匀外压  $P$  的作用,温度  $T$  为 0,根据薄膜理论可以得到状态 I 时的薄膜力:

$$\bar{N}'_\varphi = \bar{N}'_\theta = -PR/2. \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),得到

$$\begin{cases} (N_\varphi \sin \varphi)^* - N_\theta \cos \varphi - Q_\varphi \sin \varphi + \\ \frac{P}{2}(u \cot^2 \varphi \sin \varphi - u \sin \varphi - u^* \cos \varphi - u^{**} \sin \varphi) = 0, \\ N_\theta \sin \varphi + N_\varphi \sin \varphi + (Q_\varphi \sin \varphi)^* + \frac{P}{2}(w^{**} \sin \varphi + w^* \cos \varphi + 2w \sin \varphi) = 0, \\ (M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi = RQ_\varphi \sin \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

考虑球壳只受到温度载荷  $T$  的作用,  $P$  为 0,根据薄膜理论可以得到状态 I 时的薄膜力:

$$\bar{N}''_\varphi = \bar{N}''_\theta = -E\alpha h T / (1 - \mu). \quad (6)$$

将式(6)代入式(3),得到

$$\begin{cases} (N_\varphi \sin \varphi)^* - N_\theta \cos \varphi - Q_\varphi \sin \varphi + \\ \frac{E\alpha h T}{R(1 - \mu)}[u(1 - \cot^2 \varphi) - u^{**} - u^* \cot \varphi - 2w^* - 2w \cot \varphi] \sin \varphi = 0, \\ N_\theta \sin \varphi + N_\varphi \sin \varphi + (Q_\varphi \sin \varphi)^* + \\ \frac{E\alpha h T}{R(1 - \mu)}(w^{**} + w^* \cot \varphi - 2w - 2u^* - 2u \cot \varphi) \sin \varphi = 0, \\ (M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi - RQ_\varphi \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

球壳同时受到轴对称均匀的外压  $P$  和温度载荷  $T$  的耦合作用,根据薄膜理论可以得到状态 I 时的薄膜力:

$$\bar{N}_\varphi''' = \bar{N}_\theta''' = -E\alpha hT/(1-\mu) - PR/2. \quad (8)$$

将方程(8)代入方程(3)中,可以得到薄球壳屈曲状态的热屈曲方程:

$$\left\{ \begin{aligned} & (N_\varphi \sin \varphi)^* - N_\theta \cos \varphi - Q_\varphi \sin \varphi + \frac{P}{2}(u \cot^2 \varphi - u^{**} - u^* \cot \varphi - u) \sin \varphi + \\ & \frac{E\alpha hT}{R(1-\mu)} [u(1 - \cot^2 \varphi) - u^{**} - u^* \cot \varphi - 2w^* - 2w \cot \varphi] \sin \varphi = 0, \\ & N_\theta \sin \varphi + N_\varphi \sin \varphi + (Q_\varphi \sin \varphi)^* + \frac{P}{2}(w^{**} + w^* \cot \varphi + 2w) \sin \varphi + \\ & \frac{E\alpha hT}{R(1-\mu)} (w^{**} + w^* \cot \varphi - 2w - 2u^* - 2u \cot \varphi) \sin \varphi = 0, \\ & (M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi - RQ_\varphi \sin \varphi = 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

## 2 临界载荷求解

### 2.1 球壳屈曲状态的势能泛函

设:沿子午线方向的虚位移为  $\delta u$ ,沿法线方向的虚位移为  $\delta w$ .将方程组(9)的第3式代入到前两式中,消去横向剪切力  $Q_\varphi$  并选取外法线方向为正方向可得虚功方程为

$$\begin{aligned} & - \iint_S \left\{ \left[ (N_\varphi \sin \varphi)^* - N_\theta \cos \varphi - \frac{(M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi}{R} + \right. \right. \\ & \left. \frac{P}{2}(u \cot^2 \varphi - u - u^* \cot \varphi - u^{**}) \sin \varphi + \right. \\ & \left. \frac{E\alpha hT}{R(1-\mu)} (u - u \cot^2 \varphi - u^* \cot \varphi - u^{**} - 2w^* - 2w \cot \varphi) \sin \varphi \right] \delta u - \\ & \left[ N_\theta \sin \varphi + N_\varphi \sin \varphi + \left[ \frac{(M_\varphi \sin \varphi)^* - M_\theta \cos \varphi}{R} \right]^* + \right. \\ & \left. \frac{P}{2}(w^{**} + w^* \cot \varphi + 2w) \sin \varphi + \right. \\ & \left. \frac{E\alpha hT}{R(1-\mu)} (w^{**} + w^* \cot \varphi - 2u^* - 2u \cot \varphi - 2w) \sin \varphi \right] \delta w \Big\} R d\varphi d\theta = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

其中,  $S$  为整个球面域.

