

陀螺系统随机振动分析的辛本征展开方法*

赵岩, 李明武, 林家浩, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(我刊编委钟万勰、林家浩来稿)

摘要: 探讨了受随机载荷作用下陀螺阻尼系统随机动力响应问题,虚拟激励法作为随机振动分析的一种高效、精确方法已经广泛应用于结构抗震、抗风等工程领域,在以单类物理变量描述的 Lagrange(拉格朗日)体系框架下,振型分解方法已被有效应用于上述随机振动问题的模型自由度缩减,然而,对于陀螺系统的随机振动问题,由于陀螺效应的存在,基于 Rayleigh 商本征值的振型分解方法受到很大限制,对此,首先给出了陀螺系统辛本征值问题的一般形式,然后对于受平稳随机载荷激励的陀螺系统(无阻尼或有阻尼)引入虚拟激励法,基于辛本征空间展开推导了系统随机振动响应功率谱的求解列式;对于仅考虑陀螺效应的保守系统(无阻尼),该求解列式可以表述为一个显式表达式,在数值算例中,应用该文提出的方法分析了平稳随机载荷作用下一类阻尼陀螺系统的随机振动响应问题,通过与其它方法进行对比,验证了该方法的精确性和有效性。

关键词: 陀螺系统; 辛本征空间; 随机振动; 虚拟激励法

中图分类号: O324 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.05.001

引言

陀螺系统广泛存在于旋转机械装备中,是核电工程、机械工程等领域的重要装备之一,陀螺系统的动力特性及随机载荷作用下的安全性和可靠性研究一直是人们关心的重要问题^[1-2]。目前,对于常规复杂结构的动力学分析已经较为成熟,通常采用一类变量 Lagrange 体系进行动力学方程描述,并可导出 Rayleigh 商本征值问题,同时发展了有效的振型分解法用于预测复杂结构受迫振动情况下,系统的动力学行为演变规律^[3]。相对而言,由于问题的复杂性,对于旋转机械装备的动力学行为分析仍有很多不完善之处,其主要困难在于陀螺效应的存在,针对陀螺系统的本征值问题,钟万勰、林家浩提出了不对称实矩阵的本征对共轭子空间迭代算法及陀螺系统与反对称矩阵辛本征解计算方法,这些工作有效推进了相关问题的研究^[4-5]。近年来,钟万勰将经典力学的一些重要问题导入 Hamilton 体系,并指出陀螺系统本征值问题在二类变量

* 收稿日期: 2014-12-30; 修订日期: 2015-01-10

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11472067); 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2014CB046803)

作者简介: 赵岩(1974—),男,吉林公主岭人,副教授(E-mail: yzhao@dlut.edu.cn);
李明武(1990—),男,湖南浏阳人,硕士生(通讯作者, E-mail: limingwu0601@126.com);
林家浩(1941—),男,广东中山人,教授(E-mail: jhlin@dlut.edu.cn);
钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,中科院院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn)。

Hamilton 体系表述下表现为辛本征值问题,并完全可以基于辛本征空间展开策略实现结构动力响应分析^[6];进一步探讨了陀螺保守系统与非陀螺保守系统 Rayleigh 商本征值与辛本征值的密切关系,将辛本征空间展开推广至陀螺阻尼系统^[7]。

旋转机械系统处于复杂的工作环境中,对于潜在地震高发地区,其抗震性能评估是需要考虑的一个重要因素。地震作用具有随机性的本质,其相关的结构动力学行为也具有随机振动的行为机理。虚拟激励法是近年来发展的用来求解线性系统随机振动响应的有效算法^[8-10]。它将平稳随机激励转化为确定性简谐激励,将非平稳随机激励转化为常规的时域动力学分析,极大提高了随机振动分析的效率。目前,虚拟激励法在土木工程、海洋工程、车辆工程等都获得了广泛应用。尽管如此,将虚拟激励法应用于旋转机械系统的动力学分析,还存在一定的困难。主要是因为,通常应用虚拟激励法进行常规动力学系统随机振动分析时,多基于 Lagrange 体系的模态缩减技术,而对于考虑陀螺效应的旋转机械系统, Rayleigh 商本征值的分析策略受到很大限制,主要是不能使陀螺系统运动方程解耦,需要发展新的求解对策。

