

# 双势理论用于处理非关联材料本构\*

周洋靖, 冯志强, 宁坡

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

(本刊编委冯志强来稿)

**摘要:** 基于传统塑性力学框架下的显式积分算法和基于 Simo-Taylor 提出的回退映射隐式积分算法是固体力学中两大经典本构积分算法.以经典的非关联材料模型 Drucker-Prager (D-P) 模型和 Armstrong-Frederick (A-F) 模型为例分别回顾了显式积分算法和隐式积分算法.以双势理论为基础,将双势的概念运用到材料的自由能中,将材料分为显式标准材料和隐式标准材料.两种传统积分算法都能有效地处理显式标准材料的本构关系,但在处理隐式标准材料时却存在一定的问题.双势积分算法是建立在双势理论下的本构积分算法,此算法不仅能够处理显式标准材料,对于处理隐式标准材料,也存在一定的优势.通过变分原理推导了双势积分算法解的存在性,运用双势积分算法处理 Drucker-Prager 模型和 Armstrong-Frederick 模型,并与经典传统积分算法得到的结果进行对比,验证了双势本构积分算法的稳定性和准确性.

**关键词:** 双势积分算法; 显式/隐式积分算法; 非关联本构; D-P 模型; A-F 模型  
**中图分类号:** O39; O341 **文献标志码:** A  
**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.08.001

## 引言

材料非线性是固体力学中一个重要的研究方向,能正确模拟材料应力-应变关系,数值实现材料的本构积分,是材料非线性研究的核心<sup>[1]</sup>,而准确高效的非关联本构模拟方法,能更好地指导工程实践<sup>[2]</sup>.根据材料模型具体形式的不同,其适合的本构积分算法也是不同的.

针对材料非线性应力-应变关系,以传统的塑性力学为基础,推导出了显式积分算法<sup>[3]</sup>,在每一步迭代计算中,只通过全局结构满足整体平衡来计算求解应力增量.显式积分算法的优势在于只要得到材料的屈服势函数  $F$  与流动势函数  $P$  的具体表达式,就能显式得到模型的本构关系,计算塑性乘子不需要进行迭代计算.但是由于每一步只是全局结构满足整体平衡条件,计算过程中可能会造成计算结果的不稳定,因此,为保证显式积分算法的计算稳定性,需要适当减小计算步长.在一定程度上,这种处理方式降低了大型模型的计算效率<sup>[4]</sup>.

Simo 和 Taylor 于 1985 年提出了一种回退映射隐式积分算法<sup>[5]</sup>,针对关联弹塑性材料模型,模拟效果较为理想.关联弹塑性模型,其流动势函数  $P$  与屈服势函数  $F$  具有关联性,其流动

\* 收稿日期: 2015-04-28; 修订日期: 2015-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(11372260)

作者简介: 周洋靖(1988—),男,四川人,博士生(通讯作者. E-mail: yjzhou1988@qq.com);  
冯志强(1963—),男,重庆人,教授,博士生导师(E-mail: feng@ufrst.univ-evry.fr);  
宁坡(1990—),男,湖南人,博士生(E-mail: 351528123@qq.com).

法则满足传统正交性.隐式积分算法,在每一步迭代计算中,不仅全局结构满足整体平衡方程,局部点仍能满足模型本构关系,这种算法计算更为稳定,效率相对更高.但是隐式积分算法处理非关联弹塑性模型,其算法的稳定性和准确性取决于流动势函数  $P$  的选取,不同形式的流动势函数  $P$  对本构模拟结果的准确性和稳定性影响较大.

早在 1949 年, Fenchel 在 Legendre 变换的基础上提出了一种 Fenchel 变换<sup>[6]</sup>,从数学层面上提出了针对于对偶变量的 Fenchel 不等式.以此为理论基础, de Saxcé 和 Feng 于 1991 年首次提出了双势理论 (bi-potential theory)<sup>[7]</sup>.1992 年, de Saxcé 在文献[8]中,根据材料自由能的形式,将材料分为显式标准材料 (explicit standard material) 和隐式标准材料 (implicit standard material).1995 年, de Saxcé 在双势理论的基础上运用一种称之为双势 (bi-potential) 的函数统一表示材料的屈服势函数和塑性势函数,提出了双势积分算法,此算法能有效处理隐式标准材料的本构问题<sup>[9]</sup>.2003 年, Vallée 等于文献[10]中,对如何利用材料中的对偶变量构造双势函数进行了总结.近 20 年来,研究者们陆续对双势积分算法在隐式标准材料本构中的应用进行了相应的研究,尤其是针对接触摩擦本构问题,非关联随动硬化本构问题,非关联土体材料本构问题.

接触摩擦本构为典型的隐式标准材料本构,1995 年, Feng 基于双势理论,提出了一套有效处理接触摩擦本构问题的双势积分算法<sup>[11]</sup>.1998 年 de Saxcé 和 Feng 于文献[12]中,对双势积分算法在接触摩擦本构中的应用进行了总结,证明了双势积分算法较传统算法能更为有效地解决接触摩擦问题,其双势函数能等价表示 Signorni 条件和 Coulomb 条件<sup>[13]</sup>.之后, Feng 等将这种算法发展到伴随大变形的接触摩擦问题中,并运用到解决各向异性接触问题<sup>[14]</sup>和冲击动力学接触问题<sup>[15-17]</sup>.2008 年, Joli 和 Feng 基于双势理论推导出 Uzawa 算法优化求解整体非线性方程,并与 Newton 算法进行了分析和比较<sup>[18]</sup>.

研究者们也将双势理论应用在处理非关联随动硬化材料模型本构上.2001 年, Bodovillé 等在文献[19]中,讨论如何运用双势积分算法处理非关联随动硬化本构模型.2009 年, Bouby 等结合微动分析,更具体地阐述了双势积分算法在处理非关联随动硬化模型的优势<sup>[20]</sup>.2010 年, Chaaba 结合极限分析和双势积分算法处理非关联随动强化模型<sup>[21]</sup>,得到了较为理想的结果.

根据非关联土体材料能量势函数的表达形式可知,非关联土体材料也属于隐式标准材料<sup>[22]</sup>.1995 年, de Saxcé 在文献[9]中,证明了采用双势理论处理非关联土体材料本构问题的可行性.2001 年, Bousshine 等于文献[23]中,推导出了双势积分算法处理非关联土体材料本构的具体形式.2003 年, Hjjaj 等基于双势积分算法,对非关联土体本构问题中的奇异点进行了讨论,保证了双势理论在非关联土体材料本构应用中的严密性<sup>[24]</sup>.Berga 于 2008 年针对非关联土体具体的理想塑性模型,给出了其双势积分算法的具体步骤<sup>[25]</sup>,并于 2012 年对双势积分算法在非关联土体材料中的应用进行了总结<sup>[26]</sup>,且进行了数值实现<sup>[27]</sup>.2014 年, Zhou 等结合 Berga 的工作,推导出了非关联岩体材料的双势表达式,并进行了简单的数值模拟<sup>[28]</sup>.