考虑 1) 分部积分

$$\iint_S G \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = - \iint_S F \frac{\partial G}{\partial \varphi} d\theta d\varphi + \oint_L (FG) |_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\theta, \quad (11)$$

式中,  $L$  指  $\theta$  沿闭合曲线  $L$  积分.

2) 球壳边界为简支边界,即:  $M_\varphi = M_\theta = 0$ .沿闭合曲线  $L$  上的积分为 0,可得势能泛函  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_A \left\{ N_\varphi (u^* + w) + N_\theta (u \cot \varphi + w) + \frac{1}{R} M_\varphi (w^{**} - u^*) + \right. \\ & \frac{1}{R} M_\theta \cot \varphi (w^* - u) + \frac{P}{2} [u^2 (1 - \cot^2 \varphi) - (u^*)^2 - (w^*)^2 + 2w^2] + \\ & \frac{E\alpha hT}{R(1-\mu)} [u^2 (1 - \cot^2 \varphi) + (u^*)^2 - 2w^* u + \\ & \left. 2uw(1 - \cot \varphi) + (w^*)^2 + 2u^* w \cos \varphi + 2w^2] \right\} R \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (12) \end{aligned}$$

由初始的无矩状态 I 转变为附加的有矩状态 II 时, 屈曲方程中已经考虑状态 II 温度与外压产生的变形. 使用状态 II 本构方程不应该重复考虑温度效应.

引入无量纲参数:  $L = E\alpha h / (1 - \mu)$ , 将几何方程和本构方程代入式(12), 得到以位移表示的最小势能泛函:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ D[(u^*)^2 + 2u^*w + 2w^2 + 2\mu(u^*w + uu^* \cot \varphi + w^2 + uw \cot \varphi) + \right. \\ \left. 2wuc \cot \varphi + u^2 \cot^2 \varphi] + \frac{K}{R^2} [(w^{**})^2 + (u^*)^2 - 2w^{**}u^* + \right. \\ \left. 2\mu(w^{**}w^* - u^*w^* - uw^{**} + uu^*) \cot \varphi + (w^*)^2 \cot^2 \varphi - \right. \\ \left. 2w^*u \cot^2 \varphi + u^2 \cot^2 \varphi] + \frac{RP}{2} [u^2(1 - \cot^2 \varphi) - (u^*)^2 + 2w^2 - (w^*)^2] + \right. \\ \left. LT[u^2(1 - \cot^2 \varphi) + (u^*)^2 - 2w^*u + 2uw(1 - \cot \varphi) + (w^*)^2 + \right. \\ \left. 2u^*w \cos \varphi + 2w^2] \right\} \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2 球壳临界载荷计算

计算半径为  $R$  的半球壳, 边界简支, 受均匀外压载荷和温度载荷作用, 且不考虑温度梯度影响, 则  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , 由此最小势能泛函式(13)变为

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\{ D[(u^*)^2 + 2u^*w + 2w^2 + 2\mu(u^*w + uu^* \cot \varphi + \right. \\ \left. w^2 + uw \cot \varphi) + 2wuc \cot \varphi + u^2 \cot^2 \varphi] + \frac{K}{R^2} [(w^{**})^2 + (u^*)^2 - \right. \\ \left. 2w^{**}u^* + 2\mu(w^{**}w^* - u^*w^* - uw^{**} + uu^*) \cot \varphi + (w^*)^2 \cot^2 \varphi - \right. \\ \left. 2w^*u \cot^2 \varphi + u^2 \cot^2 \varphi] + \frac{RP}{2} [u^2(1 - \cot^2 \varphi) - (u^*)^2 + 2w^2 - (w^*)^2] + \right. \\ \left. LT[u^2(1 - \cot^2 \varphi) + (u^*)^2 - 2w^*u + 2uw(1 - \cot \varphi) + \right. \\ \left. (w^*)^2 + 2u^*w \cos \varphi + 2w^2] \right\} \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

设球壳失稳时的位移函数组:

$$\begin{cases} w = A_n \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ u = B_m \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right). \end{cases} \quad (15)$$

