文章编号:1000-0887(2015)06-0651-08

广义强向量拟平衡问题解的存在性和 Hadamard 适定性*

曾 静[1], 彭再云[2], 张石生[3]

(1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067;
2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
3. 云南财经大学 数学与统计学院, 昆明 650224)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 首先,在映射 $-f(\cdot,\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ 自然拟 C-凸和映射 f 上半 $(-C)$-连续的条件下,构造一个重要辅助函数,利用不同的证明方法,在不要求 C^* 具有弱 * 紧基的情况下,建立了广义强向量拟平衡问题解的存在性定理.然后在适当条件下,给出问题序列收敛的定义,建立解集映射的上半连续性,并讨论广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性,得到广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性成立的充分条件.

关 键 词: 广义强向量拟平衡问题; 解的存在性; Hadamard 适定性; 自然拟 C-凸
中图分类号: O224 **文献标志码:** A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.06.009

引 言

众所周知,向量平衡问题与变分不等式问题、最优控制问题、Nash 均衡问题、数理经济、网络经济、决策和对策理论以及非线性分析中的许多问题有着密切的联系,具有强烈而丰富的实际背景,现实生活中的大量实际问题为其提供了研究的模型, 且向量平衡问题为向量变分不等式问题、向量互补问题、向量优化问题等,提供了一个统一的模型.对这一问题的研究涉及集值分析、凸分析、泛函分析、线性与非线性分析、非光滑分析、变分分析、锥偏序理论等数学分支.因此,对向量平衡问题的研究有着重要的理论意义和应用价值,已有众多学者进行了深入研究,具体可参见文献[1-6].假设 E,F 和 Z 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间,I 是有限指标集,X 和 Y 分别是 E 和 F 的非空凸子集.设 $C \subset Z$ 是顶点在原点的非空闭凸锥,C 定义了 Z 上的偏序 $z_1 \leqslant z_2$,当且仅当 $z_2 - z_1 \in C$.设 $S:X \to 2^X$ 和 $T:X \to 2^Y$ 是非空集值映射,$f:X \times Y \times X \to Z$ 是向量值映射.本文考虑如下形式的广义强向量拟平衡问题(简称 GSVQEP):找 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in X$

* **收稿日期:** 2015-02-15; **修订日期:** 2015-05-02
基金项目: 国家自然科学基金(11401058;11301571;11301570;11401487);重庆市自然科学基金(cstc2012jjA00038);重庆市教委科学技术研究项目(KJ130732)
作者简介: 曾静(1983—), 女, 重庆人,讲师, 博士(E-mail: yiyuexue219@163.com);
彭再云(1980—), 男, 重庆人, 教授, 博士(E-mail: pengzaiyun@126.com);
张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授(通讯作者. E-mail: changss@yahoo.cn).

$\times Y$,使得 $\bar{x} \in S(\bar{x})$, $\bar{y} \in T(\bar{x})$,

$$f(\bar{x}, \bar{y}, u) \geqslant 0, \qquad \forall u \in S(\bar{x}).$$

该模型也是文献[5]中考虑的模型.值得指出的是,已有关于向量平衡问题解的存在性结果,大多要求锥 C 的对偶锥 C^* 具有弱 * 紧基,等价于要求 $\mathrm{int}\, C \neq \varnothing$.然而,很多情况下,拓扑向量空间的锥的内部是空的,譬如:常见的 l^p 和 $L^p(\Omega)$ 空间,它们的标准序锥的内部是空的,其中 $1 < p < \infty$.另外,Hadamard 适定性也是近年来关注的热点.学者们将其经典形式推广到一般,研究了不同问题的 Hadamard 适定性,譬如:标量优化问题,向量值优化问题,优化控制问题等,可参见文献[7-10].然而,到目前为止,关于广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性研究几乎没有.

本文首先在不要求 C^* 具有弱 * 紧基的情况下,使用不同于参考文献[5]中定理 3.1 的假设条件,运用不同的证明方法,建立广义强向量拟平衡问题解的存在性定理,然后讨论广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性,并得到广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性成立的充分条件.

1 预备知识

本节引入向量值映射和集值映射的基本概念和相关性质.