研究表明,双势积分算法不仅能够有效处理显式标准材料,在处理隐式标准材料时,也能充分发挥其自身优势,能更严格地表述材料的正交定理,算法具有准确性、高效性<sup>[29]</sup>.

本文通过两个常用的隐式标准材料模型: Drucker-Prager (D-P) 模型和 Armstrong-Frederick (A-F) 模型,将双势积分算法与传统显式积分算法和隐式积分算法进行了比较和讨论,证明双势积分算法在处理隐式标准材料时具有自身的优势,并通过数值实现验证了双势积分算法的稳定性和准确性.

# 1 双势理论

de Saxcé 于文献[9]中,以 Legendre 变换为基础,通过分析材料模型能量势函数形式,将材料分为显式标准材料和隐式标准材料,并提出了双势函数的概念。

设  $\boldsymbol{\sigma}$  为应力矢量,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  为应变率矢量,二者为一对对偶变量.则根据连续介质力学的相关知识可以知道,两个矢量的点积  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ , 可以表示为材料变形过程中能量的耗散率。

## 1.1 显式标准材料

对于显式标准材料,其耗散的能函数可以分解为两种势函数之和,即应力势函数  $\phi(\boldsymbol{\sigma})$  和塑性应变率势函数  $\psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$ , 且  $\phi(\boldsymbol{\sigma})$  和  $\psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  满足由 Legendre 变换得到的 Fenchel 不等式:

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}): \phi(\boldsymbol{\sigma}) + \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (1)$$

当且仅当  $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  满足材料本构关系时等号成立,此时

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) + \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2)$$

设  $(\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\epsilon}}')$  为  $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  极小邻域内的一点,则对不等式(1)两边作如下变换:

$$\forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}}': \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}') - \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \leq \frac{\psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}') - \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (3)$$

$$\forall \boldsymbol{\sigma}': \phi(\boldsymbol{\sigma}') - \phi(\boldsymbol{\sigma}) \geq \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \frac{\phi(\boldsymbol{\sigma}') - \phi(\boldsymbol{\sigma})}{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4)$$

可以得到显式标准材料正交准则的一般表达式

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \in \partial\phi(\boldsymbol{\sigma}). \quad (5)$$

## 1.2 隐式标准材料

对于隐式标准材料,其耗散的能函数不能够被分解,定义一种双势函数  $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  表示其耗散能函数,同样,  $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  满足 Fenchel 不等式

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}): b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (6)$$

当且仅当  $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  满足材料本构关系时等号成立,此时

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (7)$$

设  $(\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\epsilon}}')$  为  $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  极小邻域内的一点,对不等式(6)两边作如下变换:

$$\forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}}': b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}') - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \leq \frac{b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}') - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (8)$$

$$\forall \boldsymbol{\sigma}': b(\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \geq \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \frac{b(\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}}, \quad (9)$$

可以得到隐式标准材料正交准则的一般表达式

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\boldsymbol{\sigma}} b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}). \quad (10)$$

若令  $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \phi(\boldsymbol{\sigma}) + \psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ , 则  $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  满足显式标准材料的形式,可以认为显式标准材料是隐式标准材料的特殊形式。

## 1.3 弹塑性材料的双势函数

运用双势理论处理弹塑性材料,可以分别就弹性状态和塑性状态进行分析,并将率形式转化为增量形式,于是可以得到:

当材料处于弹性状态时,满足弹性状态本构关系,此时材料具有显式标准材料的特征,则弹性状态下的材料双势函数可以表示为

$$\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta \psi(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^e) + \Delta \phi(\Delta \boldsymbol{\sigma}); \quad (11)$$

当材料处于塑性状态时,满足塑性状态的本构关系,有

$$\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (12)$$

由于塑性状态与材料加载历史  $\boldsymbol{\sigma}_0$  相关,则有

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \in \partial_{\boldsymbol{\sigma}} b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}), \quad (13)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (14)$$

所以

$$\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (15)$$

可以得到增量形式弹塑性状态的双势函数表达式

$$\Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} [\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\sigma}) + \Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma})]. \quad (16)$$

以上推导中,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  为应力张量增量,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  为应变张量增量,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$  为弹性应变张量增量,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  为塑性应变张量增量,  $\Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma})$  表示弹塑性状态下的双势函数增量,  $\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\sigma})$  表示弹性状态下的双势函数增量,  $\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma})$  表示塑性状态下的双势函数增量,  $\inf$  为取下确界. 式(16)也是弹塑性材料双势积分算法的基础.

## 2 显式积分算法

### 2.1 显式积分算法概述

设材料屈服势函数为  $F = F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})$ , 塑性势函数为  $P = P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})$ , 其中,  $\boldsymbol{\sigma}$  为材料的应力张量,  $\mathbf{k}$  和  $\mathbf{m}$  为与材料硬化相关的向量变量. 对于显式标准材料, 屈服势函数  $F$  与塑性势函数  $P$  具有关联性, 即  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})$ ; 对于隐式标准材料, 屈服势函数  $F$  不等于塑性势函数  $P$ , 即  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) \neq P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})$ .

材料流动准则与塑性势函数  $P$  有关, 可以表达为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (17)$$

其中,  $d\lambda$  为塑性乘子. 根据传统塑性力学的推导可知, 其表达式为

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}^e d\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}^e \left\{ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}}, \quad (18)$$

其中,  $A$  是与模型硬化准则相关的量,  $\mathbf{D}^e$  为弹性矩阵,  $\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}$  和  $\left\{ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}$  与材料势函数的具体形式有关. 由式(18)可以看出, 在显式积分算法中, 塑性乘子  $d\lambda$  的表达式为显式的.

### 2.2 Drucker-Prager 模型

非关联理想弹塑性模型 Drucker-Prager 模型(以下简称 D-P 模型)<sup>[30]</sup> 是典型的隐式标准材料. 对 D-P 模型, 其塑性本构受到静水压力的影响, 因此屈服势函数采用  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = F(I_1, J_2, J_3, \mathbf{k})$  的形式, 塑性势函数采用  $P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = P(I_1, J_2, J_3, \mathbf{m})$  的形式, 其中:

$I_1$  为应力张量第一不变量

$$I_1 = 3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (19)$$

$J_2$  为应力偏张量第二不变量

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \quad (20)$$

$J_3$  为应力偏张量第三不变量

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2, \quad (21)$$

上式中,  $\sigma_m$  为平均应力,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{yz} & S_z \end{bmatrix}.$$

根据文献[31]可知,对于普通 D-P 模型,硬化向量变量  $\mathbf{k}$  和  $\mathbf{m}$  退化为标量  $k$  和  $m$ ,屈服势函数  $F$  和塑性势函数  $P$  具体形式如下:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = F(I_1, J_2, J_3, k) = \sqrt{J_2} + \alpha_1 I_1 - k, \quad (22)$$

$$P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = P(I_1, J_2, J_3, m) = \sqrt{J_2} + \alpha_2 I_1 - m, \quad (23)$$

其中,参数

$$\alpha_1 = \frac{\sin \phi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \phi}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sin \theta}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \theta}}, \quad k = m = \frac{\sqrt{3} c \cos \phi}{\sqrt{3 + \sin^2 \phi}},$$

$c$  为材料粘聚力,  $\phi$  为材料内摩擦角.