位移边界条件:  $u|_{\varphi=\pi/2} = w|_{\varphi=\pi/2} = 0$ ; 力的边界条件:  $M_\theta|_{\varphi=\pi/2} = 0$ . 显然, 位移函数满足位移边界条件和力的边界条件. 把式(15)代入到式(14), 积分可得到

$$\begin{aligned} \Pi = \pi \left\{ \left[ \frac{n^2 K}{R^2} S_{13} - n^2 \left( \frac{RP}{2} - LT \right) S_{14} - \frac{n^3 \mu K}{R^2} S_{15} + \frac{n^4 K}{R^2} S_6 + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left( D + \mu D + \frac{RP}{2} + LT \right) S_6 \right] A_n^2 + 2 \left[ D(1 + \mu) S_9 + LTS_{10} - \frac{nK}{R^2} S_{11} - \right. \right. \\ \left. \left. nLTS_{12} + \frac{n^2 \mu K}{R^2} S_9 + \frac{m}{2} LTS_3 + LTS_{10} - LTS_{16} \right] A_n B_m + \right. \\ \left. \left[ m^2 \left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} + LT \right) S_1 + 2m\mu \left( D + \frac{K}{R^2} \right) S_4 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} - LT \right) S_7 + \left( \frac{RP}{2} + LT \right) S_8 \left. \vphantom{\left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} - LT \right)} \right\} B_m^2 \Bigg\}, \quad (16)$$

式中,  $S_i (i = 1, 2, \dots, 16)$  在附录中给出.

由判别弹性系统平衡稳定性的能量准则可知:

$\delta^2 \Pi > 0$  时,  $\Pi$  为极小值, 平衡状态是稳定的.

$\delta^2 \Pi < 0$  时,  $\Pi$  为极大值, 平衡状态是不稳定的.

$\delta^2 \Pi = 0$  时,  $\Pi$  取驻值, 平衡状态呈临界平衡状态.

根据最小势能原理, 这些参数的值应使总势能  $\Pi$  取驻值, 即

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial A_n} \delta A_n + \frac{\partial \Pi}{\partial B_m} \delta B_m = 0.$$

因为  $\delta A_n$  和  $\delta B_m$  都是任意的, 要使  $\delta \Pi = 0$ , 必须有  $\partial \Pi / \partial A_n = 0$  和  $\partial \Pi / \partial B_m = 0$ , 由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A_n} = & \left[ \frac{n^2 K}{R^2} S_{13} - n^2 \left( \frac{RP}{2} - LT \right) S_{14} - \frac{n^3 \mu K}{R^2} S_{15} + \frac{n^4 K}{R^2} S_6 + \right. \\ & 2 \left( D + \mu D + \frac{RP}{2} + LT \right) S_6 \Big] A_n + \left[ mD(1 + \mu) S_2 + \frac{mn^2 K}{R^2} S_2 - \frac{nm\mu K}{R^2} S_5 + \right. \\ & D(1 + \mu) S_9 + LTS_{10} - \frac{nK}{R^2} S_{11} - nLTS_{12} + \\ & \left. \frac{n^2 \mu K}{R^2} S_9 + \frac{m}{2} LTS_3 + LTS_{10} - LTS_{16} \right] B_m = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial B_m} = & \left[ mD(1 + \mu) S_2 + \frac{mn^2 K}{R^2} S_2 - \frac{nm\mu K}{R^2} S_5 + D(1 + \mu) S_9 + LTS_{10} - \right. \\ & \left. \frac{nK}{R^2} S_{11} - nLTS_{12} + \frac{n^2 \mu K}{R^2} S_9 + \frac{m}{2} LTS_3 + LTS_{10} - LTS_{16} \right] A_n + \\ & \left[ m^2 \left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} + LT \right) S_1 + 2m\mu \left( D + \frac{K}{R^2} \right) S_4 + \right. \\ & \left. \left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} - LT \right) S_7 + \left( \frac{RP}{2} + LT \right) S_8 \right] B_m = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

用矩阵形式表示可得

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

式中

$$b_{11} = \frac{n^2 K}{R^2} S_{13} - n^2 \left( \frac{RP}{2} - LT \right) S_{14} - \frac{n^3 \mu K}{R^2} S_{15} + \frac{n^4 K}{R^2} S_6 + 2 \left[ D + \mu D + \frac{RP}{2} + LT \right] S_6,$$

$$b_{12} = b_{21} = mD(1 + \mu) S_2 + \frac{mn^2 K}{R^2} S_2 - \frac{nm\mu K}{R^2} S_5 + D(1 + \mu) S_9 + LTS_{10} -$$

$$\frac{nK}{R^2} S_{11} - nLTS_{12} + \frac{n^2 \mu K}{R^2} S_9 + \frac{m}{2} LTS_3 + LTS_{10} - LTS_{16},$$

$$b_{22} = m^2 \left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} + LT \right) S_1 + 2m\mu \left( D + \frac{K}{R^2} \right) S_4 +$$

$$\left( D + \frac{K}{R^2} - \frac{RP}{2} - LT \right) S_7 + \left( \frac{RP}{2} + LT \right) S_8.$$