设 E 和 F 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, X 和 Y 分别是 E 和 F 的非空凸子集.称集值映射 $G: X \to 2^Y$ 为闭映射,当且仅当 $\mathrm{Graph}(G) = \{(x, y) \mid x \in X, y \in G(x)\}$ 是 $X \times Y$ 中的一个闭集.称集值映射 G 为紧映射,当且仅当 $G(X)$ 的闭包,即, $\overline{G(X)}$ 是紧集,其中 $G(X) = \cup_{x \in X} G(x)$.

定义 1[11] 设 (Z, C) 是一个实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间,其上的偏序结构由 C 诱导, X 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E 的非空凸子集, $\bar{x} \in X$, $f: X \to Z$ 是一个向量值映射.若对 Z 中原点的任意邻域 U,存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 V,使得对任意的 $x \in V$,有 $f(x) \in f(\bar{x}) + U + C$,则称 f 在 $\bar{x}$ 处为上半 C- 连续的.

定义 2[12] 设 E 和 F 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, X 和 Y 分别是 E 和 F 的非空子集, $G: X \to 2^Y$ 是一个集值映射.

(i) 设 $x \in X$.若对任意的开集 $G(x) \subset U$,存在 x 的一个邻域 V,使得 $\cup_{x \in X} G(x) := G(V) \subset U$,则称 G 在 $x \in X$ 是上半连续的.若 G 在 X 中的每一点都是上半连续的,称 G 是上半连续的.

(ii) 设 $x \in X$.若对任意的 $y \in G(x)$, y 的任意邻域 U,存在 x 的一个邻域 V,使得 $\forall x' \in V$,有 $G(x') \cap U \neq \varnothing$,则称 G 在 $x \in X$ 是下半连续的.若 G 在 X 中的每一点都是下半连续的,称 G 是下半连续的.

(iii) 若 G 既是上半连续的,又是下半连续的,则称 G 是连续的.

引理 1[12] 设 E 和 F 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, X 和 Y 分别是 E 和 F 的非空子集, $G: X \to 2^Y$ 是集值映射.

(i) 若 G 是上半连续的,且对任意的 $x \in X$, $G(x)$ 是一个闭集,则 G 是一个闭映射.

(ii) 称 G 在 $x \in X$ 是下半连续的,当且仅当对任意的 $y \in G(x)$,对任意的网 $\{x_n\}$, $x_n \to x$,存在一个子网 y_{n_k},使得 $y_{n_k} \in G(x_{n_k})$, $y_{n_k} \to y$.

定义 3[13] 设 (Z, C) 是一个实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间,其上的偏序结构由 C 诱导, X 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E 的非空凸子集, $f: X \to Z$ 是一个向量值映射.

(i) 若 $\forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in X,\lambda \in [0,1]$,有 $f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2)$,则称 f 在 X 上是 C- 凸的.

(ii) 若 $\forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in X,\lambda \in [0,1]$,有 $f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant f(\boldsymbol{x}_1)$ 或 $f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant f(\boldsymbol{x}_2)$,则称 f 在 X 上是真拟 C- 凸的.

(iii) 若 $\forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in X,\lambda \in [0,1]$,存在 $\mu \in [0,1]$,使得 $f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant \mu f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\mu)f(\boldsymbol{x}_2)$, 则称 f 在 X 上是自然拟 C- 凸的.

注 1 事实上每个 C- 凸或真拟 C- 凸映射都是自然拟 C- 凸映射, 具体证明可参见文献[13].

2 GSVQEP 解的存在性

锥 C 的对偶锥 C^* 具有弱 * 紧基,等价于要求 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$,本节在不要求 C^* 具有弱 * 紧基的情况下,使用不同于文献[5]中定理 3.1 的假设条件,运用不同的证明方法,建立了广义强向量拟平衡问题解的存在性定理.

引理 2[12] 设 E 和 F 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, $X \subset E, Y \subset F$,且 X 是紧集,则集值映射 $G:X \to 2^Y$ 是上半连续的且具有紧值,当且仅当 G 是一个闭映射.

下面介绍 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理,它是证明过程中用到的重要工具.

引理 3[14] 设 E 是实局部凸 Hausdorff 向量空间, $X \subset E$ 是非空紧凸子集.若 $G:X \to 2^X$ 是上半连续的,且 $\forall \boldsymbol{x} \in X, G(\boldsymbol{x})$ 是非空闭凸子集,则 G 在 X 中有一个不动点.