本文在前期相关工作基础上,对上述问题进行了更为深入的探讨,首先给出了 Hamilton 体系下陀螺系统辛本征值问题的一般描述。然后对于受平稳随机载荷激励作用的陀螺系统(考虑或不考虑阻尼)随机振动问题,结合虚拟激励法和 Hamilton 体系下辛本征展开方法推导了系统随机振动响应功率谱分析的求解列式;对于陀螺保守系统,通过导入 Hamilton 体系,得到了其动力刚度阵逆矩阵的显式表达。数值算例中,采用所提出的方法分析了一类阻尼陀螺系统的随机振动响应,计算结果同直接动刚度阵求逆法进行了对比,验证了本文方法的精确性和有效性,同时讨论了不同转速下,陀螺效应对于系统随机振动响应的影响。本文工作对于实际复杂旋转机械系统随机振动分析具有一定的借鉴意义。

1 陀螺系统辛本征值问题

对于一般的 n 维线性振动系统,运动学方程可以表示为如下形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

其中, $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{C}$ 和 \mathbf{K} 分别为系统的质量阵、陀螺阵、阻尼阵和刚度阵, \mathbf{q} 与 \mathbf{f} 分别为位移向量与激励向量。

为推导陀螺系统辛本征值问题,暂不考虑阻尼影响,运动方程(1)变为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (2)$$

定义对偶动量 $\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\mathbf{q}/2$, 可将运动方程(2)导入 Hamilton 体系,并有正则方程为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中, \mathbf{v} 和 \mathbf{H} 分别为状态向量与 Hamilton 矩阵,其具体表达式如下^[6]:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/2 & \mathbf{M}^{-1} \\ -(\mathbf{K} + \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/4) & \mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-T}/2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

对于正则方程(4),不考虑载荷项作用,可得到 Hamilton 矩阵本征值问题 $\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\psi}$ 。 \mathbf{H} 阵的 $2n$ 个本征值可以划分为二类^[6]:

$$\begin{cases} (\alpha) & \mu_i, & \text{Re}(\mu_i) < 0 \text{ or } \text{Re}(\mu_i) = 0, \text{Im}(\mu_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n, \\ (\beta) & \mu_{n+i}, & \mu_{n+i} = -\mu_i. \end{cases} \quad (5)$$

而对应本征向量满足共轭辛正交归一关系,如将辛本征矩阵按下列形式排列:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\psi}_{n+1}, \boldsymbol{\psi}_{n+2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{2n}], \quad (6)$$

则共轭辛正交归一关系为

$$\Psi^T J \Psi = J, \quad (7)$$

其中 J 为单位辛矩阵^[6].

2 陀螺系统的随机振动辛虚拟激励法

考虑随机振动问题,虚拟激励法可将平稳随机过程的随机振动分析转化为确定性的简谐分析^[9].此时,运动方程(1)右端的载荷向量可用虚拟简谐载荷替换.这里,假设虚拟载荷的形式为

$$f(t) = s e^{j\omega t}, \quad (8)$$

其中 s 向量可以看作是载荷作用幅值向量,可以写成如下的一般形式:

$$s = g \sqrt{S_f}, \quad (9)$$

其中, S_f 是激励载荷的功率谱密度函数.当不考虑行波效应时,向量 g 是一个 n 维的常向量,表征了外载的作用分布情况;当考虑行波效应时, g 则是作用时间差 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函数,对于平稳激励而言,其与时间 t 无关.

2.1 无阻尼陀螺系统随机振动辛虚拟激励法

由第1节可知,无阻尼陀螺系统在 Hamilton 体系下有辛本征值问题,且本征向量有辛正交归一关系.对于无阻尼陀螺系统,利用辛本征向量展开可以实现对动力学方程(3)的完全解耦.

由 Hamilton 阵本征向量的展开定理^[6]

$$v = \sum_{i=1}^n [a_i \psi_i + b_i \psi_{n+i}] = \Psi v_a, \quad v_a = [a^T \quad b^T]^T, \quad (10)$$

将式(10)代入式(3),左乘 $J\Psi^T J$,得到

$$\dot{v}_a = D_p v_a - F e^{j\omega t}, \quad (11)$$

其中

$$D_p = \text{diag}[\text{diag}(\mu_i), -\text{diag}(\mu_i)], \quad (12)$$

$$F = J\Psi^T J \begin{Bmatrix} 0 \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_\beta^T s \\ -Q_\alpha^T s \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