因为  $w \neq 0, u \neq 0$ , 则  $A_n \neq 0, B_m \neq 0$ , 故式(19)有非零解。

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

### 3 结果分析

#### 3.1 临界压力分析

Zr 基金属玻璃具有高弹性和高强度等优良特性, 是一种理想的薄球壳材料. 本文选用  $\text{Zr}_{58.6}\text{Al}_{15.4}\text{Co}_{13}\text{Cu}_{13}$  金属玻璃为材料的薄球壳, 边界简支固定, 用 MATLAB 计算了直径  $R = 1\ 000$  mm,  $h/R$  值由 0.02 到 0.05 之间的薄球壳在变温度条件下的临界压力载荷.  $\text{Zr}_{58.6}\text{Al}_{15.4}\text{Co}_{13}\text{Cu}_{13}$  金属玻璃的弹性模量为  $90 \pm 5$  GPa, 取近似解 90 GPa, Poisson(泊松)比  $\mu = 0.3$ .

图 3 给出的是半径  $R = 1\ 000$  mm 的金属玻璃薄球壳在不同温度下的临界压力与厚度之间的关系. 图中  $\alpha T$  由 0 逐渐增大. 通过比较可以看到, 同一  $\alpha T$  条件下金属玻璃薄球壳的临界压力随着厚度的变大逐渐增大。

图 4 给出的是半径  $R = 1\ 000$  mm 的金属玻璃薄球壳的临界压力与温度的关系. 图 4(a) ~ 图 4(d) 分别给出的金属玻璃球壳厚度为  $h = 20$  mm,  $h = 25$  mm,  $h = 30$  mm 和  $h = 35$  mm 时的临界压力曲线. 由于金属玻璃材料的膨胀系数还未在文献中见到, 本文以  $\alpha T$  表示, 其中温度  $T$  代表初始温度与最终温度的温度差,  $\alpha T$  由 0 逐渐增大. 通过比较可以看到, 同一半径条件下, 随着  $\alpha T$  的不断升高, 临界压力逐渐增大. 因为温度升高, 薄球壳膨胀, 温度对薄球壳的作用与外压对薄球壳的作用相反, 所以临界压力逐渐增大。

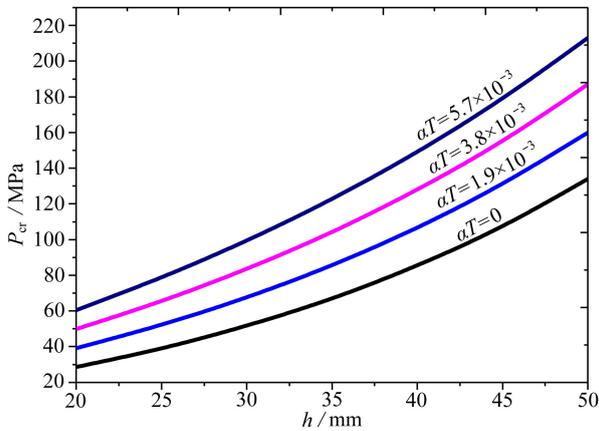


图 3 半径  $R = 1\ 000$  mm 的球壳对不同  $\alpha T$  的临界压力

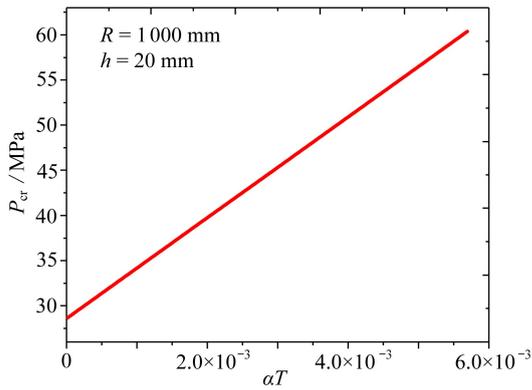
Fig. 3 Critical pressures of the spherical shell vs. different values of  $\alpha T$  for  $R = 1\ 000$  mm

