

计及弯曲刚度的印刷运动薄膜 横向振动控制研究*

武吉梅¹, 景涛¹, 王砚², 李彦锋³, 薛志成³, 武秋敏¹

- (1. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 西安 710048;
2. 西安理工大学 土木建筑工程学院, 西安 710048;
3. 陕西西北人印刷机械有限责任公司, 陕西 渭南 714000)

摘要: 研究了不同边界条件下,计及弯曲刚度的轴向运动薄膜横向振动的主动控制问题.建立计及弯曲刚度的印刷运动薄膜的计算模型.利用有限差分法,对轴向运动薄膜的振动微分方程进行离散,推导出轴向运动矩形薄膜横向振动控制系统的状态方程.采用次最优控制法,对不同边界条件下轴向运动矩形薄膜横向振动进行主动控制研究.计算结果表明:采用次最优控制法能够在短时间内迅速、有效地降低运动薄膜的振动强度,并使之衰减趋近于0.作动器作用在固定位置点处时,对运动薄膜施加控制后,四边简支边界条件下的控制效果好.作动器作用在不同位置点处时,两种边界条件下中心点处的控制效果最好.计算证明次最优控制法能够有效地抑制印刷过程中计及弯曲刚度的轴向运动薄膜的横向振动,从而提高印刷套印精度,保证精密印刷质量.

关键词: 轴向运动薄膜; 弯曲刚度; 横向振动; 控制

中图分类号: O322; O232 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.07.002

引 言

现代高速印刷机属于工作中必须保持高度稳定性的高精密机器,因此控制印刷过程中承印材料的振动,保证印刷过程的稳定性,对于提高印刷精度具有非常重要的意义.在印刷机械中,卷筒纸印刷机、凹印机的印刷对象有一些是具有一定硬度和挺度的薄膜或纸张,如生产壁纸的壁纸生产线或印刷机以及一些包装机械等,其承印材料是承受弯矩的具有一定挺度的薄纸或薄纸板,这些薄纸板类承印材料在印刷或生产过程中的振动会影响套印精度和印刷质量.

因此,对轴向运动薄膜的横向振动控制研究有着重要的实际应用价值,已引起众多专家、学者的关注.近年来,Altunsaray, Bayer^[1]从4个边缘分别对简支和固支条件下大挠度和自由振动的准各向同性矩形薄板进行检测,分析了边长比和方位角的变化对静弯曲和自由振动结

* 收稿日期: 2014-12-02; 修订日期: 2015-04-13

基金项目: 国家自然科学基金(11272253; 11202159; 51305341); 陕西省自然科学基金(2014JM7290); 陕西省重点实验室项目(13JS081)

作者简介: 武吉梅(1963—),女,山东潍坊人,教授,博士,博士生导师(E-mail: wujimei@xaut.edu.cn);

景涛(1987—),男,山西运城人,硕士生(通讯作者. E-mail: TJingXAUT@126.com).

果的影响, Yu(于天崇)等^[2]研究了面内变刚度矩形薄板的弯曲问题, 唐有绮、陈立群等^[3-6]研究了同时存在受迫共振和 1:3 内共振时的面内平动黏弹性板的横向非线性振动问题及轴向运动梁问题, 以考虑结构的抗弯刚度对横向振动和稳定性的影响, Kim 等^[7]以轴向拉力作用下的轴向运动弹性矩形薄板为研究对象, 分析了轴向运动速度和轴向拉力对薄板的动力特性和稳定性的影响, 周银锋等^[8]采用微分求积法, 分析了轴向运动 Kelvin-Voigt 模型粘弹性板的横向振动特性, 通过数值计算, 得出两种不同边界条件下轴向运动粘弹性薄板的运动速度和横向振动的复频率之间的关系曲线, 并分析了薄板的长宽比、无量纲运动速度及材料的无量纲延滞时间对横向振动和稳定性的影响, Saksá 等^[9]在经典模态分析的基础上研究了轴向运动粘弹性板的稳定性及动态特性, Greco, Blanc^[10]研究了印刷机械中卷筒纸材料平面外振动的动态特性, Nguyen, Hong^[11]提出了一种抑制轴向运动薄膜系统横向振动的新型控制算法, Nagarkatti 等^[12]提出了一种控制轴向运动卷筒纸系统横向振动的控制方法, Nguyen, Hong^[13]研究了一种可以同时控制弦线系统纵向和横向振动, 并且能够控制系统牵连速度的控制方案。

本文在上述已有研究的基础上, 利用有限差分法, 推导出轴向运动矩形薄膜横向振动控制系统的状态方程, 采用次最优控制法对两种边界条件下轴向运动矩形薄膜的横向振动控制问题进行了研究, 主动控制系统主要由传感器、作动器和控制器组成, 该系统示意图如图 1 所示, 次最优控制法是直接采用所能测量的系统状态进行最优控制设计, 该方法具有结构简单和容易实现的优点。

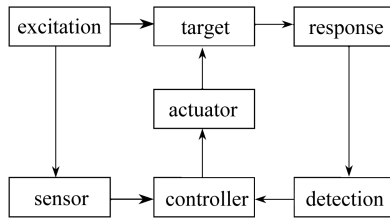


图 1 主动控制系统示意图

Fig. 1 The block diagram of the active control system

1 运动微分方程

本文将考虑弯曲刚度的矩形薄膜作为如图 2 所示的运动薄板模型来处理, 其沿 x 方向的运动速度为 v , 设薄膜沿 x, y 方向的边长分别为 a 和 b , 厚度为 h , 材料的密度为 ρ . 设薄膜的体变为弹性, 畸变服从 Kelvin-Voigt 模型, 其微分型本构方程为