### 2.3 Drucker-Prager 模型的显式积分算法

根据式(22), (23) D-P 模型的屈服势函数  $F$  和塑性势函数  $P$  的具体形式,分别对应应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  求偏导数,可以得到  $\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})/\partial \boldsymbol{\sigma}$  和  $\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})/\partial \boldsymbol{\sigma}$  的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial F(I_1, J_2, J_3, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \\ &C_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C_2 \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial P(I_1, J_2, J_3, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial P}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \\ &D_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + D_2 \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + D_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [S_x \quad S_y \quad S_z \quad 2\tau_{yz} \quad 2\tau_{zx} \quad 2\tau_{xy}]^T, \quad (27)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} S_y S_z - \tau_{yz}^2 \\ S_z S_x - \tau_{zx}^2 \\ S_x S_y - \tau_{xy}^2 \\ 2(\tau_{xy} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}) \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xy} - S_y \tau_{zx}) \\ 2(\tau_{zx} \tau_{yz} - S_z \tau_{xy}) \end{bmatrix} + \frac{1}{3} J_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

令

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{3 + \sin^2 \phi}}, & D_1 = \frac{\partial P}{\partial \sigma_m} = \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sqrt{3 + \sin^2 \theta}}, \\ C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = 1, & D_2 = \frac{\partial P}{\partial \sqrt{J_2}} = 1, \\ C_3 = \frac{\partial F}{\partial J_3} = 0, & D_3 = \frac{\partial P}{\partial J_3} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

由式(29)可以得到,经典的理想弹塑性 D-P 模型显示积分算法中的 6 个参数值.由于只考虑理想弹塑性的 D-P 模型,所以式(18)中  $A = 0$ .结合式(18),(24),(25),(29)可得到塑性乘子  $d\lambda$  的显式表达式.

### 3 隐式积分算法

#### 3.1 隐式积分算法概述

Simo 和 Taylor 于 1985 年提出的回退映射隐式积分算法<sup>[5]</sup>相对于显式积分算法具有较高的稳定性,此算法不仅使全局结构满足整体平衡方程,同时,也让局部点满足模型本构关系,算法中应力修正示意图如图 1 所示.

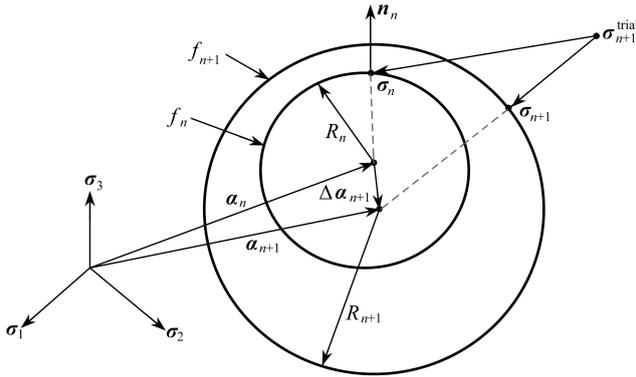


图 1 应力修正算法示意图

Fig. 1 The diagram of stress correction algorithm

在一个迭代步中,屈服面由原来的  $f_n$  变化到了  $f_{n+1}$ ;  $R_n$  与  $R_{n+1}$  反映了一个迭代步中各向同性强化的量,即为屈服面半径大小的变化;  $\alpha_n$  与  $\alpha_{n+1}$  反映了一个迭代步中随动强化的量,即为屈服面中心位置的变化.

如图 1 所示,在第  $n+1$  步迭代中,首先进行试应力  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  的计算,由  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  可以得到  $f_{n+1}$ ,通过  $f_{n+1}$  进行弹塑性状态的判断.

若为弹性状态,此时,  $f_{n+1} < 0$ ,满足屈服准则弹性区域的要求,所以此时的  $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ .由于此时处于弹性状态,所以屈服面中心位置不变,即  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ ,屈服面半径大小不变,即  $R_{n+1} = R_n$ .若为塑性状态,此时,  $f_{n+1} > 0$ ,不满足屈服准则塑性的要求( $f_{n+1} = 0$ ),所以需要进行修正,即所谓的本构积分.对  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  进行修正,通过将  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  向屈服面投射得到真实的应力  $\sigma_{n+1}$ ,在此期间,也可以算出得到  $\alpha_{n+1}$  与  $R_{n+1}$ .

#### 3.2 Armstrong-Frederick 模型

隐式标准材料非关联随动强化模型 Armstrong-Frederick 模型(以下简称 A-F 模型)<sup>[32]</sup>,其

屈服势函数  $F$  和流动势函数  $P$  为

$$F = f = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}} - \sigma_y, \quad (30)$$

$$P = f + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{H} \mathbf{X} : \mathbf{X}, \quad (31)$$

其中,  $\sigma_y$  为模型单向拉伸时的屈服应力,  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{s} - \mathbf{X}$ , “:” 为双点积符号,  $\mathbf{s}$  为应力偏张量,  $\mathbf{X}$  由 A-F 模型硬化准则定义

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\gamma}{H} \mathbf{X} \dot{\rho}, \\ \dot{\mathbf{X}} = H \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \end{cases} \quad (32)$$

及

$$\dot{\mathbf{X}} = H \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \gamma \mathbf{X} \dot{\rho}, \quad (33)$$

$\gamma, H$  均为模型参数,  $\dot{\rho}$  为等效塑性应变率, 也为塑性乘子, 即  $\dot{\lambda} = \dot{\rho} = \sqrt{(2/3)(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)}$ .

A-F 模型流动法则可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (34)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{X}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} - \dot{\lambda} \frac{\gamma}{H} \mathbf{X}. \quad (35)$$

### 3.3 Armstrong-Frederick 模型的隐式积分算法

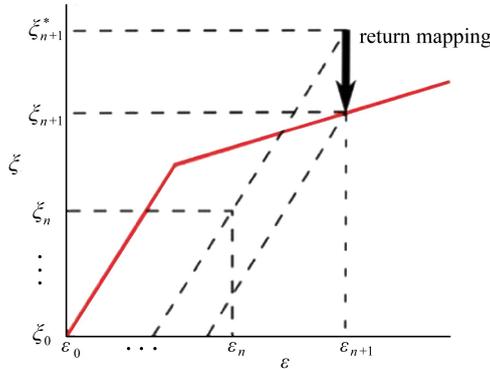


图2 A-F 模型隐式积分算法示意图

Fig. 2 The implicit integral algorithm of the A-F model

图2为 A-F 模型的隐式积分算法示意图, 算法基本步骤可以总结如下:

① 计算预测应力  $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^* = \boldsymbol{\xi}_n + \text{dev}(\mathbf{D}^e : \Delta \boldsymbol{\epsilon}). \quad (36)$$

② 判断屈服条件  $f(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*) < 0$  或  $f(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*) \geq 0$ .

③ 若  $f(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*) < 0$ , 此时模型处于弹性状态, 则  $\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^*$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \mathbf{0}$ .