#### 3.2 临界温度分析

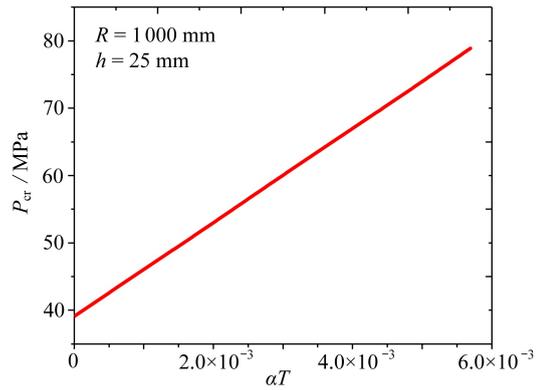
温度对金属玻璃球壳内力的影响主要表现在其产生的热应力. 壳体在不受约束的条件时是不产生热应力的, 只有在对边界施加约束条件后才产生热应力. 对于受约束的壳体, 当温度升高到某一个数值时, 就可能突然屈曲, 这种屈曲称为热屈曲. 本节选用  $\text{Zr}_{58.6}\text{Al}_{15.4}\text{Co}_{13}\text{Cu}_{13}$  金属玻璃为材料的薄球壳, 边界简支固定, 用 MATLAB 计算了直径  $R = 1\ 000$  mm,  $h/R$  值由 0.02 到 0.05 之间的薄球壳在变温度条件下的临界温度. 弹性模量为  $90 \pm 5$  GPa, 这里取近似解 90 GPa, Poisson 比  $\mu = 0.3$ .

图 5 给出的是半径  $R = 1\ 000$  mm 金属玻璃薄球壳的临界温度与球壳厚度的关系. 这里假设球壳只受到温度的影响, 外压载荷为  $P = 0$  MPa. 通过比较可以看出, 随着球壳厚度与半径之

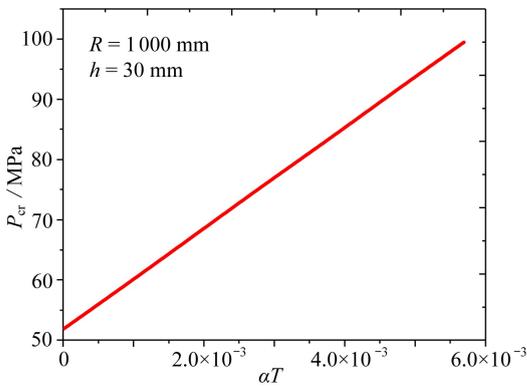
比  $h/R$  的逐渐增加, 临界  $\alpha T$  值也在逐渐增加。



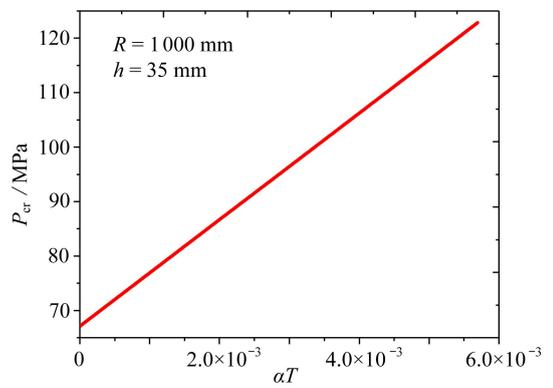
(a)  $h = 20$  mm



(b)  $h = 25$  mm



(c)  $h = 30$  mm



(d)  $h = 35$  mm

图 4 半径  $R = 1\ 000$  mm 的金属玻璃球壳临界压力

Fig. 4 Critical pressures of the metallic glass spherical shell for  $R = 1\ 000$  mm

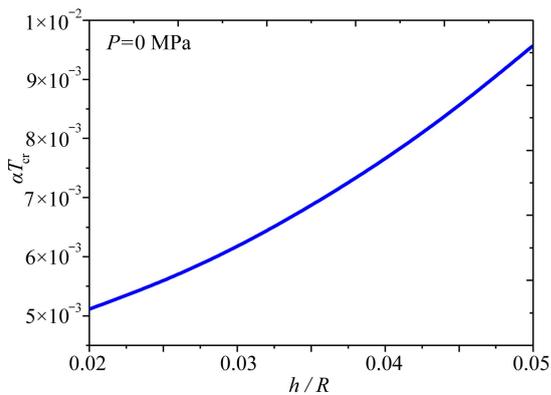


图 5 半径  $R = 1\ 000$  mm 的球壳对  
不同  $h/R$  的临界  $\alpha T$

Fig. 5 Critical values of  $\alpha T$  for the spherical shell  
vs.  $h/R$  for  $R = 1\ 000$  mm