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij}, \quad \sigma_{ii} = 2K\varepsilon_{ii}, \quad (1)$$

式中, G, K, η 分别为材料的剪切弹性模量、体积弹性模量和粘性系数, s_{ij} 和 e_{ij} 分别为应力偏量和应变偏量, σ_{ii} 和 ε_{ii} 分别为应力球量和应变球量。

轴向运动矩形薄膜的运动微分方程^[8,14]为

$$\frac{h^3}{12} \left(A_3 + A_4 \frac{\partial}{\partial t} + A_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^4 w + \rho h \left(A_1 + A_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2)$$

对运动薄膜施加反馈控制力 R , 其横向振动微分方程为

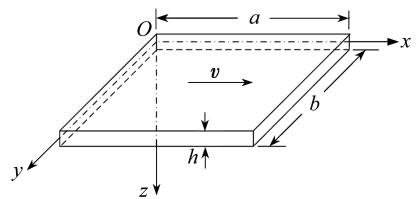


图 2 轴向运动薄膜运动模型

Fig. 2 The model of axially moving membrane

$$\frac{h^3}{12} \left(A_3 + A_4 \frac{\partial}{\partial t} + A_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^4 w + \rho h \left(A_1 + A_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = R \delta(x - x_i, y - y_j), \quad (3)$$

式中

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$w(x, y, t)$ 为挠度函数, $A_1 = 3K + 4G$, $A_2 = 4\eta$, $A_3 = 2G(6K + 2G)$, $A_4 = 8G\eta + 12K\eta$, $A_5 = 4\eta^2$, 剪切弹性模量 $G = E/(2(1 + \mu))$, 体积弹性模量 $K = E/(3(1 - \mu))$, μ 为 Poisson(泊松)比, R 是施加在薄膜上的反馈控制力。

引入下列无量纲量

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \psi = \frac{y}{b}, \quad \bar{W} = \frac{w}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \tau = \frac{th}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \mu^2)}},$$

$$c = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1 - \mu^2)}{E}} v, \quad H = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \mu^2)}} \frac{\eta}{E},$$

并代入方程(3), 可得无量纲形式方程:

$$\left[1 + \frac{4(2 - \mu)(1 + \mu)}{3} H \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)^2}{3} H^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \nabla^4 \bar{W} + \left[1 + \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{3(1 - \mu)} H \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tau^2} + 2c \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \right) = u \delta(\xi - \xi_i, \psi - \psi_j), \quad (4)$$

其中, τ 为无量纲时间, c 为无量纲轴向运动速度, H 为材料的无量纲延滞时间,

$$\nabla^4 \bar{W} = \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^2 \partial \psi^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \psi^4}.$$

本文研究 $H = 0$ 时的情况, 则方程(4)可写成

$$\nabla^4 \bar{W} + \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tau^2} + 2c \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \right) = u \delta(\xi - \xi_i, \psi - \psi_j). \quad (5)$$

四边简支的边界条件为

$$\begin{cases} \xi = 0, 1; \bar{W}(\xi, \psi) = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} = 0, \\ \psi = 0, 1; \bar{W}(\xi, \psi) = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \psi^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

对边简支对边自由的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \psi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \psi^3} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

2 振动控制系统状态方程

应用有限差分法,对方程(5)及边界条件关于空间坐标离散,得

$$\nabla^4 \bar{W} + \left[\frac{\partial^2 \bar{W}_{i,j}}{\partial \tau^2} + \frac{c}{h} \left(\frac{\partial \bar{W}_{i+1,j}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{W}_{i-1,j}}{\partial \tau} \right) + \frac{c^2}{h^2} (\bar{W}_{i+1,j} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i-1,j}) \right] = u_{i,j}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla^4 \bar{W} = & \frac{1}{h^4} [(6 + 8\lambda^2 + 6\lambda^4) \bar{W}_{i,j} - 4(1 + \lambda^2) \bar{W}_{i+1,j} - \\ & 4\lambda^2(1 + \lambda^2) \bar{W}_{i,j+1} - 4(1 + \lambda^2) \bar{W}_{i-1,j} - \\ & 4\lambda^2(1 + \lambda^2) \bar{W}_{i,j-1} + 2\lambda^2 \bar{W}_{i+1,j-1} + 2\lambda^2 \bar{W}_{i+1,j+1} + 2\lambda^2 \bar{W}_{i-1,j+1} + 2\lambda^2 \bar{W}_{i-1,j-1} + \\ & \bar{W}_{i+2,j} + \lambda^4 \bar{W}_{i,j+2} + \bar{W}_{i-2,j} + \lambda^4 \bar{W}_{i,j-2}] \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \\ & \bar{W}_{0,j} =, \bar{W}_{m+1,j} = 0, \bar{W}_{i,0} = 0, \bar{W}_{i,n+1} = 0. \end{aligned}$$

离散后四边简支的边界条件为

$$\begin{cases} \bar{W}_{i+1,j} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i-1,j} = 0, \\ \bar{W}_{i,j+1} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i,j-1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

离散后对边简支对边自由的边界条件为

$$\begin{cases} \bar{W}_{i+1,j} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i-1,j} = 0, 2(\bar{W}_{i-1,j} - \bar{W}_{i+1,j}) + (\bar{W}_{i+2,j} - \bar{W}_{i-2,j}) = 0, \\ \bar{W}_{i,j+1} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i,j-1} = 0, 2(\bar{W}_{i,j-1} - \bar{W}_{i,j+1}) + (\bar{W}_{i,j+2} - \bar{W}_{i,j-2}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