定理 1 设 E,F 和 Z 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, $X \subset E$ 和 $Y \subset F$ 是非空紧凸子集.设集值映射 $S:X \to 2^X$ 是连续的, $\forall \boldsymbol{x} \in X, S(\boldsymbol{x})$ 是非空闭凸集, $T:X \to 2^Y$ 是上半连续的, $\forall \boldsymbol{x} \in X, T(\boldsymbol{x})$ 是非空闭凸集.且满足如下条件:

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in X, \forall \boldsymbol{y} \in Y, \forall \boldsymbol{u} \in S(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \geqslant 0$;

(ii) $\forall (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \in Y \times X, -f(\cdot,\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ 是自然拟 C- 凸的;

(iii) f 是上半$(-C)$- 连续的;

则 GSVQEP 存在一个解 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in X \times Y$.

证明 $\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y$,定义集值映射 $A:X \times Y \to 2^X$:

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{u} \in S(\boldsymbol{x}): f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0, \ \forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})\}.$$

(a) $\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y$,下证 $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 X 中的非空凸子集.

因为 $\forall \boldsymbol{x} \in X, S(\boldsymbol{x})$ 是非空的,由条件(i)可知, $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是非空的.对任意的 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2 \in A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\lambda \in [0,1]$,根据 $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的定义可得

$$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2 \in S(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0, & \forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x}), \\ f(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0, & \forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{2}$$

因为 $S(\boldsymbol{x})$ 是凸集,由式(1)可知, $\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2 \in S(\boldsymbol{x})$.又因为 $-f(\cdot,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 是自然拟 C- 凸的,所以存在 $\mu \in [0,1]$, 使得

$$-f(\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant \mu(-f(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) + (1-\mu)(-f(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})).$$

由式(2)可得,

$$f(\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant \mu f(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) + (1-\mu)f(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0.$$

从而 $\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2 \in A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,故, $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一个凸集.

(b) 下证对任意的 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y, A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一个闭集.

设 $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{u}_n \to \bar{\boldsymbol{u}}$．只需证明 $\bar{\boldsymbol{u}} \in A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$．由 $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 可知

$$\boldsymbol{u}_n \in S(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

$$f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

因为 $S(\boldsymbol{x})$ 是一个闭集，由式(3)和 $\boldsymbol{u}_n \to \bar{\boldsymbol{u}}$ 可知，$\bar{\boldsymbol{u}} \in S(\boldsymbol{x})$．因此，下面只需证明 $f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0$，$\forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})$．用反证法，假设存在 $\bar{z} \in S(\boldsymbol{x})$ 使得 $f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) \ngeqslant 0$．即，$f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) \notin C$．因为 C 是一个闭凸锥，所以存在 Z 中原点的一个邻域 U，使得 $(f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U) \cap C = \varnothing$．从而有 $(f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C) \cap C = \varnothing$．因为 $f(\cdot,\boldsymbol{y},\bar{z})$ 是上半 $(-C)$-连续的，所以对 Z 中原点的任一邻域，不妨记为 U，存在 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的一个邻域 V，使得对任意的 $\boldsymbol{u} \in V$，有 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) \in f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C$．因为 $\boldsymbol{u}_n \to \bar{\boldsymbol{u}}$，所以存在 $n_0 \in I$，使得 $f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y},\bar{z}) \in f(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C$，$\forall n \geqslant n_0$．即 $f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y},\bar{z}) \notin C$，$\forall n \geqslant n_0$．又因为 $\bar{z} \in S(\boldsymbol{x})$，所以与式(4)矛盾．故，$\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y$，$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一个闭集．

(c) 下证集值映射 A 是上半连续的．

因为 $X \times Y$ 是紧集，由引理2可知，只需证明集值映射 A 是一个闭映射．令 $\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{u}_n): n \in \mathbf{N}\} \subset \mathrm{Graph}(A)$，$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{u}_n) \to (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$．证 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Graph}(A)$，即证，$\boldsymbol{u} \in S(\boldsymbol{x})$，$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0$，$\forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})$．由 $\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{u}_n): n \in \mathbf{N}\} \subset \mathrm{Graph}(A)$ 可知，

$$\boldsymbol{u}_n \in S(\boldsymbol{x}_n), \tag{5}$$

$$f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x}_n). \tag{6}$$

由式(5)可知，

$$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n): n \in \mathbf{N}\} \subset \mathrm{Graph}(S). \tag{7}$$