上式中 Q_α 和 Q_β 将在式(16)中给出具体定义.由于载荷为简谐激励,故响应也具有简谐形式,设响应为 $v_a = w e^{j\omega t}$ 代入式(11)得到

$$w = DF, \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} D = (D_p - \text{diag}(j\omega))^{-1} = \text{diag}[D_1, D_2], \\ D_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\mu_i - j\omega}\right), \quad D_2 = \text{diag}\left(-\frac{1}{\mu_i + j\omega}\right). \end{cases} \quad (15)$$

如果将辛本征矩阵 Ψ 写成如下的分块形式:

$$\Psi = \begin{bmatrix} Q_{\alpha(n \times n)} & Q_{\beta(n \times n)} \\ P_{\alpha(n \times n)} & P_{\beta(n \times n)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

则有

$$q = [Q_\alpha \quad Q_\beta] v_a. \quad (17)$$

注意到式(14),故有

$$\mathbf{q} = [\mathbf{Q}_\alpha \quad \mathbf{Q}_\beta] \mathbf{D} \mathbf{F} e^{j\omega t} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{s} e^{j\omega t}, \quad (18)$$

其中 $\boldsymbol{\delta}$ 可以理解为动柔度矩阵,其计算如下:

$$\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{D}_1 \mathbf{Q}_\beta^T - \mathbf{Q}_\beta \mathbf{D}_2 \mathbf{Q}_\alpha^T) = \sum_{i=1}^n d_{1i} \mathbf{q}_{\alpha i} \mathbf{q}_{\beta i}^T - \sum_{i=1}^n d_{2i} (\mathbf{q}_{\alpha i} \mathbf{q}_{\beta i}^T)^T, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{Q}_\alpha = [\mathbf{q}_{\alpha 1} \quad \mathbf{q}_{\alpha 2} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{\alpha(n-1)} \quad \mathbf{q}_{\alpha n}], \quad \mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{q}_{\beta 1} \quad \mathbf{q}_{\beta 2} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{\beta(n-1)} \quad \mathbf{q}_{\beta n}], \quad (20)$$

而 d_{1i} 与 d_{2i} 分别为对角矩阵 \mathbf{D}_1 与 \mathbf{D}_2 的第 i 个对角元.式(19)只含有简单的乘法,完全没有矩阵求逆计算.而且对于有大量频率采样点的情形, $(\mathbf{q}_{\alpha i} \mathbf{q}_{\beta i}^T)$ 只需计算一次即可,从而进一步提高了计算效率.

对于响应功率谱的计算,可由虚拟激励法执行

$$\mathbf{S}_{qq} = \mathbf{q}^* \mathbf{q}^T = (\boldsymbol{\delta} \mathbf{s})^* (\boldsymbol{\delta} \mathbf{s})^T. \quad (21)$$

由此,基于辛虚拟激励法可以得到陀螺保守系统响应功率谱的显式表达式.特别地,考虑非陀螺保守系统,其作为陀螺保守系统的一个特例,以上的结论自然也是适用的.文献[7]建立了非陀螺保守系统在 Lagrange 体系与 Hamilton 体系下两种本征值问题之间的联系,即

$$\mu_i = j\omega_i, \quad \mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{Q}_\beta = \boldsymbol{\Psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1, \quad \boldsymbol{\Lambda}_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{-2j\omega_i}} \right), \quad (22)$$

其中, ω_i 为非陀螺保守系统的第 i 阶固有频率, $\boldsymbol{\Psi}_q$ 为由 Rayleigh 本征向量构成的矩阵.因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{D}_1 \mathbf{Q}_\beta^T - \mathbf{Q}_\beta \mathbf{D}_2 \mathbf{Q}_\alpha^T = \boldsymbol{\Psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\Psi}_q^T = \\ &= \boldsymbol{\Psi}_q \text{diag} \left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \boldsymbol{\Psi}_q^T = \sum_i^n \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\lambda_i = 1/(\omega_i^2 - \omega^2)$, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 为第 i 阶 Rayleigh 本征向量.