设 $\mathbf{W} = [\bar{W}_{1,1} \ \dots \ \bar{W}_{1,n} \ \bar{W}_{2,1} \ \dots \ \bar{W}_{2,n} \ \dots \ \bar{W}_{m,n}]^T$, $\mathbf{U} = [0 \ \dots \ u_{i,j} \ \dots \ 0]^T$, 将式(8)写成如下动力学方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{D}\mathbf{U}, \quad (11)$$

式中, $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 和 \mathbf{D} 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵及输入矩阵, \mathbf{M} 为单位矩阵, \mathbf{U} 为无量纲反馈控制力向量。

引入状态变量 \mathbf{X} , 将式(11)写成状态空间方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix},$$

\mathbf{C} 为输出矩阵。

3 次最优控制

采用 Athans 等提出的次最优控制法^[15-16], 研究轴向运动矩形薄膜的横向振动控制. 控制系统如图3所示, 图中 \mathbf{K} 为反馈控制矩阵。

根据图3对状态方程式(12)确定最佳控制向量

$$\mathbf{U}(\tau) = -\mathbf{K}\mathbf{Y}(\tau), \quad (13)$$

使性能指标 J 达到极小. J 的表达式为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) d\tau, \quad (14)$$

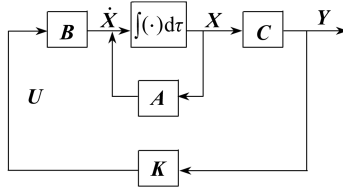


图3 控制系统

Fig. 3 The control system

式中, \mathbf{Q} 是正定(或半正定)的 Hermite 矩阵或实对称矩阵, \mathbf{R} 是正定的 Hermite 矩阵或实对称矩阵. 矩阵 \mathbf{Q} 与 \mathbf{R} 确定了误差和能量损耗的相对重要性.

由 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$, 式(13) 可写成 $\mathbf{U} = -\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{X}$, 代入式(14), 确定 \mathbf{K} , 并使其满足性能指标 J 极小, 即

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{X}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{X}] d\tau. \quad (15)$$

记 $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{C}$, 则目标函数极小值

$$\min J = \min \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{X}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{X} d\tau. \quad (16)$$

其约束条件为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}, \quad (17)$$

式中, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$.

由 Lyapunov 稳定性理论, 系统 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}$ 在平衡状态 $x = 0$ 渐近稳定的充要条件为: 给定一个正定的实对称矩阵 \mathbf{Q}_1 , 使方程(18) 的解 \mathbf{P} 为正定矩阵.

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}. \quad (18)$$

将式(18)代入式(16), 得到

$$\min J = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{X}^T (\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}) \mathbf{X} d\tau = -\frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \mathbf{P} \mathbf{X}_0. \quad (19)$$

\mathbf{P} 满足

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (20)$$

从式(20)达到极小与满足约束条件式(18)来确定 \mathbf{K} 理论上是严格的, 但是在数学上是很困难的, 因此, 出现了一些非直接的解法.

已知由最优控制法求得的常增益状态反馈阵 \mathbf{F}^* , 记 $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{C}$, \mathbf{K} 为待求矩阵. 最小范数法就是确定矩阵 \mathbf{K} 使如下目标函数 J^* 达到极小. 由式(19)可见, 性能指标 J 与初始状态矢量 \mathbf{X}_0 有关, 未消除 J 对 \mathbf{X}_0 的依赖性. 令 \mathbf{X}_0 为分布在范数为 1 的球面上的随机变量. 记 $\|\mathbf{X}_0\| = 1$, $\|\cdot\|$ 为 (\cdot) 的范数. 可以证明: $\mathbf{X}_0^T \mathbf{P} \mathbf{X}_0$ 的上限为矩阵 \mathbf{P} 的迹, 这样, 性能指标 J 用 $\text{tr}(\mathbf{P})$ 表示.

$$J^* = \|\mathbf{F} - \mathbf{F}^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{i,j}^2}, \quad (21)$$

式中, $g_{i,j}$ 为矩阵 $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^*$ 的第 i 行第 j 列元素. 该式还可写成

$$J^* = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{F} - \mathbf{F}^*)^T (\mathbf{F} - \mathbf{F}^*)]}. \quad (22)$$

对 J^* 取极小,可求得

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^* \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}. \quad (23)$$

4 数值计算

本文用 4×4 网格进行计算,在运动薄膜上划分如图 4 所示的网格区域.由于受到实际印刷速度和印刷实际情况的限制,选取的无量纲速度需依据实际情况确定,以西安航天华阳印刷包装设备有限公司的“赛默森 S120”高速壁纸印刷压花生产线和“赛默森”无缝宽幅壁纸生产线为例,其印刷纸张参数见表 1、表 2.

根据无量纲式

$$c = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\mu^2)}{E}} v,$$

计算表 1 中参数得“赛默森 S120”高速壁纸印刷压花生产线最大无量纲速度 $c_1 = 1.082$, 计算表 2 中参数可得“赛默森”无缝宽幅壁纸生产线最大无量纲速度 $c_2 = 1.227$. 由于印刷机不可能一直以最大印刷速度运行,考虑一般性,本文取印刷薄膜无量纲轴向运动速度 $c = 1.0$.