因为 S 是上半连续的，对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$，$S(\boldsymbol{x})$ 是闭集，所以由引理1的结论(i)可知，S 是一个闭映射．由式(7)和 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n) \to (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 可得，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Graph}(S)$，即，$\boldsymbol{u} \in S(\boldsymbol{x})$．故，下面只需证明 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0$，$\forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})$．用反证法，假设存在 $\bar{z} \in S(\boldsymbol{x})$，使得 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) \ngeqslant 0$，即，$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) \notin C$．因为 C 是一个闭凸锥，所以存在 Z 中原点的某个邻域 U，使得 $(f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U) \cap C = \varnothing$．从而可得

$$(f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C) \cap C = \varnothing. \tag{8}$$

因为 S 在 $\boldsymbol{x}$ 点处是下半连续的，$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ 及 $\bar{z} \in S(\boldsymbol{x})$，由引理1的结论(ii)可知，存在 $\boldsymbol{x}_n$ 的一个子网，不妨仍记为 $\boldsymbol{x}_n$，使得存在网 $\boldsymbol{z}_n$，满足 $\boldsymbol{z}_n \in S(\boldsymbol{x}_n)$ 且 $\boldsymbol{z}_n \to \bar{z}$．由式(6)和 $(\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{u}_n) \to (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ 可得，$(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}_n) \to (\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z})$，

$$f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}_n) \geqslant 0. \tag{9}$$

因为 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是上半 $-C$-连续的，所以对 Z 中原点的任意邻域 U，存在 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z})$ 的一个邻域 V，使得对任意的 $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') \in V$，有 $f(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') \in f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C$．又因为 $(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}_n) \to (\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z})$，所以存在 $n_0 \in I$，使得 $f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}_n) \in f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\bar{z}) + U - C$，$\forall n \geqslant n_0$．因此，由式(8)可得，$f(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{z}_n) \notin C$，$\forall n \geqslant n_0$，与式(9)矛盾．故 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geqslant 0$，$\forall \boldsymbol{z} \in S(\boldsymbol{x})$．即 A 是上半连续的．

(d) 下证 GSVQEP 有解．

定义集值映射 $H: X \times Y \to 2^{X \times Y}$ 如下：

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), T(\boldsymbol{x})), \qquad \forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y.$$

因为集值映射 A 是上半连续的，T 也是上半连续的，所以集值映射 H 也是上半连续的．因为对任意的 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y$，$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一个非空闭凸集，且对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$，$T(\boldsymbol{x})$ 也是一个非空闭凸集，所以对任意的 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y$，$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 必然也是一个非空闭凸集．根据引理3可知，存在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in X \times Y$，使得 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in H(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$．即，$\bar{\boldsymbol{x}} \in A(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$，$\bar{\boldsymbol{y}} \in T(\bar{\boldsymbol{x}})$．这就意味着存在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in X \times$

Y,使得 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S(\bar{\boldsymbol{x}}),\bar{\boldsymbol{y}} \in T(\bar{\boldsymbol{x}})$,

$$f(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{u}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in S(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

故,GSVQEP 有解.

注 2 显然定理 1 的条件和证明方法与文献[5]中定理 3.1 的条件和证明方法不同.事实上:(i) 由于构造的关键辅助函数不一样,所以定理 1 中关于 f 的广义凸性假设是针对第 1 个参数,而文献[5]中定理 3.1 的关于 f 的广义凸性是针对第 3 个参数.故二者关于 f 的凸性假设是不同的.(ii) 在文献[5]的定理 3.1 中,要求 f 既是 C-连续的,又是 $(-C)$-连续的.然而,在定理 1 中,仅要求 f 是上半 $(-C)$-连续的.故,定理 1 中关于 f 的连续性假设比文献[5]中的假设弱.(iii) 由于构造的关键辅助函数不一样,定理 1 的证明方法与文献[5]中定理 3.1 的证明方法也是不同的.

3 GSVQEP 的 Hadamard 适定性

本节讨论广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性,并得到广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性成立的充分条件.

