

# 基于分数阶热传导方程激光 加热瞬态温度场研究\*

许光映, 王晋宝, 韩志

(浙江海洋学院 海运与港航建筑工程学院, 浙江 舟山 316022)

**摘要:** 基于分数阶 Taylor(泰勒)级数展开原理,建立单相延迟一阶分数阶近似方程,获得分数阶热传导方程.针对短脉冲激光加热问题建立分数阶热传导方程组,并运用 Laplace(拉普拉斯)变换方法进行求解,给出非 Gauss(高斯)时间分布的激光内热源温度场解析解.针对具体算例数值研究温度波传播特性.结果表明热传播速度与分数阶阶次有关,分数阶阶次增加,热传播速度减小,温度变化幅度增加.分数阶方程可以用于描述介于扩散方程和热波方程间的热传输过程,且对热传播机制与分数阶热传导方程中分数阶项的关系做了深入剖析.

**关键词:** 分数阶热传导; 激光加热; 分数阶微分; 分数阶 Taylor 公式

**中图分类号:** O369      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.08.006

## 引 言

激光加热作为机械加工方法越来越多地用于工业生产各个领域,如激光表面处理、激光切割、激光医疗等.激光加工处理成本低,相比较于传统机械加工方法有很多优势.尽管如此,激光加工过程在材料处理区域容易形成很大的温度梯度,造成很高的热应力,在一些场合限制使用大功率的激光束.而理论模拟激光加热传热过程,对于理解激光处理参数、材料参数对激光与材料的相互作用有重要意义.

通常描述热传导的宏观模型是 Fourier(傅里叶)定律,而经典的 Fourier 定律是基于平衡态的热力学的标准扩散模型.从微观角度理解通常的标准扩散模型,在无限空域受到脉冲扰动时温度分布具有下列特征:热浓度分布服从 Gauss 函数分布律,平均平方位移是关于时间的线性函数,系统处处处于平衡态,粒子速度分布服从 Maxwell(麦克斯韦)分布<sup>[1]</sup>.这样的扩散也称为 Gauss 扩散; Fourier 定律对于接近 0 K 的低温、热扰动作用时间与材料本身固有的平均自由时间尺度相接近和微观输运能量粒子过程发生的空间尺度与微观粒子的平均自由程相接近等情况均不适用<sup>[2]</sup>.后来人们在低温、短脉冲激光加热和微尺度领域观测到热信号是以一定速度传递的现象<sup>[3]</sup>.据此人们提出各种修正的 Fourier 定律来描述热传递过程.其中最为著名的是 Cattaneo 和 Vernotte 提出的单 C-V 模型<sup>[4-5]</sup>.黄峰等应用 Fourier 定律研究高功率激光对石英辐照的热-力效应<sup>[6]</sup>.黄海明等基于 C-V 方程研究了脉冲强激光照射下材料热弹性响应<sup>[7]</sup>.Yilbas

\* 收稿日期: 2015-01-29; 修订日期: 2015-04-22

作者简介: 许光映(1967—),男,安徽人,副教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: xugy12@qq.com).

等运用 Fourier 定律和 C-V 方程研究激光与金属相互作用的热效应和弹性动力学效应<sup>[8-10]</sup>。但 Jiang(蒋方明)等用微秒激光辐照研究多孔材料内的非 Fourier 效应,发现基于 C-V 模型理论预测值与实验结果存在不一致的情形<sup>[11-12]</sup>。

C-V 模型描述的热波动传播机制,描述热信号是以有限速度传播的。通常传热 Fourier 效应是经典的扩散模型;描述热是无穷速度传播的;C-V 模型描述的物理过程不符合 Fourier 定律描述的物理过程,也称为非 Fourier 效应或反常扩散过程。过去三十多年来,数学和物理学界一致认为描述反常扩散过程有效的数学工具是分数阶微积分理论,1823 年 Abel 求解等时曲线问题的积分方程时,引入了分数阶微积分来表示该方程的解。力学家 Scott Blair<sup>[13]</sup>和 Gerasimov<sup>[14]</sup>分别独立提出了介于 Newton(牛顿)流体和 Hook(胡克)定律表征的固体模型的分数阶导数模型。物理学家 Caputo 和 Mainardi 将分数阶微积分方法运用到复杂粘弹性和流变介质,发展了若干新的力学模型。20 世纪末至今,由于激光快速加热、生物传热及热冲击过程广泛存在热扩散现象,而这些工艺过程热分析中的控制方程,用 Fourier 定律并不能准确描述其传热机制。基于多孔介质力学、粘弹性力学、软物质物理需要,分数阶导数的研究和应用再度引起广泛重视<sup>[15]</sup>。由于反常扩散所具有的历史依赖与全域相关的特征恰好可以由分数阶导数来描述,因此分数阶导数在反常扩散的研究中得到了广泛应用。另外连续时间随机(CTRW)模型描述反常扩散的成功及其与分数阶微积分的密切联系,使其成为复杂系统领域一个最为令人关注的研究方向<sup>[16]</sup>。Compte, Metzler 提出了连续时间随机行走,非局域输运理论和延迟通量流 3 种物理机制的 3 种分数阶模型<sup>[17]</sup>。Povstenko 进一步给出了 3 种分数阶模型具体记忆核及其耦合热弹性方程,并研究了一维热弹非耦合形式理论解<sup>[18]</sup>。