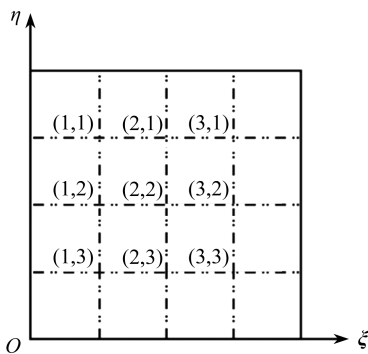


图 4 离散节点

Fig. 4 The discrete nodes

表 1 “赛默森 S120”印刷压花生产线纸张参数

Table 1 The substrate parameters of the Supermachine S120 wallpaper printing and embossing production line

parameter	definition	value
a	width	530 mm
h	thickness	0.983 mm
ρ	density	661 kg/m ³
μ	Poisson's ratio	0.3
E	elastic modulus	7.16 GPa
v	maximum printing speed	120 m/min
m	gram weight	650 g/m ²

表 2 “赛默森”无缝宽幅壁纸生产线纸张参数

Table 2 The substrate parameters of the Supermachine seamless wide wallpaper production line

parameter	definition	value
a	width	2 400 mm
h	thickness	1.2 mm
ρ	density	333 kg/m ³
μ	Poisson's ratio	0.38
E	elastic modulus	6.26 GPa
v	maximum printing speed	50 m/min
m	gram weight	400 g/m ²

本文研究在两种边界条件下,印刷运动薄膜的振动控制情况:

四边简支边界条件下,运行程序得

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 17.052\ 6 & -32.541\ 7 & 17.052\ 8 & -30.837\ 4 & -0.505\ 3 & -30.838\ 0 \\ -17.685\ 1 & 96.138\ 9 & -17.684\ 7 & -0.117\ 4 & -0.077\ 7 & -0.117\ 4 \\ 0.058\ 0 & -1.780\ 5 & 0.058\ 0 & -0.121\ 8 & -0.222\ 7 & -0.121\ 8 \end{bmatrix}.$$

对边简支对边自由边界条件下,运行程序得

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9.816 5 & -61.116 7 & 9.816 5 & 2.159 8 & -1.753 9 & 2.159 8 \\ -10.978 9 & 58.981 9 & -10.978 9 & -0.038 0 & -0.143 2 & -0.038 0 \\ -0.298 4 & -2.150 2 & -0.298 4 & -0.022 7 & -0.157 7 & -0.022 7 \end{bmatrix}.$$

1) 当作动器始终只作用在点(2, 2)处,节点(1, 3)、(2, 2)、(3, 2)在两种不同边界条件下的振幅响应曲线如图5~7所示.图中横坐标为无量纲时间,纵坐标表示无量纲振幅,标题给出了薄膜的边界条件.

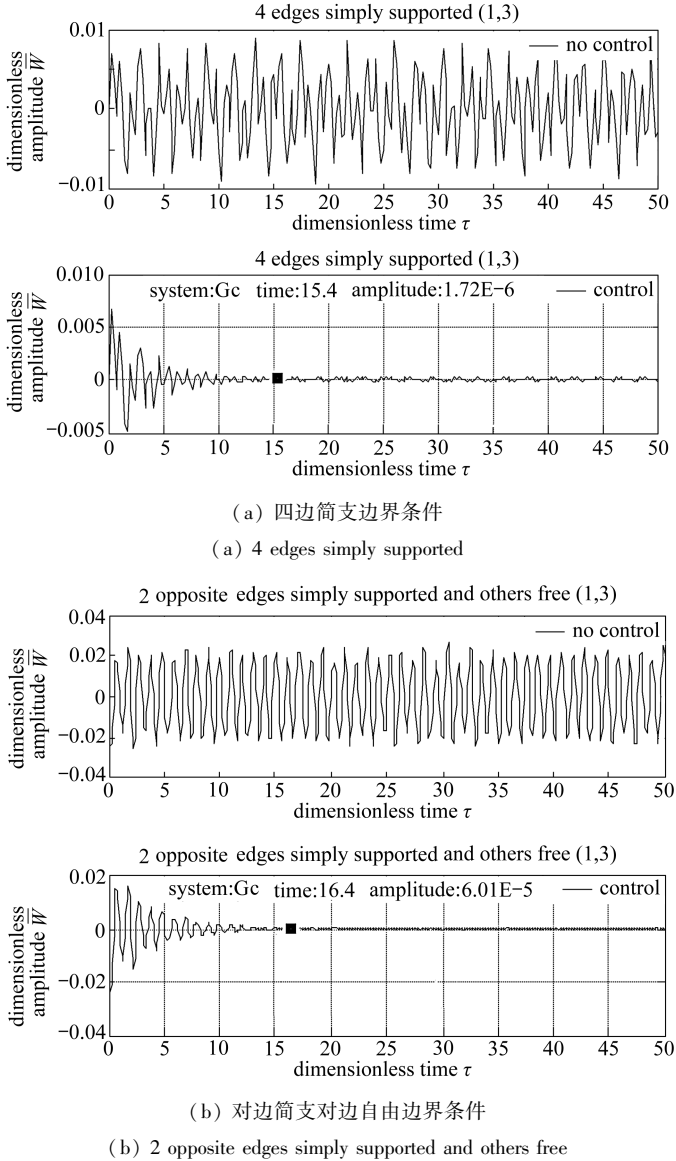


图5 两种边界条件下薄膜(1,3)位置处控制前后振幅随时间变化曲线

Fig. 5 The response amplitude curves of node (1, 3) under 2 types of boundary conditions