下面总是假设 P_0 是问题 GSVQEP 的集合,$p_n=(f_n, S_n, T_n)(n=1,2,\cdots)$ 是包含于 P_0 的 GSVQEP 问题序列,其具体可描述为:找 $\bar{\boldsymbol{x}}_n \in X,\bar{\boldsymbol{y}}_n \in T_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)$,使得 $\bar{\boldsymbol{x}}_n \in S_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)$, $f_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n,\bar{\boldsymbol{y}}_n,\boldsymbol{u}) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{u} \in S_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)$.对 P_0 中任取的一个问题 $p=(f,S,T) \in P_0$,具体可描述为:找 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$, $\bar{\boldsymbol{y}} \in T(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S(\bar{\boldsymbol{x}})$, $f(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in S(\bar{\boldsymbol{x}})$.

定义 4[15] 设 (P_0,d_{P_0}) 为所考虑问题的度量空间,任取 $p \in P_0$ 为一个 GSVQEP, $(X\times Y, d_{X\times Y})$ 为 (P_0,d_{P_0}) 中问题的解集度量空间.集值映射 Γ 是从 (P_0,d_{P_0}) 到 $2^{X\times Y}$ 的一个解映射,对任意的 $p \in P_0$,$\Gamma(p)$ 是 $(X\times Y,d_{X\times Y})$ 中的一个非空解集.给定 $p \in P_0$.

(i) 若 p 的解集 $\Gamma(p)$ 是单点(即,解唯一),且对任意的序列 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n) \in \Gamma(p_n)$,当 $p_n \to p$ 时,有 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)$ 收敛于 p 的唯一解,则称 p 是 Hadamard 适定的(简称 H-wp).

(ii) 若 p 的解集 $\Gamma(p)$ 非空,且对任意的序列 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n) \in \Gamma(p_n)$,当 $p_n \to p$ 时,$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)$ 必有子列收敛于 p 的某个解,则称 p 是广义 Hadamard 适定的(简称 gH-wp).

设 Z 是一个度量空间,$A\subset Z,B\subset Z$,从集合 A 到集合 B 的距离定义为 $e(A,B)=\sup\{d(a,B):a\in A\}$,其中 $d(a,B):=\inf\{\|b-b'\|:b'\in B\}$.集合 A 和 B 的 Hausdorff 距离定义为 $h(A,B)=\max\{e(A,B),e(B,A)\}$.

定义 P_0 中的距离函数 d_{P_0} 为

$$d_{P_0}(p_1,p_2)=\sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in X\times Y\times X}\|f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})-f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\| + \sup_{\boldsymbol{x}\in X} h(S_1(\boldsymbol{x}),S_2(\boldsymbol{x})) + \sup_{\boldsymbol{x}\in X} h(T_1(\boldsymbol{x}),T_2(\boldsymbol{x})),$$

其中 $p_1=(f_1,S_1,T_1),p_2=(f_2,S_2,T_2) \in P_0$.令 $\sup_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in X\times Y\times X}\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\| < +\infty$.显然,$(P_0, d_{P_0})$ 是一个度量空间.

任取 P_0 中的问题序列 $p_n(n=1, 2, \cdots)$ 和问题 p.若 $d_{P_0}(p_n, p)\to 0$, 则称 $p_n \to p$.从而,GSVQEP 的 Hadamard 适定性概念可从定义 4 直接得到.另外,设 Γ 是从 P_0 到 $2^{X\times Y}$ 的解集映射,$\Gamma(p)$ 是 p 的解集.

下面举例说明并不是每一个 GSVQEP 都是 Hadamard 适定的,故,讨论 GSVQEP 的 Hadamard 适定性成立的充分性条件有意义.

例 1 设 $E=F=Z=\mathbf{R},X=Y=[-1,1]$.问题 p 定义为 $S(x)=(-1,1),T(x)=\{0\}$, $C=\mathbf{R}_+$, $f(x,y,u)=x-u$.问题序列 p_n 定义为 $S_n(x)=[-1+1/n,1-1/n],T_n(x)=\{0\}$, $f_n(x,$

$y,u)=x-u+1/n$.显然,$d(p_n,p)\to 0$,p_n 的解集序列 $\Gamma(p_n)$ 为 $[1-2/n,1-1/n]\times\{0\}$,然而 p 却无解.因此 p 并不是 Hadamard 适定的.

引理 4[15] 设 (P_0,d_{P_0}) 为所考虑问题的度量空间,$(X\times Y,d_{X\times Y})$ 为 (P_0,d_{P_0}) 中问题的解集度量空间,$\Gamma:P_0\to 2^{X\times Y}$ 是解集映射.若解集映射 Γ 上半连续,对任意的 $p\in P_0$,$\Gamma(p)$ 是非空紧集,则 p 是 gH-wp.