④ 若  $f(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*) \geq 0$ , 此时模型处于塑性状态, 需要通过将  $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*$  向  $f_{n+1} = 0$  的面上投影, 得到最近的投射点, 即为  $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ .

由  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ , 可以知道

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \mathbf{D}^e : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p), \quad (37)$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \quad (38)$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{n+1} &= \text{dev}(\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_n + \mathbf{D}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \Delta \mathbf{X} = \\ &\boldsymbol{\xi}_n + \text{dev}(\mathbf{D}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \Delta \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (39)$$

根据式(32)可以得到

$$\mathbf{X}_{n+1} = \theta H(\boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (40)$$

其中  $\theta = 1/(1 + \gamma \Delta p)$ . 所以,  $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$  表达式可化为

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^* - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta p \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*\|} (2\mu + \theta H) + (1 - \theta) H \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (41)$$

根据屈服条件

$$f_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} : \boldsymbol{\xi}_{n+1} - \sigma_y = 0, \quad (42)$$

有

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \boldsymbol{\xi}_{n+1}^* - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta p \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*\|} (2\mu + \theta H) + (1 - \theta) H \boldsymbol{\alpha}_n \right\| = \sigma_y. \quad (43)$$

对式(43)运用 Newton-Raphson 迭代, 可以隐式求得塑性乘子  $\Delta p$ .

## 4 双势本构积分

### 4.1 双势积分算法解的存在性

根据弹性力学中的平衡方程, 由积分变分原理, 可以得到

$$\int_V \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) dV - \int_V \Delta \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{u} dV - \int_S \Delta \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{u} dS = 0, \quad (44)$$

其中,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  为应力增量,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})$  为应变增量, 是位移增量  $\Delta \mathbf{u}$  的函数,  $\Delta \mathbf{f}$  为体力,  $\Delta \mathbf{T}$  为面力. 引入双势函数

$$\Delta b(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \geq \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}), \quad (45)$$

式(44)变换为

$$\Delta B(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \mathbf{u}) = \int_V \Delta b(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) dV - \int_V \Delta \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{u} dV - \int_S \Delta \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{u} dS. \quad (46)$$

可以看出,  $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \mathbf{u})$  为满足材料本构关系边值问题的解, 即满足位移平衡条件(kinematically admissible)和力平衡条件(statically admissible).

位移平衡条件

$$\text{K.A.} : \begin{cases} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) = \text{grad}_V \Delta \mathbf{u}, & \text{in } \Omega, \\ \Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{\mathbf{u}}, & \text{on } \Gamma_u; \end{cases} \quad (47)$$

力平衡条件

$$\text{S.A.} : \begin{cases} \text{div } \Delta \boldsymbol{\sigma} + \Delta \bar{\mathbf{f}} = 0, & \text{in } \Omega, \\ \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \Delta \bar{\mathbf{t}}, & \text{on } \Gamma_t. \end{cases} \quad (48)$$

设  $\Delta \mathbf{u}^*$  为满足位移平衡条件的虚位移, 则整体平衡方程

$$\Delta B(\Delta\sigma, \Delta u^*) = \int_V \Delta b(\Delta\sigma, \Delta\epsilon^*(\Delta u^*)) dV - \int_V \Delta f \cdot \Delta u^* dV - \int_S \Delta T \cdot \Delta u^* dS, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Delta B(\Delta\sigma, \Delta u^*) - \Delta B(\Delta\sigma, \Delta u) &\geq \\ &\int_V \Delta b \{ \Delta\sigma, [\Delta\epsilon^*(\Delta u^*) - \Delta\epsilon(\Delta u)] \} dV - \\ &\int_V \Delta f \cdot (\Delta u^* - \Delta u) dV - \int_S \Delta T \cdot (\Delta u^* - \Delta u) dS. \end{aligned} \quad (50)$$

由于  $\Delta u^*$  与  $\Delta u$  都满足位移平衡条件,所以

$$\Delta B(\Delta\sigma, \Delta u^*) \geq \Delta B(\Delta\sigma, \Delta u). \quad (51)$$

同理,设  $\Delta\sigma^*$  为满足力平衡条件的虚应力,则整体的虚功方程

$$\Delta B(\Delta\sigma^*, \Delta u) = \int_V \Delta b(\Delta\sigma^*, \Delta\epsilon(\Delta u)) dV - \int_V \Delta f^* \cdot \Delta u dV - \int_S \Delta T^* \cdot \Delta u dS. \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Delta B(\Delta\sigma^*, \Delta u) - \Delta B(\Delta\sigma, \Delta u) &\geq \\ &\int_V \Delta b[\Delta\sigma^* - \Delta\sigma, \Delta\epsilon(\Delta u)] dV - \int_V (\Delta f^* - \Delta f) \cdot \Delta u dV - \\ &\int_S (\Delta T^* - \Delta T) \cdot \Delta u dS. \end{aligned} \quad (53)$$

由于  $\Delta\sigma^*$  与  $\Delta\sigma$  都满足力平衡条件,所以

$$\Delta B(\Delta\sigma^*, \Delta u) \geq \Delta B(\Delta\sigma, \Delta u). \quad (54)$$

从式(51), (54)可以看出,  $\Delta B$  随着  $(\Delta\sigma, \Delta u)$  趋于真实解而趋于收敛,这也证明了双势积分算法解的存在性.结合弹塑性材料双势函数的表达式(16),根据不同的弹塑性材料模型可以得到对应的双势积分算法.

### 4.2 Drucker-Prager 模型的双势积分算法

经典理想弹塑性模型 D-P 模型,由式(11),在满足 D-P 模型弹性本构的条件下,有弹性状态在增量形式下的双势函数:

$$\begin{aligned} \Delta b^e(\Delta\epsilon^e, \Delta\sigma) &= \frac{K_c}{2}(\Delta e_m^e)^2 + \mu \|\Delta e^e\|^2 + \frac{1}{2K_c}(\Delta s_m)^2 + \frac{1}{4\mu} \|\Delta s\|^2 = \\ &\frac{K_c}{2}(\Delta e_m - \Delta e_m^p)^2 + \mu \|\Delta e - \Delta e^p\|^2 + \frac{1}{2K_c}(\Delta s_m)^2 + \frac{1}{4\mu} \|\Delta s\|^2, \end{aligned} \quad (55)$$

其中,  $K_c$  为体积模量,  $\mu$  为剪切模量,  $\Delta e_m$  为应变张量的迹  $\Delta e_m = \text{tr}(\Delta\epsilon)$ ,  $\Delta e$  为应变张量的偏张量  $\Delta e = \Delta\epsilon - (\Delta e_m/3)\mathbf{I}$ ,  $\Delta s_m$  为平均应力  $\Delta s_m = (1/3)\text{tr}(\Delta\sigma)$ ,  $\Delta s$  为应力的偏张量  $\Delta s = \Delta\sigma - \Delta s_m\mathbf{I}$ , 上标“e”表示弹性状态,上标“p”表示塑性状态,  $\mathbf{I}$  为单位张量.