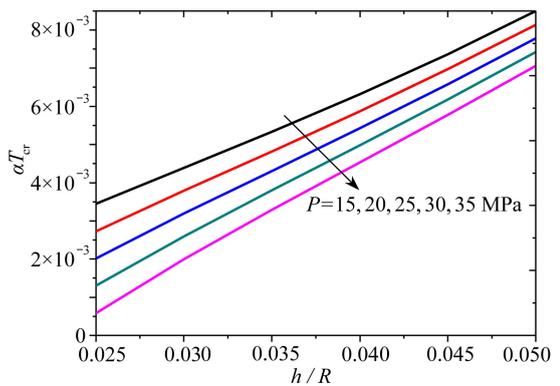


图 6 半径  $R = 1\ 000$  mm 的球壳对  
不同外压的临界  $\alpha T$

Fig. 6 Critical values of  $\alpha T$  for the spherical shell vs.  
different values of  $P$  for  $R = 1\ 000$  mm

图 6 给出的是半径为  $R = 1\ 000$  mm 金属玻璃薄球壳的临界  $\alpha T$  与球壳厚度的关系。图中  $P$  由 15 MPa 到 35 MPa。从图上可以明显看到, 对于同一厚度, 随着外压载荷的不断增大, 临界

$\alpha T$  逐渐降低。

图 7 给出的是半径  $R = 1\ 000\ \text{mm}$  的球壳, 压力逐渐增加, 但不超过临界压力时, 临界  $\alpha T$  与外压载荷的关系。图 7(a) 到图 7(d) 的金属玻璃球壳的厚度分别为  $h = 20\ \text{mm}$ ,  $h = 25\ \text{mm}$ ,  $h = 30\ \text{mm}$  和  $h = 35\ \text{mm}$ 。从图上可以明显看到, 随着外压载荷的不断加临界  $\alpha T$  却逐渐降低。