引理 5[16] 设 Z 是度量空间,则对于 Z 中原点的任意邻域 U,存在它的一个均衡开邻域 U_1,使得 $U_1+U_1\subset U$.

引理 6 设 E,F,Z 是度量空间,$X\subset E$,$Y\subset F$ 是非空紧凸集.设 (P_0,d_{P_0}) 是问题 GSVQEP 的度量空间.对任意的 $p=(f,S,T)\in P_0$,其解集 $\Gamma(p)$ 非空,且满足如下条件:

(i) $S:X\to 2^X$ 和 $T:X\to 2^Y$ 是紧闭连续映射,$\forall \boldsymbol{x}\in X$,$S(\boldsymbol{x})$ 和 $T(\boldsymbol{x})$ 是非空凸集;

(ii) 向量值映射 $f:X\times Y\times X\to Z$ 是连续的;

则 $\Gamma:P_0\to 2^{X\times Y}$ 是上半连续的.

证明 由于 $X\times Y$ 是紧集,根据引理 2,只需证明 Γ 是一个闭映射,即证,对任意的 $p_n\in P_0(n=1,2,\cdots)$,$p_n\to p$,$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\in\Gamma(p_n)$,$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\to(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Gamma(p)$.因为 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\in\Gamma(p_n)$,所以有 $\boldsymbol{y}_n\in T_n(\boldsymbol{x}_n)$,$\boldsymbol{x}_n\in S_n(\boldsymbol{x}_n)$,

$$f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{u})\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{u}\in S_n(\boldsymbol{x}_n).\tag{10}$$

根据 S, T 的连续性及 $p_n\to p$ 可得,$\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{x})$ 及 $\boldsymbol{y}\in T(\boldsymbol{x})$.从而,要证 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Gamma(p)$,只需证

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{v}\in S(\boldsymbol{x}).\tag{11}$$

用反证法,假设式(11)不成立,则有 $\exists \boldsymbol{v}\in S(\boldsymbol{x})$,使得 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\ngeqslant 0$,即,$\exists \boldsymbol{v}\in S(\boldsymbol{x})$,使得 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\notin C$.因为 C 是一个闭凸锥,所以存在 Z 中原点的一个邻域 U,使得

$$(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})+U)\cap C=\varnothing.$$

又因为 $\boldsymbol{v}\in S(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$,$S$ 是紧连续映射,$p_n\to p$,所以存在 $\boldsymbol{v}_n\in S_n(\boldsymbol{x}_n)$,使得 $\boldsymbol{v}_n\to\boldsymbol{v}$.

根据引理 5 可知,存在 Z 中原点的一个均衡开邻域 U_1,使得 $U_1+U_1\subset U$.又由于 $p_n\to p$,所以存在 $n_1\in I$,使得当 $n\geqslant n_1$ 时,有

$$f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)-f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)\in U_1.\tag{12}$$

由于 f 在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})$ 处连续,所以存在 $n_2\in I$,使得当 $n\geqslant n_2$ 时,有

$$f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)\in f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})+U_1.\tag{13}$$

令 $N=\max\{n_1,n_2\}$.根据式(12)和式(13)可得,当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)&=(f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)-f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n))+f(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)\in\\&\quad U_1+(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})+U_1)\subset f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})+U.\end{aligned}$$

因为 $(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})+U)\cap C=\varnothing$,所以有当 $n\geqslant N$ 时,

$$f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{v}_n)\notin C.\tag{14}$$

又因为 $\boldsymbol{v}_n\in S_n(\boldsymbol{x}_n)$,故式(14)与式(10)矛盾.因此,$\Gamma$ 是一个闭映射.

下面建立 GSVQEP 的 Hadamard 适定性成立的充分条件.

定理 2 设 E,F 及 Z 是度量空间,$X\subset E$ 及 $Y\subset F$ 是非空紧凸集.设对任意的 $p\in P_0$,p 的解集 $\Gamma(p)$ 非空,且满足如下条件:

(i) $S:X\to 2^X$ 及 $T:X\to 2^Y$ 是紧闭连续映射,$\forall \boldsymbol{x}\in X$,$S(\boldsymbol{x})$ 和 $T(\boldsymbol{x})$ 是非空凸集;

(ii) $f:X\times Y\times X\to Z$ 是连续的;

则问题 GSVQEP 是广义 Hadamard 适定的.