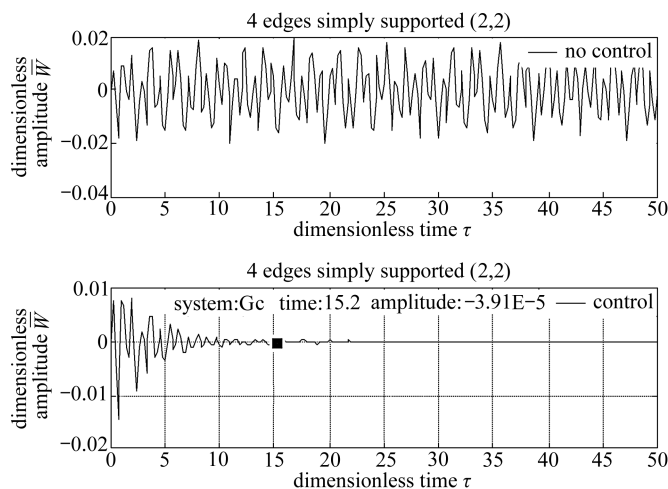
研究分析图5~7的振幅响应曲线得知:

(a) 两种边界条件下,未对运动薄膜施加反馈控制时,点(1, 3)、(2, 2)和(3, 2)处的振型都是随时间做无衰减的自由振动;在节点(2, 2)处对运动薄膜施加反馈控制后,节点(1,

3)、(2, 2)和(3, 2)处的振动强度快速衰减,并且迅速趋近于0,振幅衰减趋近于0的无量纲时间 τ 约为15~18。

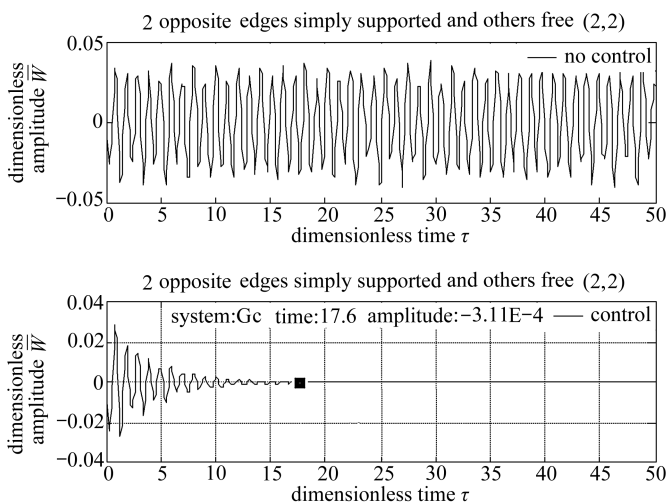
(b) 对运动薄膜施加控制后,分别对比图5~7中的图(a)与图(b)的振幅响应曲线,根据表3的数据可知:四边简支条件下运动薄膜振幅衰减趋近于0的无量纲时间 $\tau \approx 15.4$,比对边简支对边自由边界条件下快1~3,说明四边简支条件下的控制效果好,但对边简支对边自由更符合实际印刷时的边界条件。

2) 作动器依次作用在节点(1, 3)、(2, 2)和(3, 2)处时,运动薄膜控制前后的速度响应曲线如图8~10所示。图中横坐标为无量纲时间,纵坐标表示无量纲速度,标题为薄膜的边界条件。



(a) 四边简支边界条件

(a) 4 edges simply supported



(b) 对边简支对边自由边界条件

(b) 2 opposite edges simply supported and others free

图6 两种边界条件下薄膜(2,2)位置处控制前后振幅随时间变化曲线

Fig. 6 The response amplitude curves of node (2, 2) under 2 types of boundary conditions