根据式(15),在满足 D-P 模型塑性本构的条件下,有塑性状态在增量形式下的双势函数:

$$\begin{aligned} \Delta b^p(\Delta\epsilon^p, \Delta\sigma) &= \frac{c\Delta e_m^p}{\tan\phi} + k_d(\tan\theta - \tan\phi) \left( s_{m0} + \Delta s_m - \frac{c}{\tan\phi} \right) \|\Delta e^p\| - \\ &s_{m0}\Delta e_m^p - s_0\Delta e^p, \end{aligned} \quad (56)$$

下标“0”表示每一步迭代的初始状态.结合式(55)、(56),再根据式(16),可以得到弹塑性状态在增量形式下的双势函数:

$$\begin{aligned} \Delta b^{ep}(\Delta\epsilon, \Delta\sigma) &= \inf_{\Delta e_m^p \geq k_d \tan\theta \|\Delta e^p\|} \left\{ \frac{K_c}{2}(\Delta e_m - \Delta e_m^p)^2 + \mu \|\Delta e - \Delta e^p\|^2 + \frac{c\Delta e_m^p}{\tan\phi} + \right. \\ &k_d(\tan\theta - \tan\phi) \left( s_{m0} + \Delta s_m - \frac{c}{\tan\phi} \right) \|\Delta e^p\| - \end{aligned}$$

$$s_{m0}\Delta e_m^p - s_0\Delta e^p \} + \frac{1}{4\mu} \|\Delta s\|^2 + \frac{1}{2K_c} (\Delta s_m)^2. \quad (57)$$

文献[24]中给出了式(57)详细的推导过程,并可以验证正交定理是满足的,即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\sigma}} \Delta b^{ep}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma}), \Delta \boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta b^{ep}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma}). \quad (58)$$

根据稳态条件,可以得到

$$2\mu\Delta \boldsymbol{e} + s_0 = \left\{ 2\mu + \frac{1}{\|\Delta \boldsymbol{e}^p\|} [K_c(k_d \tan \theta \|\Delta \boldsymbol{e}^p\| - \Delta e_m)k_d \tan \theta + k_d(c - \tan \phi(s_{m0} + \Delta s_m) + \Delta s_m \tan \theta)] \right\} \Delta \boldsymbol{e}^p. \quad (59)$$

变换式(59),可以得到塑性乘子  $\|\Delta \boldsymbol{e}^p\|$  的表达式

$$\|\Delta \boldsymbol{e}^p\| = \frac{1}{1 + \varepsilon_c k_d^2 \tan^2 \theta} \{ \|\Delta \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\eta}_0\| - \varepsilon_d [c - \tan \phi(s_{m0} + \Delta s_m) + \tan \theta (\Delta s_m - K_c \Delta e_m)] \}. \quad (60)$$

又由于  $\Delta s_m$  的表达式中也包含  $\|\Delta \boldsymbol{e}^p\|$ , 即

$$\Delta s_m = K_c(\Delta e_m - \Delta e_m^p) = K_c(\Delta e_m - k_d \tan \theta \|\Delta \boldsymbol{e}^p\|). \quad (61)$$

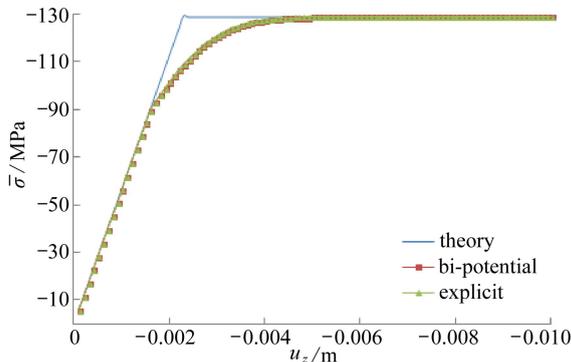
由式(60)、(61),通过 Newton-Raphson 迭代,可以计算求得塑性乘子  $\|\Delta \boldsymbol{e}^p\|$ 。

### 4.3 比较双势积分算法与显式积分算法

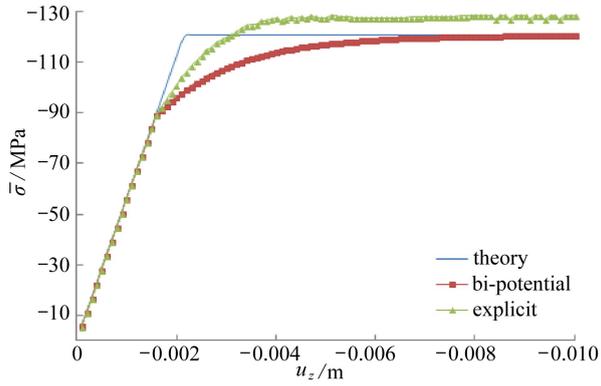
比较双势积分算法与显式积分算法,以 D-P 模型为例,数值模拟位移控制的单向压缩与单向拉伸加载,模型参数:弹性模量  $E = 0.5 \times 10^5$  MPa, Poisson(泊松)比  $\nu = 0.33$ , 粘聚力  $c = 30$  MPa, 内摩擦角  $\phi = 40^\circ$ , 选取显式标准材料 D-P 模型, 剪胀角  $\theta = \phi = 40^\circ$ , 隐式标准材料 D-P 模型,  $\theta = \phi/2 = 20^\circ$  和  $\theta = 0$ . 分别利用双势积分算法和显式积分算法对 3 种剪胀角的 D-P 模型进行数值模拟,均采用 100 个增量步进行计算,可以得到如下  $u_z - \bar{\sigma}$  曲线。

当  $\theta = \phi = 40^\circ$  时,材料为显式标准材料,其流动势函数和屈服势函数具有关联性,从图 3、图 4 中  $\theta = 40^\circ$  的  $u_z - \bar{\sigma}$  曲线图中可以看出:除去从弹性状态进入塑性状态的过度段,双势积分算法和显式积分算法得到的数值解都与解析解完全吻合,且计算结果稳定。

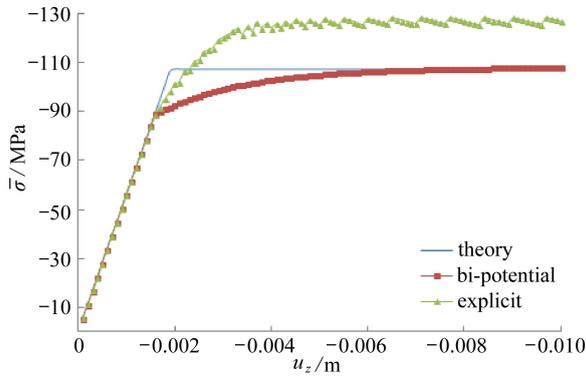
当  $\theta = \phi/2 = 20^\circ$  和  $\theta = 0$  时,材料为隐式标准材料,从图 3 与图 4 中  $\theta = 20^\circ, \theta = 0$  的  $u_z - \bar{\sigma}$  曲线图中可以看出:采用显式积分算法,模拟结果存在一定误差,且计算结果有震荡的现象,震荡现象在单向拉伸的结果中尤为明显,且剪胀角与内摩擦角相差越大,震荡越为强烈;采用双势积分算法得到的数值解与解析解完全吻合,无震荡现象,计算结果稳定。