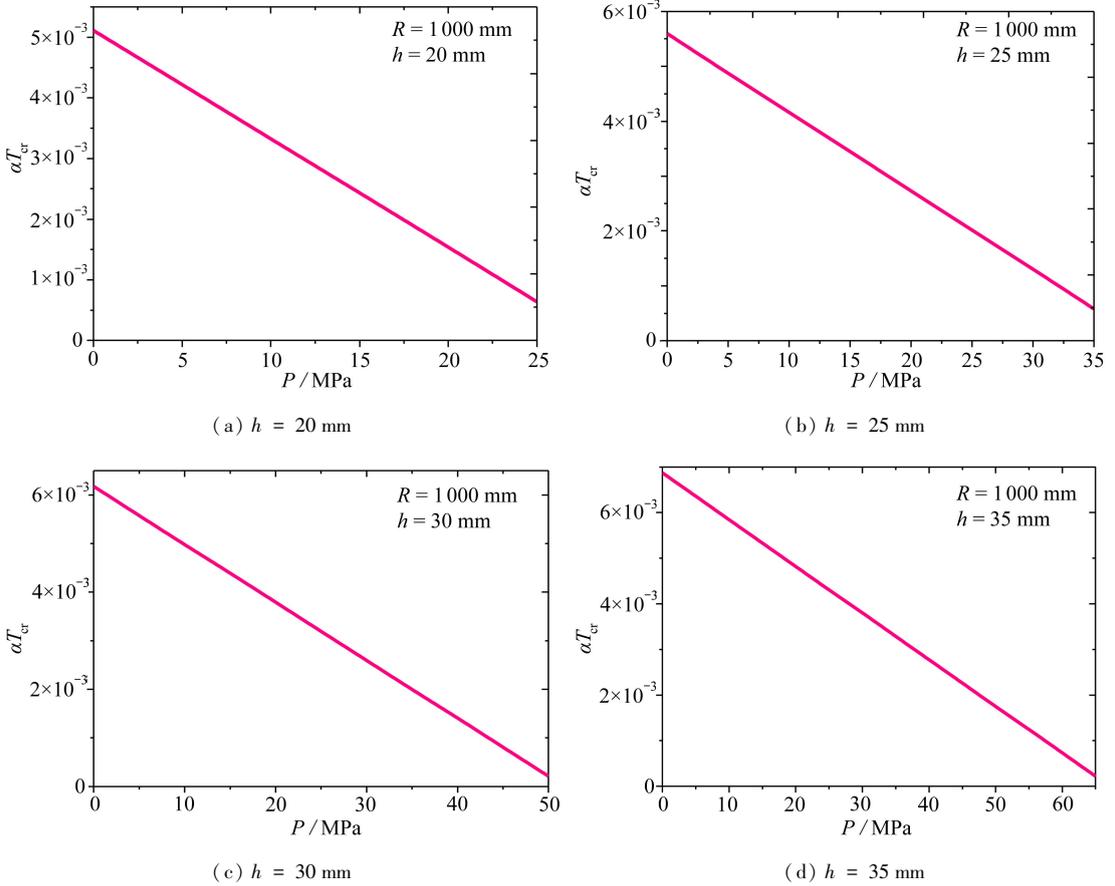


图 7 半径  $R = 1\ 000\ \text{mm}$  的金属玻璃球壳临界  $\alpha T$

Fig. 7 Critical values of  $\alpha T$  of the metallic glass spherical shell for  $R = 1\ 000\ \text{mm}$

## 4 讨 论

在常温条件下, 薄球壳在轴对称外压作用下的屈曲实验结果表明: 屈曲发生时, 临界压力远小于经典理论计算结果<sup>[16]</sup>。表 1 给出了室温条件下直径  $R = 1\ 000\ \text{mm}$  的金属玻璃薄球壳在轴对称外压作用下临界压力的数值结果与经典理论结果。通过对比可见, 数值结果只有经典理论结果的  $1/2$  左右, 这与早期的实验结果相符合。图 8 对比了由本文得到临界压力的数值计算与经典理论得到的理论结果。经典理论计算公式采用 Zoelly 和 Van der Neut 基于经典小变形理论和线性微分方程得到的薄球壳屈曲临界压力  $P_{\text{cr}}$ :

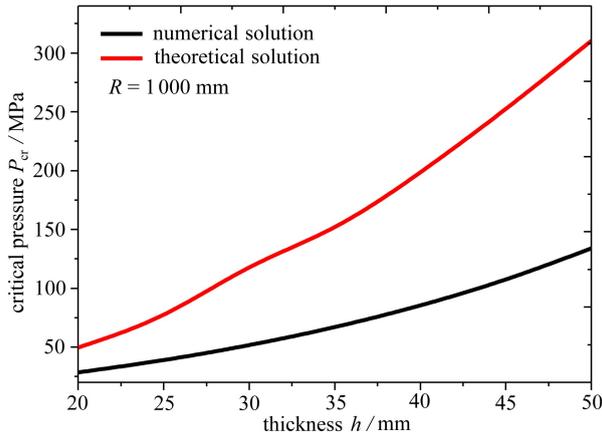
$$P_{\text{cr}} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\mu)}} \left( \frac{h}{R} \right)^2,$$

式中  $E$  为材料的弹性模量,  $\mu$  为 Poisson 比,  $R$  和  $h$  分别为球壳的中曲面半径和厚度。

表 1 在室温条件下临界压力的数值结果与经典理论结果比较

Table 1 Critical pressures of the numerical solution and the classical solution at room temperature

radius $R$ /mm	1 000						
thickness $h$ /mm	20	25	30	35	40	45	50
numerical solution $P_{cr}$ /MPa	28.6	39.1	51.8	67.1	85.6	107.6	134
classical theoretical solution $P_{cr}$ /MPa	49.7	77.6	117.8	152.2	198.7	252.52	310.5
ratio of critical pressure (numerical solution/classical theoretical solution) $A$ /%	57.5	50.4	44.0	44.1	43.1	42.6	43.2

图 8 半径  $R = 1\ 000$  mm 的金属玻璃薄球壳室温下的临界压力Fig. 8 Critical pressures of the spherical shell for  $R = 1\ 000$  mm at room temperature

致谢 本文接受太原科技大学研究生科技创新项目资助(20134032)。

## 附 录

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(2m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_2 = \int_0^{\pi/2} \sin\left(2m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_3 = \int_0^{\pi/2} \sin\left(2m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin(2\varphi) d\varphi,$$

$$S_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(2m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos \varphi d\varphi,$$

$$S_5 = \int_0^{\pi/2} \sin\left(2m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos \varphi d\varphi,$$

$$S_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^4\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cot^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_8 = \int_0^{\pi/2} \sin^4\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_9 = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos \varphi d\varphi,$$

$$S_{10} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_{11} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cot^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_{12} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_{13} = \int_0^{\pi/2} \cos^2\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cot^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_{14} = \int_0^{\pi/2} \cos^2\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_{15} = \int_0^{\pi/2} \sin\left(2n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos \varphi d\varphi,$$

$$S_{16} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cot^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