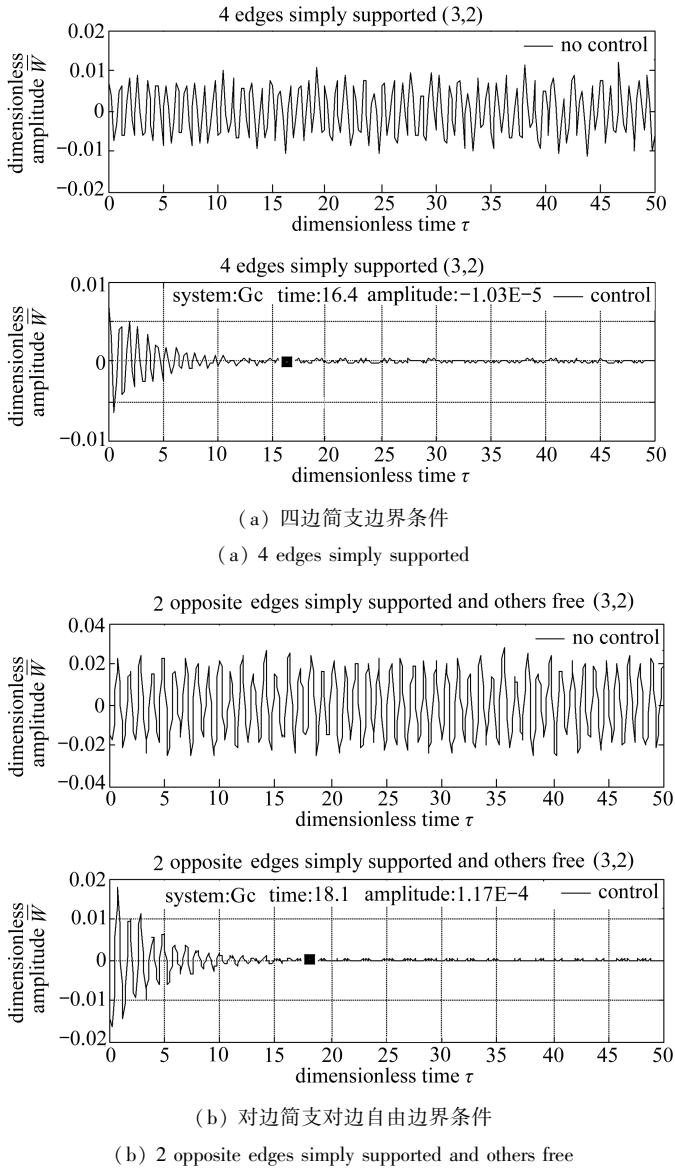


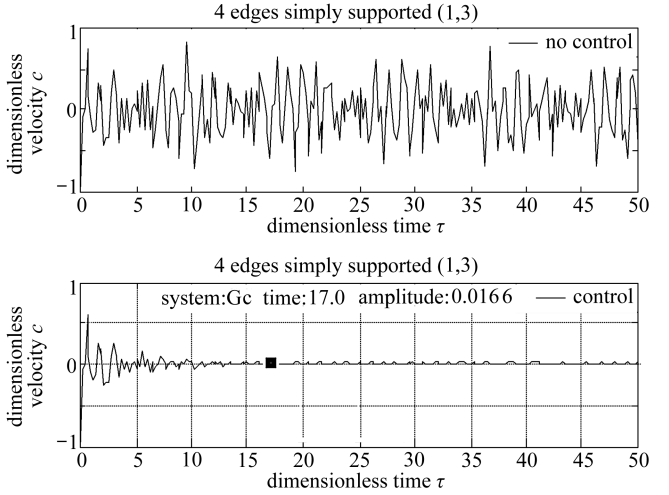
图7 两种边界条件下薄膜(3,2)位置处控制前后振幅随时间变化曲线

Fig. 7 The response amplitude curves of node (3, 2) under 2 types of boundary conditions

分析图8~10的速度响应曲线表明:

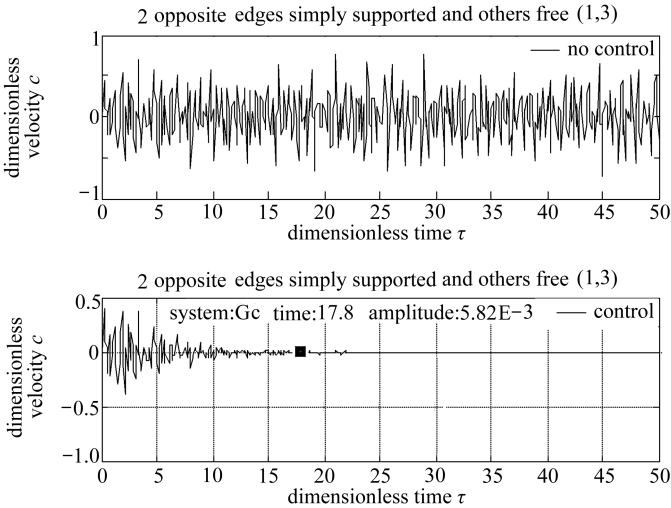
(a) 当作动器依次作用在不同位置时,两种边界条件下,各个节点处的速度输出都具有明显的衰减趋势,其中,中心点(2, 2)处的速度响应曲线衰减得最快.表4的数据表明,两种边界条件下,中心点(2, 2)处速度衰减趋近于0的无量纲时间 $\tau \approx 15$,比其它节点处快大约2~3.说明作动器作用在中心点处对轴向运动薄膜的横向振动控制效果最好.

(b) 对比图8~10中的图(a)与图(b)的响应曲线以及表4的数据表明,四边简支边界条件下运动薄膜振动衰减强度大,衰减速度快;一对边简支、另一对边自由边界条件下运动薄膜振动衰减强度小,衰减速度慢,但更符合实际印刷中的边界条件.



(a) 四边简支边界条件

(a) 4 edges simply supported



(b) 对边简支对边自由边界条件

(b) 2 opposite edges simply supported and others free

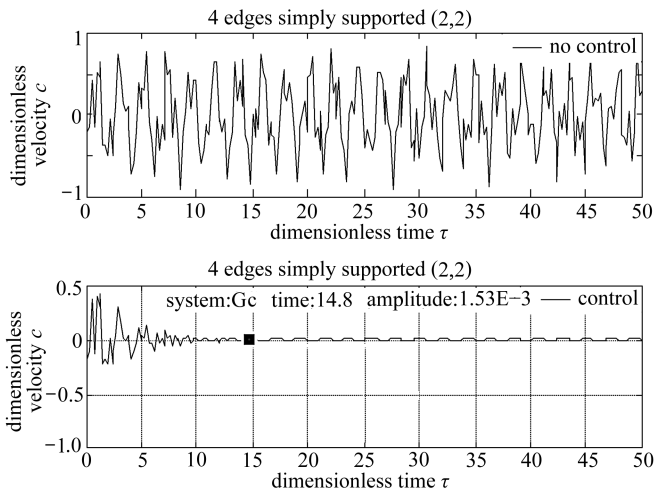
图8 两种边界条件下薄膜(1,3)位置处控制前后速度随时间变化曲线

Fig. 8 The response velocity curves of node (1,3) under the 2 types of boundary conditions