证明 根据引理 4 和引理 6 可直接得出结论.

注 3 易验证,若定理 2 中 GSVQEP 的解是唯一的,则 GSVQEP 是 gH-wp,可直接推出 GSVQEP 是 H-wp.

4 结 语

本文建立了广义强向量拟平衡问题解的存在性定理,说明该定理的假设条件和证明方法与文献[5]中定理 3.1 的假设条件和证明方法不同,并讨论了广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性,得到了广义强向量拟平衡问题的 Hadamard 适定性成立的充分条件.事实上,对于集值形式的广义强向量拟平衡问题,也可进一步利用此研究思路,考虑建立集值形式的广义强向量拟平衡问题的存在性定理和的 Hadamard 适定性成立的充分条件.然而,由于集值不同于单值, 处理过程将遇到什么困难,值得我们进一步探究.

致谢 本文作者衷心感谢重庆工商大学科研启动经费项目(2012-56-04)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Farajzadeh A P. On the symmetric vector quasi-equilibrium problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **322**(2): 1099-1110.

[2] FU Jun-yi. Generalized vector quasi-equilibrium problems[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, **52**(1): 57-64.

[3] Giannessi F. *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*[M]. Mathematical Theories. Dordrecht: Kluwer, 2000.

[4] Gong X H. Symmetric strong vector quasi-equilibrium problems[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2007, **65**(2): 305-314.

[5] Hou S H, Gong X H, Yang X M. Existence and stability of solutions for generalized Ky Fan inequality problems with trifunctions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, **146**(2): 387-398.

[6] LONG Xian-jun, HUANG Nan-jing, Teo Kok-lay. Existence and stability of solutions for generalized strong vector quasi-equilibrium problem[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, **47**(3/4): 445-451.

[7] Dontchev A L, Zolezzi T. *Well-Posed Optimization Problems*[M]. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[8] Li S J, Zhang W Y. Hadamard well-posed vector optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2010, **46**(3): 383-393.

[9] Lucchetti R, Revaliski J. *Recent Developments in Well-Posed Variational Problems*[M]. Mathematics and Its Applications. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[10] 赵勇, 彭再云, 张石生. 向量优化问题有效点集的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 643-650.(ZHAO Yong, PENG Zai-yun, ZHANG Shi-sheng. Stability of the sets of efficient points of vector-valued optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 643-650.(in Chinese))

[11] Luc D T. *Theory of Vector Optimization*[M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. New York: Springer, 1989.

[12] Aubin J P, Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis*[M]. New York: Wiley, 1984.

[13] Tanaka T. Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorems for vector-valued functions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994, **81**(2): 355-377.

[14] Glicksberg I L. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1952, **3**(1): 170-174.

[15] ZHOU Yong-hui, YU Jian, YANG Hui, XIANG Shu-wen. Hadamard types of well-posedness of non-self set-valued mappings for coincide points[J]. *Nonlinear Analysis: Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2005, **63**(5/7): 2427-2436.

[16] Berge C. *Topological Spaces*[M]. London: Oliver and Boyd, 1963.

Existence and Hadamard Well-Posedness of Solutions to Generalized Strong Vector Quasi-Equilibrium Problems

ZENG Jing[1], PENG Zai-yun[2], ZHANG Shi-sheng[3]

(1. *College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing* 400067, *P.R.China*;

2. *School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing* 400074, *P.R.China*;

3. *School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming* 650224, *P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Shi-sheng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Under the conditions of naturally quasi C-convexity of $-f(\cdot, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$, upper $(-C)$-continuity of f, an auxiliary function was constructed and an existence theorem for solutions to generalized strong vector quasi-equilibrium problems (for short, GSVQEPs) was established based on a method of proof other than the traditional ones, without the assumption that the dual of the ordering cone has a weak* compact base. Moreover, a definition of problem sequence convergence was given and the upper semi-continuity of solution set mappings was obtained under some proper conditions. Based on these results, a concept of Hadamard-type well-posedness for GSVQEPs was introduced and the sufficient conditions for that Hadamard well-posedness was proposed.

Key words: generalized strong vector quasi-equilibrium problem; existence theorem for solutions; Hadamard well-posedness; naturally quasi C-convex

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11401058;11301571;11301570;11401487)