使用分数阶微积分理论最重要的优势是描述扩散物理机制的本构方程体现了时间和空间的整体物理时空。分数阶模型以多时空尺度模拟实现宏观方程模拟微观效应,而无需将一个系统划分为多个子系统。遭受短脉冲激光扰动时,传热会表现出不能用传统 Fourier 定律和 C-V 方程描述的奇异现象。而分数阶微分算子克服了这个缺陷。王颖泽等基于分数阶扩散理论建立 L-S, G-L, G-N 的分数型热弹性理论,比较分数阶参数对热波、弹性波传播的特性<sup>[19]</sup>。Qi 等采用分数阶 Cattaneo 模型研究激光辐照温度响应,数值计算结果表明分数阶参数对温度分布有重要影响<sup>[20]</sup>。本文利用分数阶 Taylor 级数一阶展开近似代替一阶整数阶展开,以时间分布非 Gauss 型激光源作为内热源,建立分数阶热传导方程,研究短脉冲激光加热过程分数阶阶次和延迟时间对瞬态温度场的影响规律,揭示激光加热反常扩散机制。

## 1 数学模型

考虑短脉冲激光辐照金属材料情况,短脉冲激光加热具有加热时间短和在材料表层被吸收的特点,吸收深度通常在纳米量级,和材料尺度相比很小,因此物理问题处理为半空间问题。当短脉冲加热时间短到与基质材料热化时间相当时,在表面吸收区域出现非平衡态,通常描述非平衡过程是 C-V 模型:

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

其对应的热流与温度梯度关系式为

$$q(x, t) = -\frac{k}{\tau} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) \frac{dT(x, \xi)}{dx} d\xi; \quad (2)$$

结合能量方程

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q, \quad (3)$$

得到通常意义上的双曲热波方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_p} \left( Q + \tau \frac{\partial Q}{\partial t} \right), \quad (4)$$

式中,  $q$  是热流,  $\text{W}/\text{m}^2$ ;  $\tau$  是延迟时间常数,  $\text{s}$ ;  $T$  是温度,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $Q$  是体积内热源的生成热,  $\text{W}/\text{m}^3$ ;  $t$  是时间,  $\text{s}$ ;  $a = k/\rho c_p$  是热导率,  $\text{m}^2/\text{s}$ . 该方程在微尺度传热、激光薄膜传热领域得到广泛应用.

延迟模型是另一个得到广泛应用的非 Fourier 模型<sup>[21]</sup>, 又分为单相延迟模型和双相延迟模型, 其中的相是指热流相和温度梯度力相. 最简单的是单相延迟模型, 即热流梯度相比温度梯度力相延迟. 表示为下列形式:

$$q(r, t + \tau) = -k \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5)$$

方程(5)的一阶 Taylor 级数近似展开式为

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q(r, t + \tau) \approx q(r, t) + \tau \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (6)$$

方程(6)与方程(1)是等价的, 但是得到方法不同.

C-V 模型方程(1)是方程(5)用 Taylor 级数近似展开方法得到的, Taylor 级数既有整数阶展开方法, 也有分数阶展开方法. 近年来 Odibat 等<sup>[22]</sup>介绍了分数阶 Taylor 级数展开方法, 对方程(5)进行保留一项分数阶展开得到分数阶单相延迟模型:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q(r, t + \tau) \approx q(r, t) + \frac{\tau^p}{\Gamma(p+1)} D_t^p q, \quad 0 < p < 1, \quad (7)$$

式中  $p$  是分数阶阶次,  $D_t^p f(t)$  是 Caputo 型分数阶微分, 其一般定义式为下列形式:

$$D_t^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (8)$$

Caputo 型 Laplace 变换式为下列形式:

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n. \quad (9)$$

式(7)对应的热流与温度梯度关系式为

$$q(x, t) = -\frac{k\Gamma(p+1)}{\tau^p} \int_0^t (t-\xi)^{p-1} E_{p,p}(-\tau^{-p}\Gamma(p+1)t^p) \frac{dT(x, \xi)}{dx} d\xi. \quad (10)$$

在方程(7)中  $\tau$  仍然保持时间量纲, 显然  $\tau = 0$  时方程(7)退化为 Fourier 定律表达式,  $\tau \neq 0, p = 1$  的方程(7)退化为 C-V 方程(1). 在方程(2)、(10)中, 两者积分表达式均表现出对于温度梯度的记忆特性, 分数阶模型经常用于描述处于双曲热波方程和抛物扩散模型之间的过渡物理过程.

将方程(7)代入能量方程(3), 得到一般形式的分数阶热传导方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau^p}{\Gamma(p+1)} \frac{\partial^{p+1} T}{\partial t^{p+1}} = a \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_p} \left( 1 + \frac{\tau^p}{\Gamma(p+1)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \right) Q, \quad 0 < p < 1. \quad (11)$$

当  $\tau \rightarrow 0$  时, 方程(11)退化为经典抛物线形热传导方程,  $p = 1$  时方程(11)退化为双曲热波方程(4).

为了研究分数阶参数  $p$  和延迟时间  $\tau$  对短脉冲激光加热的影响, 选择时间分布非 Gauss

型激光

$$I(t) = \frac{J_0 t}{t_p^2} \exp\left(-\frac{t}{t_p}\right), \quad (12)$$

式中,  $J_0$  是激光能量密度,  $\text{J}/\text{m}^2$ ,  $t_p$  是激光加热持续时间, ps. 考虑材料对激光反射和吸收的 Lambert-Beer 定律, 则体积内热源的生成热为

$$Q = (1 - r_f) I(t) \delta \exp(-x\delta), \quad (13)$$

式中,  $r_f$  是反射系数,  $\delta$  是吸收系数.

假设材料初始温度均匀, 短脉冲激光加热时间短, 忽略表面与外界换热, 则初始条件和边界条件为

$$T(x, t) = T_0, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0, \quad x > 0, t = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x = 0, t > 0, \quad (15)$$

$$T(x, t) = T_0, \quad x \rightarrow \infty, t > 0. \quad (16)$$

## 2 求 解

为求解方便, 引入下列无量纲量:

$$T^* = \frac{k(T - T_0)}{a\delta(1 - r_f)J_0}, \quad t^* = a\delta^2 t, \quad x^* = x\delta, \quad \tau^* = a\delta^2 \tau, \quad t_p^* = a\delta^2 t_p. \quad (17)$$

则方程(11)、(14)、(15)、(16)成为下列无量纲方程组(为方便省去变量上标星号):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau^p}{\Gamma(p+1)} \frac{\partial^{p+1} T}{\partial t^{p+1}} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + e^{-x} \left( f(t) + \frac{\tau^p}{\Gamma(p+1)} \frac{\partial^p f(t)}{\partial t^p} \right), \quad (18)$$

$$T(x, t) = 0, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0, \quad x > 0, t = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x = 0, t > 0, \quad (20)$$

$$T(x, t) = 0, \quad x \rightarrow \infty, t > 0, \quad (21)$$

其中  $f(t) = \frac{t}{t_p^2} \exp(-t/t_p)$ .

对方程(18)、(20)和(21)进行 Laplace 变换后, 得到

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \left(1 + \frac{\tau^p s^p}{\Gamma(p+1)}\right) s \bar{T} + \left(1 + \frac{\tau^p s^p}{\Gamma(p+1)}\right) \exp(-x) F(s) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = 0, \quad x = 0, \quad (23)$$

$$\bar{T}(x, s) = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (24)$$

其中  $F(s) = 1/(t_p s + 1)^2$ . 经过求解得到

$$\bar{T}(x, s) = [\exp(-x) - \bar{T}_2(x, s)] F(s) \bar{T}_1(s), \quad (25)$$

其中

$$\bar{T}_1(s) = \frac{1 + \tau^p s^p / (\Gamma(p+1))}{s + \tau^p s^{p+1} / (\Gamma(p+1)) - 1}, \quad (26)$$

$$\bar{T}_2(x, s) = \frac{\exp\left[-x\sqrt{s + \tau^p s^{p+1}/(\Gamma(p+1))}\right]}{\sqrt{s + \tau^p s^{p+1}/(\Gamma(p+1))}}. \quad (27)$$