(a)  $\theta = 40^\circ$



(b)  $\theta = 20^\circ$



(c)  $\theta = 0$

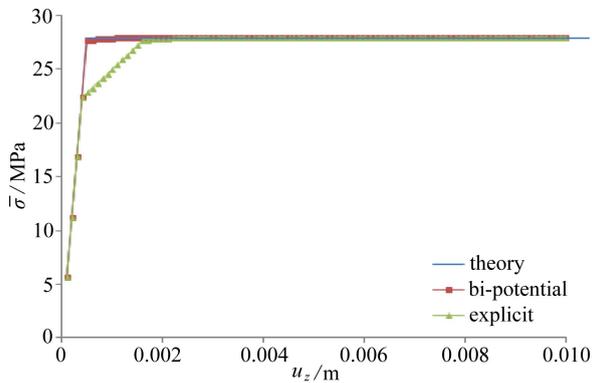
图 3 单向压缩  $u_z$ - $\bar{\sigma}$  曲线图

Fig. 3 The  $u_z$ - $\bar{\sigma}$  curve of compression simulation

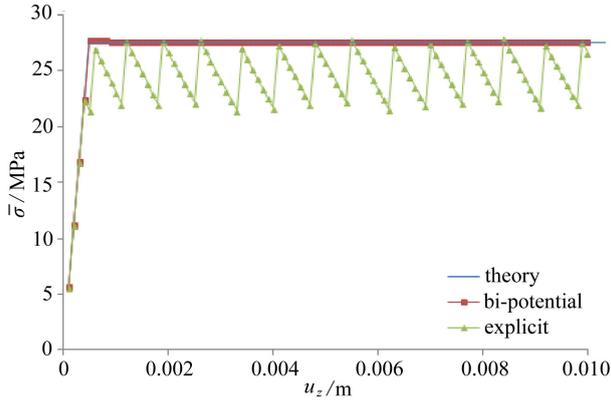
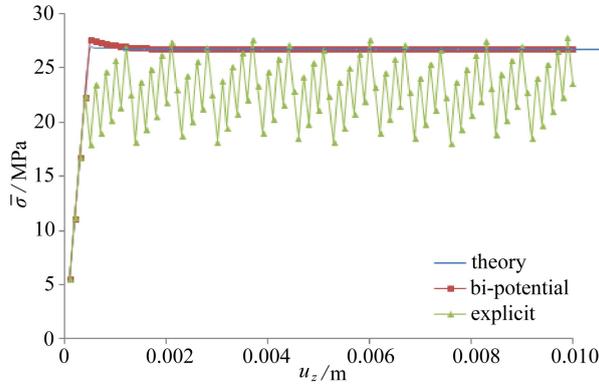
分析可以看出,在处理经典非关联理想弹塑性 D-P 模型时,取同样的增量步的情况下,采用双势积分算法比显式积分算法结果更准确,计算更稳定。

#### 4.4 Armstrong-Frederick 模型的双势积分算法

对经典随动硬化模型 A-F 模型,由式(11),在满足 A-F 模型弹性本构的条件下,有弹性状态在增量形式下的双势函数:



(a)  $\theta = 40^\circ$

(b)  $\theta = 20^\circ$ (c)  $\theta = 0$ 图 4 单向拉伸  $u_z$ - $\bar{\sigma}$  曲线图Fig. 4 The  $u_z$ - $\bar{\sigma}$  curve of tension simulation

$$\begin{aligned} \Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = & \frac{\Delta s_m^2}{2K} + \frac{\|\Delta \mathbf{X}\|^2}{2H} + \frac{\|\Delta \mathbf{s}\|^2}{4\mu} + \mu [(\Delta \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\Delta \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)] + \\ & \frac{H}{2} \Delta \boldsymbol{\alpha} : \Delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{K}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^2 + \sigma_y \Delta p. \end{aligned} \quad (62)$$

根据式(15),在满足 A-F 模型塑性本构的条件下,有塑性状态在增量形式下的双势函数:

$$\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\gamma}{H} \|\mathbf{X}_{n+1}\|^2 \Delta p - s_n \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{X}_n \Delta \boldsymbol{\alpha} + \sigma_y \Delta p. \quad (63)$$

结合式(62)、(63),再根据式(16),可得到弹塑性状态在增量形式下的双势函数:

$$\begin{aligned} \Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = & \inf_{(3/2)(s-X):(s-X) \geq \sigma_y^2} \left\{ \frac{\gamma}{H} \|\mathbf{X}_{n+1}\|^2 \Delta p - s_n \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{X}_n \Delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{\|\Delta \mathbf{X}\|^2}{2H} + \right. \\ & \left. \sigma_y \Delta p + \mu [(\Delta \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\Delta \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)] + \frac{H}{2} \Delta \boldsymbol{\alpha} : \Delta \boldsymbol{\alpha} \right\} + \\ & \frac{K}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^2 + \frac{\Delta s_m^2}{2K} + \frac{\|\Delta \mathbf{s}\|^2}{4\mu}. \end{aligned} \quad (64)$$

根据稳态条件,有

$$\frac{\partial \Delta b^{\text{ep}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}} = \mathbf{0}. \quad (65)$$

根据 A-F 模型硬化准则,再根据

$$\Delta p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\|, \quad (66)$$

由式(32),可以得到

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} - \frac{\gamma \mathbf{X}_{n+1}}{H} \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\|. \quad (67)$$

由一致性条件可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^* + \sqrt{\frac{2}{3}} H \frac{\gamma}{H} \mathbf{X}_{n+1} \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\| = \\ \left[ \left( 2\mu + H \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\gamma^2}{H^2} \|\mathbf{X}_{n+1}\|^2 \right) \right) \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\| + \right. \\ \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_y + \frac{\gamma}{H} \mathbf{X}_{n+1} : \Delta \mathbf{X} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} H \frac{\gamma}{H} \mathbf{X}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \right] \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}}{\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\|}, \end{aligned} \quad (68)$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^* = \boldsymbol{\sigma}_n - \mathbf{X}_n + 2\mu \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (69)$$

又因为

$$H \frac{2}{3} \frac{\gamma^2}{H^2} \|\mathbf{X}_{n+1}\|^2 \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}\| + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{X}_{n+1} : \Delta \mathbf{X} - \sqrt{\frac{2}{3}} H \frac{\gamma}{H} \mathbf{X}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} = \mathbf{0}, \quad (70)$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*\|}, \quad (71)$$

可以得到

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \boldsymbol{\xi}_{n+1}^* - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta p \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^*\|} (2\mu + \theta H) + (1 - \theta) H \boldsymbol{\alpha}_n \right\| = \sigma_y. \quad (72)$$

与式(43)比较可以看出,计算 A-F 模型的塑性乘子  $\Delta p$ , 采用双势积分算法和采用隐式积分算法能得到同样的表达形式。

#### 4.5 比较双势积分算法与隐式积分算法

以 A-F 材料为例,比较双势积分算法与隐式积分算法.采用单向拉压循环模型,模型参数:弹性模量为  $E = 2.2 \times 10^5$  MPa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ , 屈服应力  $\sigma_y = 300$  MPa, 参数  $H = 1 \times 10^4$  MPa, 参数  $\gamma = 300$ .对模型进行一个拉压循环,其应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  与时间  $t$  满足如图 5 的关系,可以得到  $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_z$  的曲线图,如图 6 所示。