以上在 Hamilton 体系下建立的虚拟激励法,这里称其为辛虚拟激励法.为进行比较,下面给出直接建立在 Lagrange 体系下的虚拟激励法,称为直接虚拟激励法.将式(8)代入式(2),得到虚拟响应为

$$\mathbf{q} = (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{G} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{s} e^{j\omega t}, \quad (24)$$

从而可以计算得到响应功率谱 $\mathbf{S}_{qq} = \mathbf{q}^* \mathbf{q}^T$.对于矩阵阶数很高的复杂系统,反复地按式(24)进行矩阵求逆,会使直接虚拟激励法的计算效率显著降低.

同一个物理问题,既可以在 Lagrange 体系下描述也可以在 Hamilton 体系下表征.将虚拟激励法分别应用到两类体系,引申出了辛虚拟激励法与直接虚拟激励法.辛虚拟激励法由于建立在状态空间,因此更具有一般性.当然,对于同一个力学系统,两种虚拟激励法得到的结果应该是一致的.下面将证明对于非陀螺保守系统,其作为陀螺保守系统的特例,两种虚拟激励法得到的结果是一致的.对于非陀螺保守系统 ($\mathbf{G} = \mathbf{0}$),有 Rayleigh 商本征向量正交归一关系:

$$\boldsymbol{\Psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}_q = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\Psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}_q = \text{diag}(\omega_i^2), \quad (25)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}_q$ 为 Rayleigh 商本征向量矩阵.从而有

$$\boldsymbol{\Psi}_q^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\Psi}_q = \text{diag}(\omega_i^2 - \omega^2), \quad (26)$$

在上式左、右两边进行求逆运算后,左乘 $\boldsymbol{\Psi}_q$ 和右乘 $\boldsymbol{\Psi}_q^T$, 得到

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} = \boldsymbol{\Psi}_q \text{diag} \left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \boldsymbol{\Psi}_q^T. \quad (27)$$

将上式代入式(24),并利用 $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ 有

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\Psi}_q \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2}\right) \boldsymbol{\Psi}_q^T \mathbf{s} e^{j\omega t}. \quad (28)$$

通过对比式(18), (23)和(28),即可发现两种方法得到的结果是一致的.以上的论证是针对非陀螺保守系统的.至于陀螺保守系统,辛虚拟激励法得到了功率谱的显式表达式,而直接虚拟激励法并不能提供显式解.关于陀螺保守系统两种虚拟激励法的一致性,在后文通过数值算例也进行了相应验证.

2.2 阻尼陀螺系统随机振动辛虚拟激励法

以上的分析是针对陀螺保守系统的,并没有考虑阻尼效应.而实际工程结构总是要受到阻尼作用的.因此,本小节旨在建立阻尼陀螺系统的虚拟激励法的辛求解.需要说明的是,阻尼系统作为阻尼陀螺系统的特例,虚拟激励辛求解与常规 Lagrange 体系下求解是等价的.对于一般动力载荷,文献[7]中论证了阻尼系统在两种求解方法下得到的动力学响应是一致的,而平稳随机过程对应的虚拟激励法可以表述为一种稳态简谐分析,是动力响应的一种特殊情况,自然也会等价.在这一节中,不再具体讨论阻尼系统的虚拟激励法辛求解与常规求解的等价关系.

基于陀螺系统的辛本征向量展开,可以计算阻尼陀螺系统的动力响应^[7].根据虚拟激励法的思路,首先将式(8)代入式(1)有

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{s}e^{j\omega t} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}. \quad (29)$$

此时式(3)变为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

其中 \mathbf{v} 与 \mathbf{H} 已经在式(4)中给出定义且 $\mathbf{f}_c = \mathbf{s}e^{j\omega t} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$.基于辛本征空间展开有^[7]

$$\dot{\mathbf{v}}_a = (\mathbf{D}_p + \widehat{\mathbf{C}})\mathbf{v}_a - \mathbf{F}e^{j\omega t}, \quad (31)$$

其中

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{Q}_\alpha + \mathbf{D}\mathbf{P}_\alpha) & \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{Q}_\beta + \mathbf{D}\mathbf{P}_\beta) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

而 \mathbf{F} 在式(13)中已经给出了具体表达式.将式(31)与式(11)对比可以看到阻尼的引入,使得微分方程的系数矩阵多出了 $\widehat{\mathbf{C}}$ 部分.对于简谐分析,假设 $\mathbf{v}_a = \bar{\mathbf{w}}e^{j\omega t}$,并代入式(31)得到

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{F}, \quad (33)$$

其中

$$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_p + \widehat{\mathbf{C}} - \text{diag}(j\omega))^{-1}. \quad (34)$$

利用式(17),可得

$$\mathbf{q} = [\mathbf{Q}_\alpha \quad \mathbf{Q}_\beta] \bar{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{s} \\ -\mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{s} \end{Bmatrix} e^{j\omega t}, \quad (35)$$

根据虚拟激励法进一步可以计算得到响应功率谱.