为求得方程(23)的解析解,考虑采用拉氏逆变换卷积公式.首先对 $\bar{T}_1(s)$ 进行如下变换:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tau^p s^p/(\Gamma(p+1))}{s(1 + \tau^p s^p/(\Gamma(p+1))) - 1} = \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \tau^{-p(n+1)} (\Gamma(p+1))^{n+1} \frac{s^n}{(s^{p+1} - \tau^{-p}\Gamma(p+1))^{n+1}} + \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \tau^{-pn} (\Gamma(p+1))^n \frac{s^{n+p}}{(s^{p+1} - \tau^{-p}\Gamma(p+1))^{n+1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

由于

$$\int_0^{\infty} e^{-st} (t^{\alpha\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(n)}(\pm at^\alpha)) dt = \frac{n! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{n+1}}, \quad [23] \quad (29)$$

所以求得下列逆变换:

$$\begin{aligned} T_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \frac{\tau^{-p(n+1)} (\Gamma(p+1))^{n+1} t^{p(n+1)}}{n!} E_{p+1, p+1-n}^{(n)}(\tau^{-p}\Gamma(p+1)t^{p+1}) + \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \frac{\tau^{-pn} (\Gamma(p+1))^n t^{pn}}{n!} E_{p+1, 1-n}^{(n)}(\tau^{-p}\Gamma(p+1)t^{p+1}), \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z)$ 是两参数 Mittag-Leffler 函数 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 的分数阶微分,定义如下:

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n}{dz^n} E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha n + \beta)}. \quad (31)$$

令

$$\begin{aligned} T_2(x, t) = L^{-1} \left[ \frac{\exp(-x\sqrt{s(1 + \tau^p s^p)})}{\sqrt{s(1 + \tau^p s^p)}} \right] = \\ \frac{1}{\sqrt{t\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{pn+p/2}}{\tau^{pn+p/2}} H_{0,2}^{2,0} \left[ \frac{x^2 \tau^p}{4t^{p+1}} \middle| \begin{matrix} - \\ (0,1), (n+1/2, 1) \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad [20] \quad (32)$$

因此方程(25)的反变换解为

$$T(x, t) = T_g(t) \exp(-x) - \int_0^t T_g(\xi) T_2(x, t - \xi) d\xi, \quad (33)$$

其中

$$T_g(t) = \int_0^t T_1(\xi) f(t - \xi) d\xi. \quad (34)$$

当 $p=1$ 时,问题的解为

$$T(x, t) = T_p(t) \exp(-x) - T_q(x, t), \quad (35)$$

其中

$$T_q(x, t) = \int_{x\sqrt{\tau}}^t \exp\left(-\frac{\xi}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau}\sqrt{\xi^2 - \tau x^2}\right) H(\xi - x\sqrt{\tau}) T_p(t - \xi) d\xi, \quad (36)$$

$$T_p(t) = \int_0^t \left[ \frac{(1 - \tau r_2) \exp(-r_2 \xi) - (1 - \tau r_1) \exp(-r_1 \xi)}{t_p^2 \sqrt{1 + 4\tau^2}} \right] (t - \xi) \exp\left(\frac{t - \xi}{t_p}\right) d\xi, \quad (37)$$

其中  $I_0(x)$  是 0 阶第一类修正 Bessel (贝塞尔) 函数,  $H(t)$  是 Heaviside 函数,  $r_1 = (1 + \sqrt{1 + 4\tau^2}) / (2\tau)$ ,  $r_2 = (1 - \sqrt{1 + 4\tau^2}) / (2\tau)$ .

### 3 算例与讨论

为研究分数阶参数对温度波传播的影响, 本文选取的金属材料为金 (Au), 材料参数选取自文献[24],

$$\delta = 6.53 \times 10^7 \text{ m}, \rho c_p = 2.5 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}, k = 315 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$\tau = 10^{-11} \text{ s}, t_p = 10^{-11} \text{ s}, r_t = 0.93, J_0 = 13.4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

作为算例选取无量纲  $t_p = 4$ , 则无量纲激光能量密度-时间分布如图 1 所示.