从图 6 可以看出,对于经典非关联随动硬化 A-F 模型,在拉压循环加载的情况下,采用双势积分算法和隐式积分算法得到的结果都能与理论结果很好地吻合.以控制加载外力,对 A-F 模型进行 10 个拉压循环,可以初步模拟 A-F 模型的棘轮效应,如图 7 所示。

由以上分析可以看出双势积分算法在处理随动硬化 A-F 模型时具有较高的精确性。

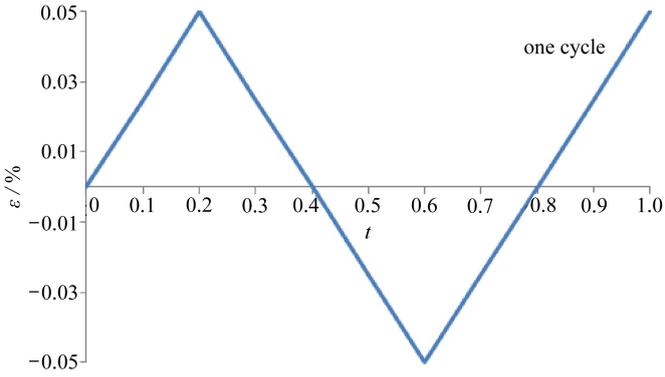
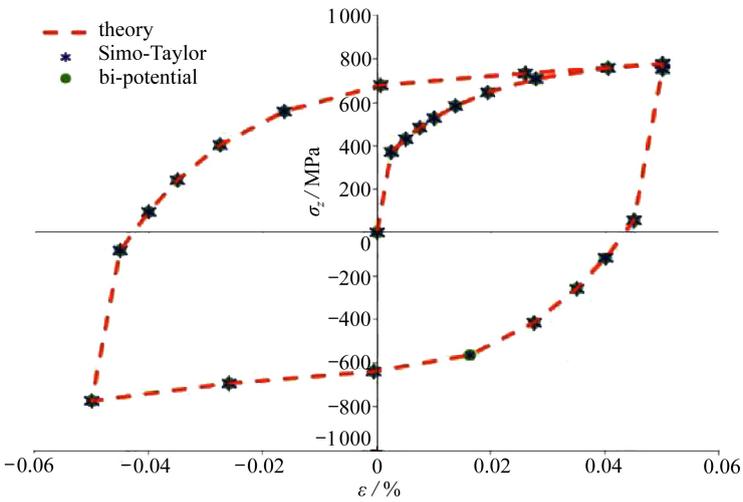
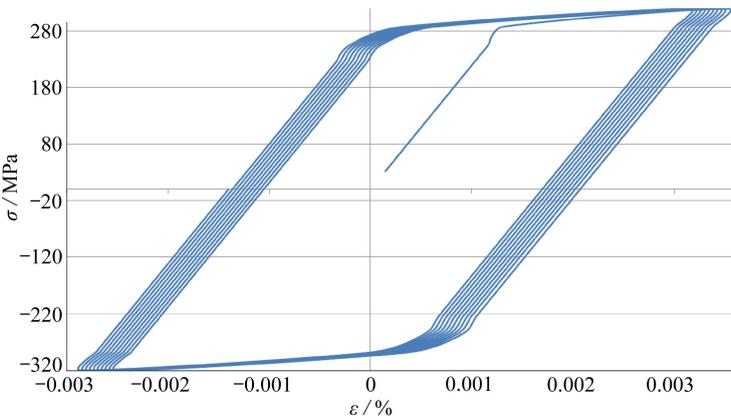
图 5  $t$ - $\varepsilon$  关系图Fig. 5 The  $t$ - $\varepsilon$  relationship图 6  $\varepsilon$ - $\sigma_z$  曲线图Fig. 6 The  $\varepsilon$ - $\sigma_z$  curve

图 7 A-F 模型棘轮效应

Fig. 7 The ratchet effect of the A-F model

## 5 总 结

本文在双势理论的基础上,结合材料能量函数的形式,简要阐述了显式标准材料和隐式标准材料,给出了双势函数的定义.之后,回顾了传统显式积分算法,并针对经典的非关联理想弹塑性 Drucker-Prager 模型,给出了其具体的显式积分算法,总结了 Drucker-Prager 模型塑性乘子的计算方法;同时,也回顾了经典的隐式积分算法,针对经典的非关联随动硬化 Armstrong-Frederick 模型,给出了其具体的隐式积分算法,并得到了 Armstrong-Frederick 模型塑性乘子的计算方法.本文着重介绍了双势积分算法,通过变分原理证明了双势积分算法解的存在性.采用双势积分算法数值实现 D-P 模型的单向拉伸与单向压缩,给出了双势积分算法下 D-P 模型塑性乘子的计算方法.将模拟结果与显式积分算法得到结果进行比较,可以看出,采用双势积分算法模拟非关联 D-P 模型,能有效避免计算过程中出现的震荡现象,验证了双势积分算法的稳定性.采用双势积分算法数值实现 A-F 模型的拉压循环加载,可以看出,双势积分算法得到的拉压循环下的  $\varepsilon$ - $\sigma$  曲线与隐式积分算法得到的曲线完全吻合,且通过双势积分算法与隐式积分算法得到的 A-F 塑性乘子具有同样的表达,同时增加拉压循环的次数,可以明显观察到循环加载下 A-F 模型的棘轮现象,验证了双势积分算法的准确性.

隐式标准材料的本构问题一直是材料非线性问题中的一大难点,双势理论处理隐式标准材料具有其独特的优势.在国内,有关双势理论和双势积分算法的研究还处在起步阶段,国外部分学者已经开始着手一些相关的探索工作,但是研究仍有待发展:对于双势积分算法处理复杂工况下隐式标准材料本构问题,还需要更深入的探索;目前,双势积分算法可以处理简单的非关联岩土体模型,如 Drucker-Prager 模型,但是涉及带有强化特征的土体模型,如 Cam-Clay 模型、修正 Cam-Clay 模型等,仍需要进一步研究;双势积分算法在一定程度上能简化模型计算,提高计算效率,探索更好的非线性方程求解方法,进一步优化模型计算,也具有长远的发展潜力.总的看来,在数值模拟日渐发达的今天,继续发展和研究双势理论,扩展双势积分算法的使用范围,有深远的研究意义,相信双势理论和双势积分算法具有广阔的研究和应用前景.