以上是辛虚拟激励法的求解过程.而根据直接虚拟激励法,式(24)直接改写为

$$\mathbf{q} = (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega(\mathbf{G} + \mathbf{C}) + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{s} e^{j\omega t}, \quad (36)$$

从而可以根据虚拟响应计算得到响应的功率谱.后文将通过数值算例验证式(36)得到的结果与式(35)是一致的,从而验证辛虚拟激励法对于陀螺阻尼系统也是适用的.需要指出的一点是,对于考虑陀螺效应的旋转机械系统,基于 Rayleigh 商本征值的模态缩减技术由于没有考虑

陀螺效应而受到很大限制.与此同时,本小节建立的辛虚拟激励法是建立在辛本征空间基础上的,其相应的模态缩减技术则是考虑了陀螺效应的,因此有更大的适用范围.另外,直接应用式(36)求解,需要复数矩阵求逆过程,其一般是非常耗时的,特别是对于具有复杂自由度的旋转机械系统.而采用基于辛本征解展开的缩减技术,则会更具有优势.

3 数值算例

3.1 无阻尼陀螺转子系统

考虑以 $\Omega = 100 \text{ rad/s}$ 旋转的六转子系统^[11],圆盘从左到右的编号为 1~6,如图 1 所示.在本文采用的转子动力学模型中,对于轴采用 Euler 梁模型且不计及轴的惯性效应(假定轴的惯性相比转盘的惯性可以忽略不计).材料参数 $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.各轴段长度 l_i ,盘的质量 m_i ,盘的径向转动惯量 J_{di} 和极转动惯量 J_{pi} 具体数值列于表 1,其中下标 i 表示轴或盘的标号.由于是圆盘, $J_p = 2J_d$ 成立.轴截面取为圆截面,其二次轴距为 $I_d = 3.976 \times 10^{-8} \text{ m}^4$.两个支撑分别位于 2 号盘与 4 号盘轴心上,其刚度分别为 $K_1 = 3.92 \times 10^6 \text{ N/m}$ 和 $K_2 = 4.90 \times 10^6 \text{ N/m}$.

表 1 转子系统主要特性参数

Table 1 Main parameters of the rotor system

| | i | | | | | |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| l_i/m | 0.1 | 0.05 | 0.05 | 0.1 | 0.1 | - |
| m_i/kg | 20 | 5 | 10 | 5 | 20 | 5 |
| $J_{di}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 0.072 | 0.018 | 0.036 | 0.018 | 0.072 | 0.018 |
| $J_{pi}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 0.144 | 0.036 | 0.072 | 0.036 | 0.144 | 0.036 |