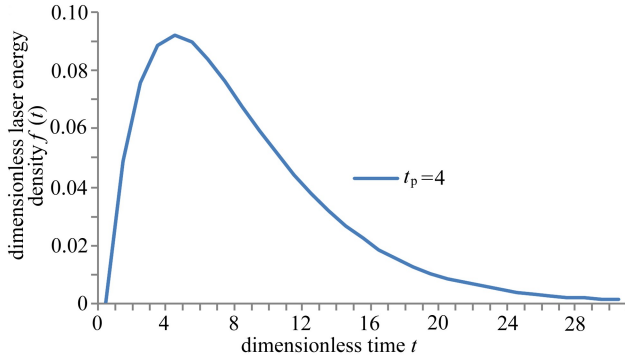


图 1 激光能量密度时间分布函数  $f(t)$

Fig. 1 Dimensionless laser energy density function  $f(t)$

#### 3.1 解的数值验证

式(33)与(35)分别是任意分数阶级数近似解和热波方程的精确解. 为检验解的正确性, 当  $p = 1$  时, 式(35)的值应与式(33)的值一致. 为此取  $\tau = 1$ , 图 2 给出了表面温度的变化情况, 由此可知解(33)是正确的.

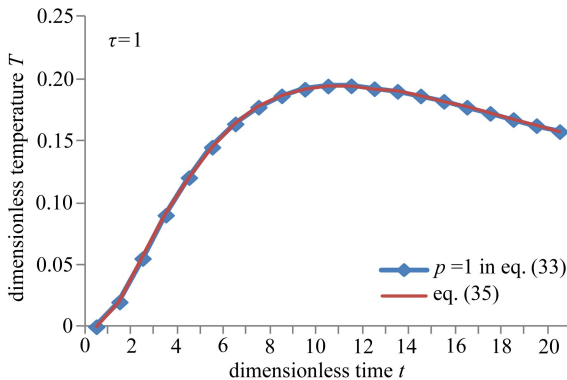


图 2 级数解与精确解数值对比

Fig. 2 Numerical comparison between the series solution and the exact solution

#### 3.2 参数 $p = 0.5$ 时温度波传播特性

对于算例材料, 可以算出无量纲滞后时间常数  $\tau = 5.3$ . 在给定参数  $p = 0.5$  时, 图 3 给出了  $x = 0, 1, 3, 5$  处无量纲温度的变化情况.  $x = 0, 1, 3, 5$  各处对激光加热响应并不是同时的, 说明热输运是存在速度的.  $x = 0, 1$  位置温度变化速度明显要比  $x = 3, 5$  处变化速度快. 激光加热表

层接受激光光能要比内部接受的多,通过扩散向内部传递,内部也接受激光能量,但量少,而且还要向更内部扩散.从表面及内部变化情况可以看出,激光对表层温度影响要比内部影响大得多.各处温度变化率不一致有可能预示着不同的热传递机制.

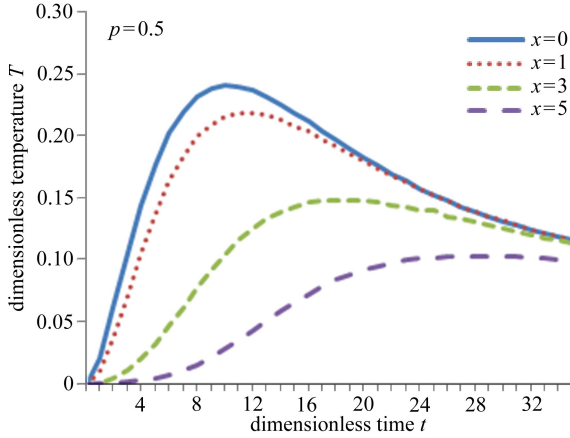


图3 任意位置温度变化

Fig. 3 Temperature variations at different locations

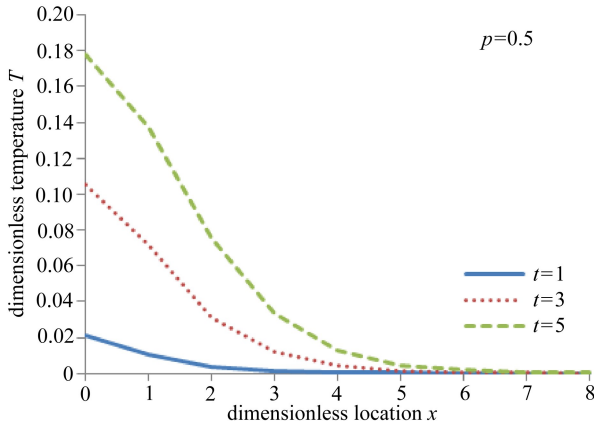


图4 任意时刻温度分布

Fig. 4 Temperature distributions at different times

图4给出 $t=1, 3, 5$ 时的温度分布情况,从不同时刻对应的温度可以看出,在表面附近温度梯度比内部温度梯度反而小,结合图3可能预示离开表面的内层热传导主要依靠平衡机制扩散传递,靠近表面的内层主要依靠材料和激光相互作用非平衡机制传递能量.