表3 控制后两种边界条件下振幅趋近于0的无量纲时间及幅值对比

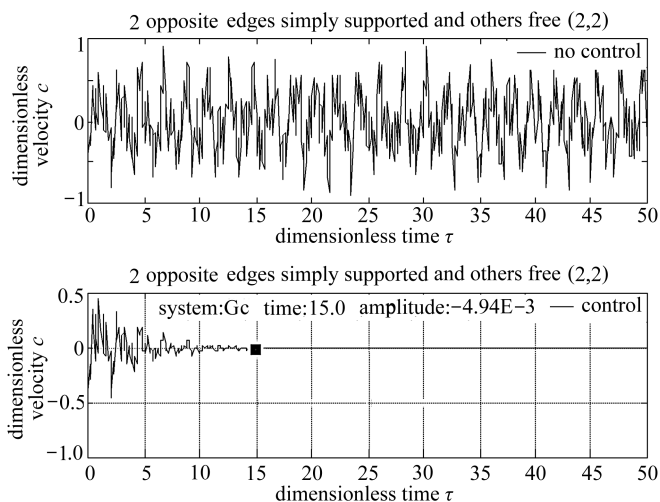
Table 3 The dimensionless time of amplitude attenuation to zero and the comparison of amplitude after control between the 2 types of boundary conditions

node location	dimensionless time of amplitude attenuation to 0		dimensionless amplitude after control	
	4 edges simply supported	2 opposite edges simply supported and others free	4 edges simply supported	2 opposite edges simply supported and others free
(1, 3)	15.4	16.4	1.72E-6	6.01E-5
(2, 2)	15.2	17.6	-3.91E-5	-0.000 311
(3, 2)	16.4	18.1	-1.03E-5	-0.000 117



(a) 四边简支边界条件

(a) 4 edges simply supported



(b) 对边简支对边自由边界条件

(b) 2 opposite edges simply supported and others free

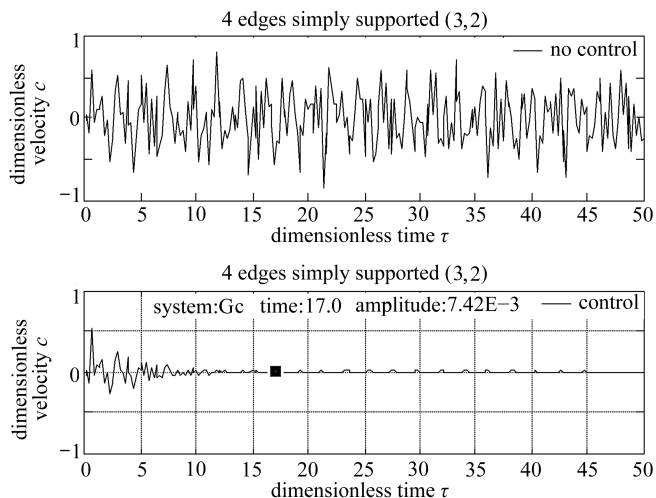
图9 两种边界条件下薄膜(2,2)位置处控制前后速度随时间变化曲线

Fig. 9 The response velocity curves of node (2,2) under the 2 types of boundary conditions

表4 控制后两种边界条件下速度趋近于0的无量纲时间及速度值对比

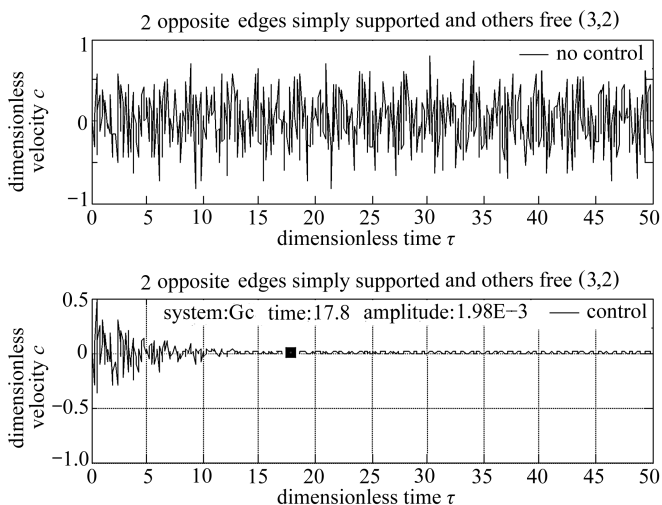
Table 4 The dimensionless time of velocity attenuation to zero and the comparison velocity value after control between the 2 types of boundary conditions

node location	dimensionless time of velocity attenuation to 0		dimensionless velocity after control	
	4 edges simply supported	2 opposite edges simply supported and others free	4 edges simply supported	2 opposite edges simply supported and others free
(1,3)	17	17.8	0.016 6	0.005 82
(2,2)	14.8	15	0.001 53	-0.004 94
(3,2)	17	17.8	0.007 42	0.001 98



(a) 四边简支边界条件

(a) 4 edges simply supported



(b) 对边简支对边自由边界条件

(b) 2 opposite edges simply supported and others free

图 10 两种边界条件下薄膜(3,2)位置处控制前后速度随时间变化曲线

Fig. 10 The response velocity curves of node (3,2) under the 2 types of boundary conditions

5 结 论

论文采用次最优控制法研究了两种边界条件下考虑弯曲刚度的印刷运动薄膜横向振动的主动控制问题。得到以下结论:

1) 得到了控制前后两种边界条件下轴向运动薄膜的振幅响应曲线和速度响应曲线。对响应曲线的分析表明,采用次最优控制法能够在短时间内($\tau = 15 \sim 18$)迅速、有效地降低运动薄膜的振动强度,并使之衰减趋近于0。