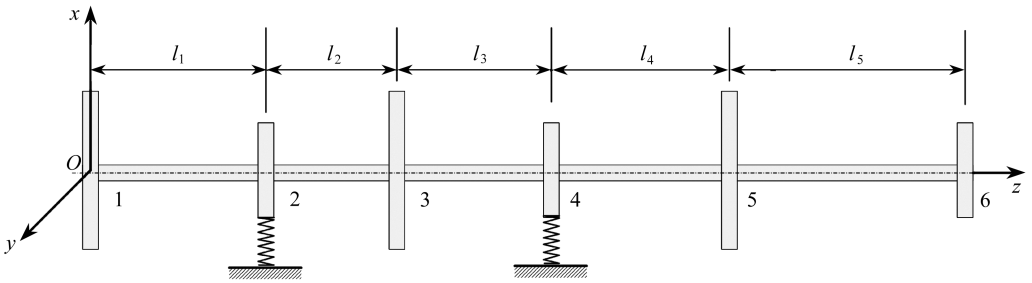


图 1 六盘转子系统

Fig. 1 The rotor system with 6 disks

对于如图 1 所示转子系统,在绝对坐标系下建模.绝对坐标系确定如下: z 轴取为转轴变形前的轴向, y 轴取为垂直于纸平面向外的方向, x 轴方向由右手法则生成.考察结构在 x 方向一致地面加速度 \ddot{x}_0 作用下的响应.假定加速度 \ddot{x}_0 为平稳随机过程,其自谱为白谱 S_0 .图 2 给出了 1 号转盘质心位置坐标在 $\omega \in [10, 150] \text{ rad/s}$ 区间的响应功率谱.由图 2 计算结果可以看到,基于辛虚拟激励法和直接虚拟激励法得到的结果是一致的.此外,响应功率谱在 ω 为 104.1 rad/s 与 136.7 rad/s 附近出现峰值,这是因为激励的频率接近于转子系统的固有频率.需要指明的一点是,由于没有考虑阻尼的作用,当虚拟激励的频率严格等于转子系统的固有频率时,系统响应将产生共振现象;此时响应功率谱的取值将趋于无穷.而由于在计算过程中虚拟激励频率的采样步长 $\Delta\omega = 1 \text{ rad/s}$,从而跨过了固有频率精确值使得图 2 中的峰值为有限值.

对于陀螺保守系统,辛虚拟激励法满足式(18)而直接虚拟激励法有式(24).因此,可以定义相对误差指标

$$e_{\text{RES}} = \frac{\|(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{G} + \mathbf{K})^{-1} - \delta\|_{\infty}}{\|(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{G} + \mathbf{K})^{-1}\|_{\infty}} \quad (37)$$

来考察两种方法得到结果的一致性程度。图 3 给出了该指标随着 ω 变化的曲线。从图中可以看到,该指标远离共振频率区域的量级为 10^{-12} ,而即使在共振峰附近也低于 10^{-8} 。因此可见辛虚拟激励法的高度精确性。

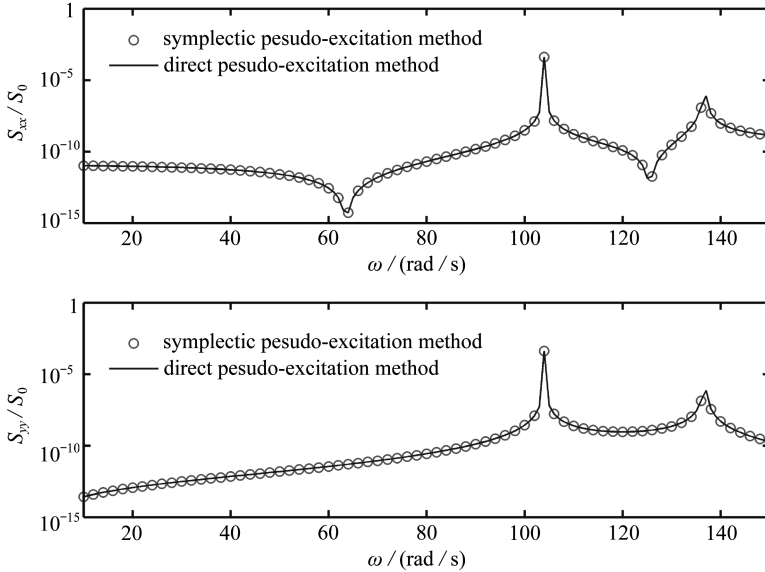


图 2 无阻尼陀螺转子系统 1 号转盘质心位置坐标 x 和 y 的响应功率谱
Fig. 2 The response power spectrum of coordinates x and y at the mass center of disk 1 in the gyroscopic rotor system without damping

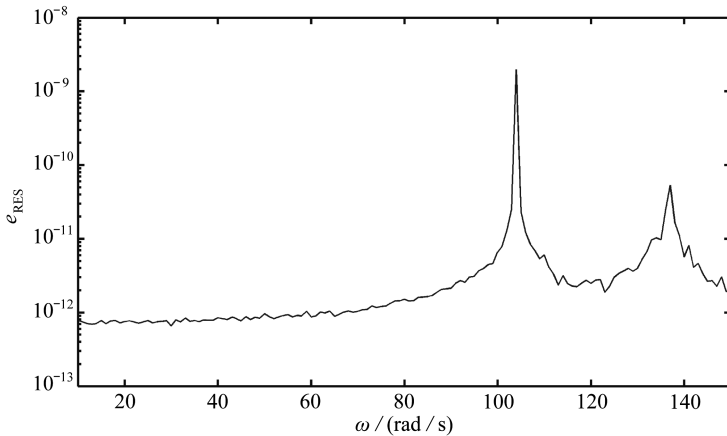


图 3 指标 e_{RES} 随激励频率变化曲线
Fig. 3 Variation of index e_{RES} as a function of pseudo-excitation frequency ω