### 3.3 参数 $p$ 变化对温度波传播特性的影响

激光加热过程引起能量在介质内输运,输运过程可能存在非平衡波动机制和平衡的扩散机制, $p=0.5$ 时温度传播情况前面已经说明,由能量方程(18)中时间分数阶导数项及Caputo型分数阶微分定义,其左端第2项为

$$\frac{\tau^p}{\Gamma(1+p)} \frac{\partial^{1+p} T(x,t)}{\partial t^{1+p}} = \frac{\tau^p}{\Gamma(1+p)} \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^p} \frac{\partial^2 T(x,\xi)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (38)$$

该项大小与延迟时间常数 $\tau$ 和温度变化率项( $\partial^2 T/\partial \xi^2$ )有关.对于无限传播速度Fourier定律, $\tau=0$ ,能量输运依靠扩散机制传播,传递过程始终是平衡过程.对于 $p=1$ 的情况,在能量方程(4)中,该项变为 $\partial^2 T/\partial t^2$ ,该项只与当时当地温度变化率有关;对应热流传播方程是方程

(2),其中与温度梯度卷积的积分核函数是指数函数.对于给定材料时间常数  $\tau$  且  $0 < p < 1$  时,该项是当地温度变化速度的时间积分,具有对温度变化率的记忆作用;此时热流传播方程是方程(10),其中与温度梯度卷积的积分核函数是 Mittag-Leffler 函数,该函数与分数阶次  $p$  相关,因此探讨参数  $p$  对温度变化和热流传播影响是非常有意义的.参数  $p$  对温度传播的影响如图 5~7 所示.

图 5~7 分别对应分数阶参数  $p$  对表面及内部任意两点处温度变化的影响,而任意两点处 C-V 热波方程升温速度最快,Fourier 扩散方程升温速度最慢,  $0 < p < 1$  的分数阶热波方程温度变化速率始终介于其间.参数  $p$  越大温度变化速度越快,相对 Fourier 扩散方程对应温度升高幅度越高,说明偏离纯扩散过程越明显.在  $\tau = 0$  时,  $x = 3, 5$  不同位置温度数值几乎同时达到最大,因为 Fourier 定律隐含热传播无限大速度所致.  $0 < p < 1$  时,相同的  $p$  值,离开表面越远,达到最高温度时间越迟,这一点与热传播存在速度有关.内部任意点分数阶热波方程对应温度响应都存在延迟,距离越远延迟越大.任意位置时  $p$  越大,延迟越大,而 Fourier 扩散方程却不存在延迟,说明参数  $p$  越大热传播速度越慢.分数阶热传导方程在热传播速度、温度变化速度和温度变化幅度方面都处于 Fourier 扩散方程和热波方程的中间地带<sup>[25]</sup>,这在图 8 中也得以体现.