2) 通过对两种边界条件下响应曲线分析表明,作动器作用在固定节点处时,四边简支边界条件下的控制效果好,运动薄膜振幅衰减趋近于0的无量纲时间 $\tau \approx 15.4$,比对边简支对边自由边界条件下快1~3;作动器作用在不同节点处时,两种边界条件下中心点处的控制

效果最好,速度衰减趋近于0的无量纲时间 $\tau \approx 15$,比其余节点处速度衰减趋近于0的时间快约2~3。

3) 控制后四边简支边界条件下运动薄膜振动衰减强度大,衰减速度快;对边简支对边自由边界条件下运动薄膜振动衰减强度小、速度慢,但更符合实际印刷中的边界条件。

本文研究表明,采用次最优控制法对印刷过程中考虑弯曲刚度的轴向运动薄膜的横向振动施行主动控制是可行的和有效的,为印刷过程中降低运动薄膜的振动,提高印刷稳定性,保证套印精度和印品质量提供了理论依据及控制方法。

参考文献(References):

- [1] Altunsaray E, Bayer I. Deflection and free vibration of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates for different boundary conditions[J]. *Ocean Engineering*, 2013, **57**: 197-222.
- [2] YU Tian-chong, NIE Guo-jun, ZHONG Zheng, CHU Fu-yun. Analytical solution of rectangular plate with in-plane variable stiffness[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2013, **34**(4): 395-404.
- [3] 唐有琦, 陈立群. 面内平动黏弹性板非线性振动的内-外联合共振[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(5): 480-487. (TANG You-qi, CHEN Li-qun. Internal-external combination resonance of nonlinear vibration of in-plane translating viscoelastic plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(5): 480-487. (in Chinese))
- [4] TANG You-qi, CHEN Li-qun. Stability analysis and numerical confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed[J]. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, 2013, **37**: 106-121.
- [5] CHEN Li-qun, YANG Xiao-dong. Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed; comparison of two nonlinear models[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(1): 37-50.
- [6] CHEN Li-qun, YANG Xiao-dong. Transverse nonlinear dynamics of axially accelerating viscoelastic beams based on 4-term Galerkin truncation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, **27**(3): 748-757.
- [7] Kim J, Cho J, Lee U, Park S. Modal spectral element formulation for axially moving plates subjected to in-plane axial tension[J]. *Computers & Structures*, 2003, **81**(20): 2011-2020.
- [8] 周银锋, 王忠民. 轴向运动粘弹性板的横向振动特性[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(2): 191-199. (ZHOU Yin-feng, WANG Zhong-min. The transverse vibration characteristics of the axially moving viscoelastic plate[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(2): 191-199. (in Chinese))
- [9] Saksa T, Banichuk N, Jeronen J, Kurki M, Tuovinen T. Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, **49**(23/24): 3355-3366.
- [10] Greco D, Blanc P. Active vibration control of flexible materials found within printing machines[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300**(3/5): 831-846.
- [11] Nguyen Q C, Hong K S. Transverse vibration control of axially moving membranes by regulation of axial velocity[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, **20**(4): 1124-1131.
- [12] Nagarkatti S P, ZHANG Fu-min, Costic B T, Dawson D M, Rahn C D. Speed tracking and transverse vibration control of an axially accelerating web[J]. *Mechanical Systems and Sig-*

nal Processing, 2002, **16**(2/3): 337-356.

- [13] Nguyen Q C, Hong K S. Simultaneous control of longitudinal and transverse vibrations of an axially moving string with velocity tracking[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(13): 3006-3019.
- [14] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1986: 430-480. (NI Zhen-hua. *Vibration Mechanics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1986: 430-480. (in Chinese))
- [15] Johnson T L, Athans M. On the design of optimal constrained dynamic compensators for linear constant systems[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1970, **15**(6): 658-660.
- [16] Levine W S, Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1970, **15**(1): 44-48.

Transverse Vibration Control of Moving Printing Membranes With Bending Stiffness

WU Ji-mei¹, JING Tao¹, WANG Yan², LI Yan-feng³,
XUE Zhi-cheng³, WU Qiu-min¹

(1. *School of Printing and Packaging Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P.R.China*;

2. *School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P.R.China*;

3. *Shaanxi Beiren Printing Machinery Co., Ltd, Weinan, Shaanxi 714000, P.R.China*)

Abstract: The active control of transverse vibration of axially moving rectangular membranes with bending stiffness was investigated during the printing process. A computing model for the moving printing membrane with bending stiffness was established. The discretized dynamic equations for the moving membrane were obtained with the finite difference method, and the state equations of the transverse vibration control system for the moving membrane were derived. The suboptimal control method was applied to conduct the active control of transverse vibration of the moving membrane under various boundary conditions of actual printing processes. The calculated results show that the vibration of the moving rectangular membrane can be controlled effectively within a short time with the suboptimal vibration control method. The control effect will be better when the actuators act on some fixed nodes with 4 edges simply supported; when the actuators act on variable nodes, the control effect will be the best in the case of central point actuation under the 2 types of boundary conditions, where the dimensionless time of velocity attenuation to zero is shorter than those in the other cases of actuation at the rest nodes. It is indicated that the transverse vibration of axially moving rectangular membranes can be controlled effectively with the suboptimal control method, thus the printing precision can be promoted and the printing quality ensured.

Key words: axially moving membrane; bending stiffness; transverse vibration; control

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11272253; 11202159; 51305341)