进一步观察图 2 可以发现,对于 1 号盘质心位置坐标 x 的响应功率谱,在功率谱峰值之间存在局部的极小值。极小值所对应的激励频率可以近似看作是反共振频率^[12]。在 y 坐标的响应功率谱上并没有观察到这种“反共振”现象。注意到施加的地震作用是沿着 x 方向的,在面外的 y 方向并没有直接作用外载。而图 2 表明面外的响应功率谱与面内响应功率谱的量级在 $\omega \in [75, 115]$ rad/s 区间是相当的。实际上,转子系统面内与面外的惯性效应以及弹性效应均是不

耦合的;转子系统的面内运动与面外运动的耦合是通过陀螺效应建立起来的;其可以从转子系统的动力学方程清楚地看到,注意到陀螺矩阵与转轴的角速度 Ω 是线性相关的^[1].因此,可以通过减小 Ω 来降低面内运动与面外运动的耦合作用.固定转子系统的其它参数,将转速 Ω 的取值减小到 10 rad/s,采用辛虚拟激励法重新计算得到 1 号转盘质心平动响应的功率谱见图 4.从图 4 可以看到,除了在“反共振”区域以及共振区域以外,面外响应功率谱的值相比面内要小近两个量级以上.

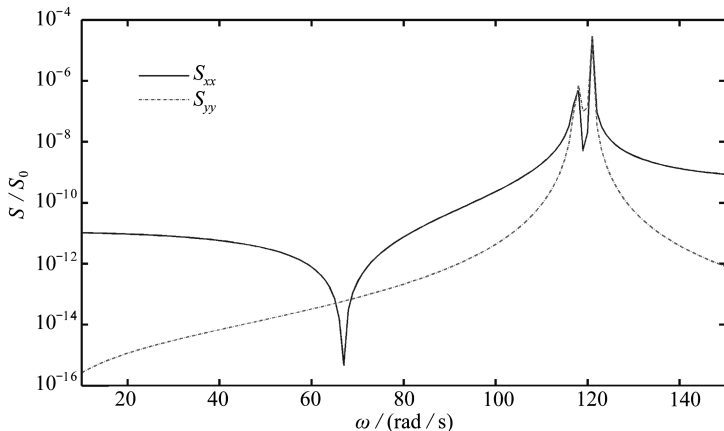


图 4 $\Omega = 10$ rad/s 时陀螺转子系统 1 号转盘质心位置坐标 x 和 y 的响应功率谱
Fig. 4 The response power spectrum of coordinates x and y at the mass center of disk 1 in the gyroscopic rotor system with $\Omega = 10$ rad/s

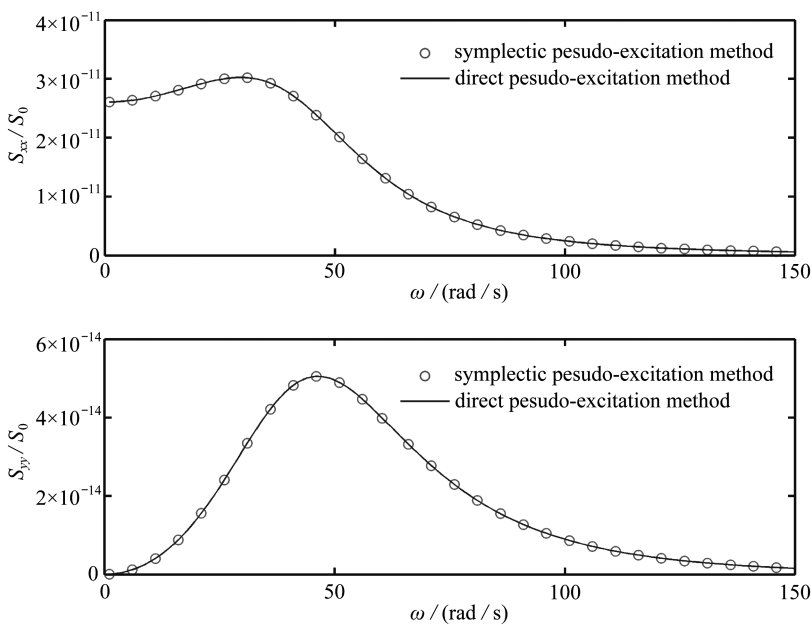


图 5 阻尼陀螺转子系统 2 号转盘质心位置坐标 x 和 y 的响应功率谱
Fig. 5 The response power spectrum of coordinates x and y at the mass center of disk 2 in the damped gyroscopic rotor system