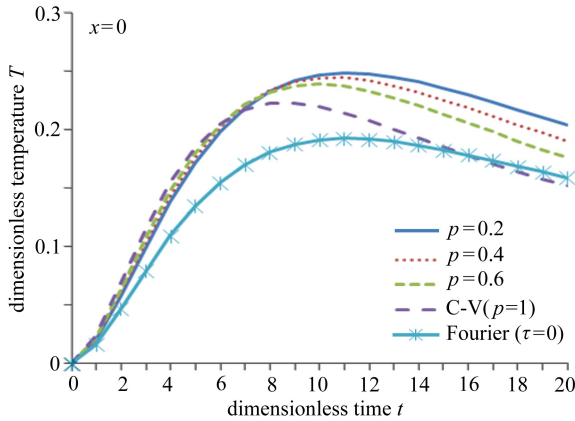


图 5 参数  $p$  对表面温度变化的影响

Fig. 5 Effects of parameter  $p$  on the surface temperature variations

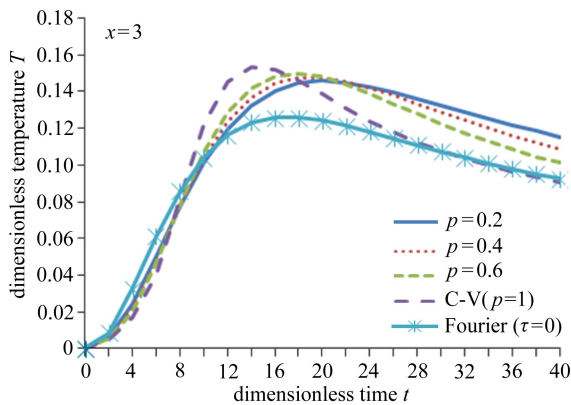
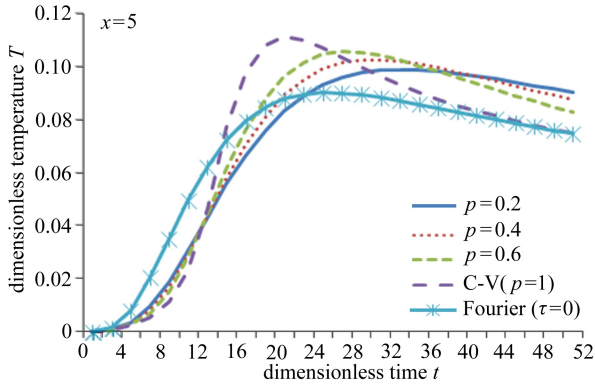
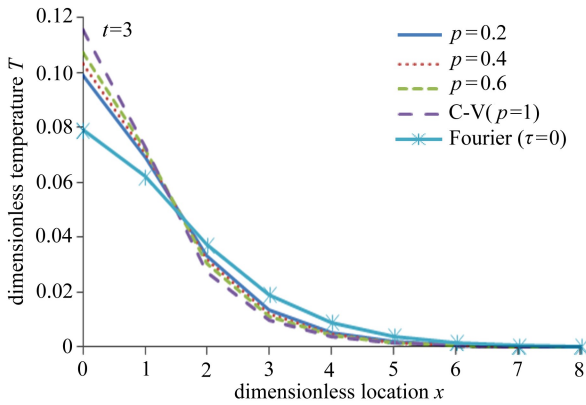


图 6 参数  $p$  对  $x = 3$  处温度变化的影响

Fig. 6 Effects of parameter  $p$  on the dimensionless temperature variations for  $x = 3$



图 7 参数  $p$  对  $x = 5$  处温度变化的影响Fig. 7 Effects of parameter  $p$  on the dimensionless temperature variations for  $x = 5$ 图 8 参数  $p$  对任意时刻温度分布的影响Fig. 8 Effects of parameter  $p$  on the dimensionless temperature distributions for  $t = 3$ 

## 4 结 论

本文基于分数阶 Taylor 级数展开定理,得到分数阶单相延迟定律,并依此定律建立分数阶热传导方程,应用 Laplace 变换方法得到短脉冲激光加热半空间的解析解.数值研究非 Gauss 激光脉冲辐照材料中的热传导机制,结果表明热波传播与分数阶参数的依赖关系,得出热传播速度不仅与分数阶阶次有关,也与延迟时间常数有关,分数阶阶次增加时,热传播速度减小,温升幅度增加.对于表面附近可以考虑波动传播机制,对于远离表面区域热传输主要依靠扩散机制.

### 参考文献 (References):

- [1] Vyawahare V A, Nataraj P S V. Fractional-order modeling of neutron transport in a nuclear reactor [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2013, **37**(23): 9747-9767.
- [2] 刘静. 微米/纳米尺度传热学[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 161-163. (LIU Jing. *Nano/Micro Scale Heat Transfer*[M]. Beijing: Science Press, 2001: 161-163. (in Chinese))
- [3] Joseph D D, Preziosi L. Heat waves[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1989, **61**(1): 41-73.
- [4] Cattaneo C. Sur une forme de l' équation de la chaleur éliminant le paradoxe d' une propagation instantanée[J]. *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences*, 1958, **247**: 431-433.