### 参考文献 (References):

- [1] Abir D, Nardo S V. Thermal buckling of circular cylindrical shells under circumferential temperature gradients[J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959, **26**(12): 803-808.
- [2] Mahayni M A. Thermal buckling of shallow shells[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1966, **2**(2): 167-180.
- [3] Chang L K, Card M F. Thermal buckling in stiffened cylindrical shells [C]//*Structural Dynamics, and Materials Conference*. New York, 1970, AAIA: 260-272.
- [4] Chang L K, Card M F. Thermal buckling analysis for stiffened orthotropic cylindrical shells [P]. American; NASA-TN-D-6332, L-7021, 1971.
- [5] Gupta Sd, Wang I. Thermal buckling of orthotropic cylindrical shells[J]. *Fibre Science and Technology*, 1973, **6**(1): 39-45.
- [6] Shen H S. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(4): 1961-1974.
- [7] Wu L, Jiang Z Q, Liu J. Thermoelastic stability of functionally graded cylindrical shells[J]. *Composite Structures*, 2005, **70**(1): 60-68.
- [8] Shahsiah R, Eslami M R. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, **26**(3): 277-294.
- [9] Naj R, Sabzikar Boroujerdy M S, Eslami M R. Thermal and mechanical instability of functionally graded truncated conical shells[J]. *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(1): 65-78.
- [10] Hafezalkotob A, Eslami M R. Thermomechanical buckling of simply supported shallow FGM spherical shells with temperature-dependent material[J]. *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, 2010, **11**(2): 39-65.
- [11] Sabzikar B M, Eslami M R. Thermal buckling of piezo-FGM shallow spherical shells[J]. *Mechanica*, 2013, **48**(4): 887-899.
- [12] Anh V T T, Bich D H, Duc N D. Nonlinear stability analysis of thin FGM annular spherical shells on elastic foundations under external pressure and thermal loads[J]. *European Journal of Mechanics—A/Solid*, 2015, **50**: 28-38.
- [13] 韩强, 黄小清, 宁建国. 高等板壳理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 57-60. (HAN Qiang, HUANG Xiao-qing, NING Jian-guo. *Theory of Higher Plate and Shell*[M]. Beijing: Science

- Press, 2002: 57-60.(in Chinese))
- [14] 赵丽, 李忱. 非线性各向同性弹性材料热应力本构方程[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(2): 183-189.(ZHAO Li, LI Chen. Thermal stress constitutive equations of non-linear isotropic elastic material[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(2): 183-189.(in Chinese))
- [15] 李忱, 黄执中. 任意形状薄壳的弹性稳定性方程[J]. 上海力学, 1993, **14**(3): 74-81.(LI Chen, HUANG Zhi-zhong. A set of general equations of elastic stability for thin shells with arbitrary shapes[J]. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1993, **14**(3): 74-81.(in Chinese))
- [16] 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M. 弹性稳定理论[M]. 张福范, 译. 北京: 科学出版社, 1965: 551.(Timoshenko S P, Gere J M. *The Theory of Elastic Stability*[M]. ZHANG Fu-fan, transl. Beijing: Science Press, 1965: 551.(Chinese version))

## Thermal Buckling of Thin Spherical Shells Under Interaction of Uniform External Pressure and Uniform Temperature

LI Chen, TIAN Xue-kun, WANG Hai-ren, MIAO Ya-nan  
(College of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology,  
Taiyuan 030024, P.R.China)

**Abstract:** The thermal buckling equation for thin spherical shells was deduced on the basis of axisymmetric thin spherical shell buckling equation derived with the tensor method. The thermal buckling equation involving the coupling of uniform external pressure and temperature was expressed in terms of displacement. The thin spherical shell buckling of minimum potential energy functional was also established according to the virtual work principle. 3 thermal buckling problems for simply supported hemispherical shells were analyzed with the Ritz method. The following 3 conclusions are drawn: 1) The critical value of uniform external pressure on condition that the temperature does not exceed the critical buckling level. 2) The buckling critical temperature value on condition that the uniform external pressure is 0. 3) The buckling critical temperature value on condition that the uniform external pressure does not exceed the critical level.

**Key words:** tensor; thermal buckling; thin spherical shell; Ritz method; critical load; critical temperature

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372207)