**致谢** 本文作者由衷感谢西南交通大学研究生创新实验实践项目(YC201412129)对本文的资助.

### 参考文献(References):

- [1] Smith I M, Griffiths D V. 有限元方法编程[M]. 第3版. 王崧, 周坚鑫, 王来, 裴波, 刘丽娟, 唐国兵, 唐伯鉴, 译. 北京: 电子工业出版社, 2003. (Smith I M, Griffiths D V. *Programming the Finite Element Method*[M]. 3rd ed. WANG Song, ZHOU Jian-xin, WANG Lai, PEI Bo, LIU Li-juan, TANG Guo-bing, TANG Bo-jian, transl. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003. (in Chinese))
- [2] 郑颖人, 孔亮, 刘元雪. 塑性本构理论与工程材料塑性本构关系[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(7): 713-722. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang, LIU Yuan-xue. Plastic constitutive relation and plastic constitutive theory for engineering materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(7): 713-722. (in Chinese))
- [3] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 第1版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. *The Principles of Geotechnical Plastic Mechanics*[M]. 1st ed. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))

- [4] 蒋明镜, 沈珠江. 理想弹塑性材料有限元计算算法比较研究[J]. 水利水运科学研究, 1998(1): 28-37. (JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. Study and comparison on the FEM computation methods used for the ideal elasto-plastic material[J]. *Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute*, 1998(1): 28-37. (in Chinese))
- [5] Simo J C, Taylor R L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, **48**(1): 101-118.
- [6] Fenchel W. On conjugate convex functions[J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, **1**: 73-77.
- [7] de Saxcé G, Feng Z Q. New inequality and functional for contact with friction: the implicit standard material approach[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1991, **19**(3): 301-325.
- [8] de Saxcé G. Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives[J]. *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences*, 1992, **314**(2): 125-129.
- [9] de Saxcé G. The bipotential method, a new variational and numerical treatment of the dissipative laws of materials[C]//*10th International Conference on Mathematical and Computer Modelling and Scientific Computing*. Boston, USA, 1995.
- [10] Vallée C, Lerintiu D, Fortuné D, Man M, de Saxcé G. A bipotential expressing simultaneous ordered spectral decomposition between stress and strain rate tensor[C]//*International Conference on New Trends in Continuum Mechanics*. Constanta, Romania, 2003.
- [11] FENG Zhi-qiang. 2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1995, **11**(5): 409-416.
- [12] de Saxcé G, Feng Z Q. The bipotential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, **28**(4/8): 225-245.
- [13] Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, **28**(8): 1803-1812.
- [14] Feng Z Q, Hjiq M, de Saxcé G, Mróz Z. Influence of frictional anisotropy on contacting surfaces during loading/unloading cycles[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(8): 936-948.
- [15] Feng Z Q, Joli P, Cros J M, Magnain B. The bi-potential method applied to the modeling of dynamic problems with friction[J]. *Computational Mechanics*, 2005, **36**(5): 375-383.
- [16] Feng Z Q, Peyraut F, He Q C. Finite deformations of Ogden's materials under impact loading [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(4): 575-585.
- [17] FENG Zhi-qiang, Renaud C, Cros J M, ZHANG Hong-wu, GUAN Zhen-qun. A finite element finite-strain formulation for modeling colliding blocks of Gent materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(17): 2215-2222.
- [18] Joli P, Feng Z Q. Uzawa and Newton algorithms to solve frictional contact problems within the bi-potential framework[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **73**(3): 317-330.
- [19] Bodovillé G, de Saxcé G. Plasticity with non-linear kinematic hardening: modelling and shakedown analysis by the bipotential approach[J]. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2001, **20**(1): 99-112.

- [20] Bouby C, de Saxcé G, Tritsch J B. Shakedown analysis: comparison between models with the linear unlimited, linear limited and non-linear kinematic hardening [J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, **36**(5): 556-562.
- [21] Chaaba A. Plastic collapse in presence of non-linear kinematic hardening by the bipotential and the sequential limit analysis approaches [J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, **37**(5): 484-488.
- [22] Mitchell G P, Owen D R J. Numerical solutions for elastic-plastic problems[J]. *Engineering Computations*, 1988, **5**(4): 274-284.
- [23] Bousshine L, Chaaba A, de Saxcé G. Softening in stress-strain curve for Drucker-Prager non-associated plasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 2001, **17**(1): 21-46.
- [24] Hjiat M, Fortin J, de Saxcé G. A complete stress update algorithm for the non-associated Drucker-Prager model including treatment of the apex[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2003, **41**(10): 1109-1143.
- [25] Berga A. Contribution to modeling of non associated law of soils with the bipotential method and its application in foundation area [C]//*International Symposium on Characterization and Modeling of Materials and Structures, CMMS08*. Tizi-Ouzou, Algeria, 2008.
- [26] Berga A. Mathematical and numerical modeling of the non-associated plasticity of soils—part 1: the boundary value problem[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(1): 26-35.
- [27] Berga A. Mathematical and numerical modeling of the non-associated plasticity of soils—part 2: finite element analysis[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(1): 36-45.
- [28] Zhou Y J, Feng Z Q, Xu W Y. Non-associated constitutive law of soils and its simulation based on the bi-potential theory[J]. *International Journal of Structural Analysis & Design*, 2014, **1**(4): 1-6.
- [29] Magnier V, Charkaluk E, de Saxcé G. Bipotential versus return mapping algorithms: implementation of non associated flow rules[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(15/16): 2857-2864.
- [30] Drucker D C, Prager W. Soil mechanics and plasticity analysis or limit design[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, **10**(2): 157-165.
- [31] 杨强, 杨晓君, 陈新. 基于 D-P 准则的理想弹塑性本构关系积分研究[J]. *工程力学*, 2005, **22**(4): 15-19, 47. (YANG Qiang, YANG Xiao-jun, CHEN Xin. On integration algorithms for perfect plasticity based on Drucker-Prager criterion[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(4): 15-19, 47. (in Chinese))
- [32] Ohon N, Wang J D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratcheting behavior[J]. *International Journal of Plasticity*, 1993, **9**(3): 375-390.

# The Bi-Potential Theory Applied to Non-Associated Constitutive Laws

ZHOU Yang-jing, FENG Zhi-qiang, NING Po

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P.R.China*)

(Contributed by FENG Zhi-qiang, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The explicit integration algorithm based on the traditional plastic mechanics framework and the implicit integration algorithm proposed by Simo-Taylor were 2 classic constitutive integration algorithms widely used in solid mechanics. These 2 algorithms were reviewed respectively with the 2 corresponding classic non-associated constitutive models: the Drucker-Prager model and the Armstrong-Frederick model as the examples. Then, according to the bi-potential theory and with the bi-potential concept applied to the material free energy, solid materials were divided into explicit standard materials and implicit standard ones. It was verified that the 2 classic integration algorithms both can effectively deal with explicit standard materials. However, in dealing with implicit standard materials, the orthogonality cannot be guaranteed in a unified form with the classic methods. The bi-potential algorithm has its own advantage in dealing with both explicit and implicit standard materials. The solution existence of the bi-potential integration algorithm was derived based on the variational principle. Furthermore, the results of the bi-potential algorithm and the classic algorithms were compared through calculation of the Drucker-Prager and Armstrong-Frederick models, and the accuracy and stability of the bi-potential algorithm were proved.

**Key words:** bi-potential integration algorithm; explicit/implicit integration algorithm; non-associated constitutive law; D-P model; A-F model

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372260)