- [5] Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur[J]. *Compte Rendus*, 1958, **246**: 3154-3155.
- [6] 黄峰, 牛燕雄, 汪岳峰, 段晓峰. 光学窗口材料激光辐照热力效应的解析计算研究[J]. 光学学报, 2006, **26**(4): 576-580. (HUANG Feng, NIU Yan-xiong, WANG Yue-feng, DUAN Xiao-feng. Calculation of thermal and mechanical effect induced by laser in optical window materials[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(4): 576-580. (in Chinese))
- [7] 黄海明, 孙岳. 脉冲强激光辐照下材料响应的非傅里叶效应[J]. 强激光与粒子束, 2009, **21**(6): 808-812. (HUANG Hai-ming, SUN Yue. Non-Fourier response of target irradiated by multi-pulse high power laser[J]. *High Power Laser and Particle Beam*, 2009, **21**(6): 808-812. (in Chinese))
- [8] Yilbas B S, Al-Aqeeli N. Analytical investigation into laser pulse heating and thermal stresses [J]. *Optics & Laser Technology*, 2009, **41**(2): 132-139.
- [9] Yilbas B S, Al-Dweik A Y. Laser short pulse heating of metal nano-wires[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2012, **407**(22): 4473-4477.
- [10] Yilbas B S, Al-Dweik A Y, Bin Mansour S. Analytical solution of hyperbolic heat conduction equation in relation to laser short-pulse heating[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2011, **406**(8): 1550-1555.
- [11] JIANG Fang-ming, LIU Deng-ying, ZHOU Jian-hua. Non-Fourier heat conduction phenomena in porous material heated by microsecond laser pulse[J]. *Microscale Thermophysical Engineering*, 2003, **6**(4): 331-346.
- [12] 蒋方明, 刘登瀛. 多孔材料内非傅里叶导热现象的实验研究结果及理论分析[J]. 工程热物理学报, 2001, **22**(增刊): 77-80. (JIANG Fang-ming, LIU Deng-ying. Experimental and analytical results of non-Fourier conduction phenomenon in porous material[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2001, **22**(Suppl): 77-80. (in Chinese))
- [13] Scott Blair G W. The role of psychophysics in rheology[J]. *Journal of Colloid Science*, 1947, **2**(1): 21-32.
- [14] Gerasimov A N. A generalization of linear laws of deformation and its application to inner friction problems[J]. *Prikl Matem i Mekh*, 1948, **12**(3): 251-259.
- [15] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*[M]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [16] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion; a fractional dynamics approach[J]. *Physics Reports*, 2000, **339**(1): 1-77.
- [17] Compte A, Metzler R. The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport process[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1997, **30**(21): 7277-7289.
- [18] Povstenko Y Z. Fractional Cattaneo-type equations and generalized thermo-elasticity[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2011, **34**(2): 97-114.
- [19] 王颖泽, 王谦, 刘栋, 宋新南. 弹性半空间热冲击问题的广义热弹性解[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 640-651. (WANG Ying-ze, WANG Qian, LIU Dong, SONG Xin-nan. Generalized thermoelastic solutions to the problems of thermal shock on elastic half space[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 640-651. (in Chinese))
- [20] QI Hai-tao, XU Huan-ying, GUO Xin-wei. The Cattaneo-type time fractional heat conduction equation for laser heating[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2013, **66**(5): 824-831.

- [21] Tzou D Y. *Macro- to Microscale Heat Transfer: the Lagging Behavior*[M]. Washington DC: Taylor & Francis, 1996; 1-64.
- [22] Odibat Z M, Shawagfeh N T. Generalized Taylor's formula[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **186**(1): 286-293.
- [23] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999: 150.
- [24] NIU Tian-chan, DAI Wei-zhong. A hyperbolic two-step model based finite difference scheme for studying thermal deformation in a double-layered thin film exposed to ultra-short-pulsed lasers[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2009, **48**(1): 34-49.
- [25] Xu M Y, Tan W C. Intermediate processes and critical phenomena: theory, method and progress of fractional operators and their applications to modern mechanics[J]. *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2006, **49**(3): 257-272.

## Study on the Transient Temperature Field Based on the Fractional Heat Conduction Equation for Laser Heating

XU Guang-ying, WANG Jin-bao, HAN Zhi

(School of Maritime and Civil Engineering, Zhejiang Ocean University,  
Zhoushan, Zhejiang 316022, P.R.China)

**Abstract:** Based on the fractional Taylor series expansion principle, the 1st-order fractional approximate heat conduction constitutive equation was formulated through expansion of the single-phase lag model. Combined with the energy equation, the fractional heat conduction equations were built for short pulse laser heating, and the Laplace transform was applied to solve the equations and obtain the analytical solution of the volumetric heat source temperature field of the non-Gauss time type. The properties of the temperature wave influenced by the fractional order were investigated based on specific examples. The thermal wave velocity decreases and its amplitude increases with the fractional order. The fractional heat conduction equation is applicable for depicting the intermediate heat conduction process between that of the Fourier diffusion equation and that of the thermal wave equation. The correlation between the heat conduction mechanism and the fractional derivative terms in the fractional heat conduction equation was also fully discussed.

**Key words:** fractional Cattaneo heat conduction; laser heating; fractional derivative; fractional Taylor's formula