3.2 阻尼陀螺转子系统

在这一小节中,依然考虑图 1 所示的转子系统.在 3.1 小节中,没有考虑阻尼的作用,在这

一小节中,假定结构受到 Rayleigh 阻尼 $C = 0.02K$ 。此外,加速度 \ddot{x}_0 依然为平稳随机过程,但其自谱为过滤白谱

$$S_{\ddot{x}_0} = \frac{1 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1 - (\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2} S_0, \quad (38)$$

其中 $\omega_g = 50 \text{ rad/s}$, $\zeta_g = 0.6$ 。

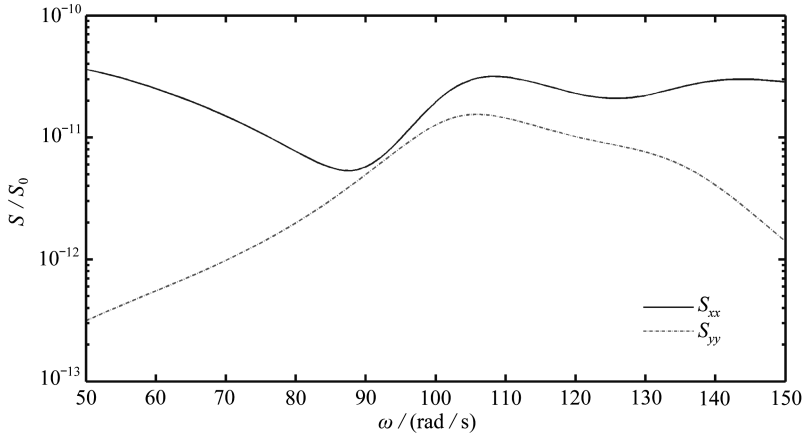


图 6 $C = 0.002K$ 时阻尼陀螺转子系统 2 号转盘质心位置坐标 x 和 y 方向的响应功率谱

Fig. 6 The response power spectrum of coordinates x and y at the mass center of disk 2 in the damped gyroscopic rotor system with $C = 0.002K$

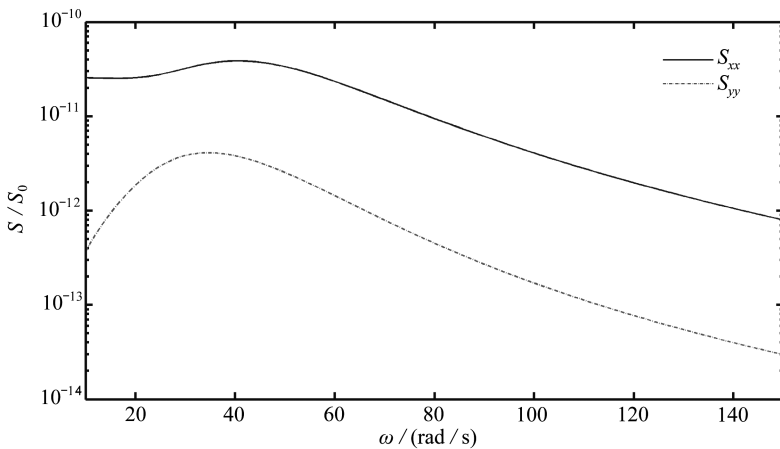


图 7 $\Omega = 1000 \text{ rad/s}$ 时阻尼陀螺转子系统 2 号转盘质心位置坐标 x 和 y 方向的响应功率谱

Fig. 7 The response power spectrum of coordinates x and y at the mass center of disk 2 in the damped gyroscopic rotor system with $\Omega = 1000 \text{ rad/s}$

图 5 给出了平稳随机过程阻尼陀螺系统 2 号盘质心平动的响应功率谱,可以看到辛虚拟激励法与直接虚拟激励法得到的结果是一致的,从而验证了辛虚拟激励法对于阻尼陀螺系统也是适用的。注意到面内运动与面外运动是通过陀螺矩阵耦合起来的,由于阻尼的引入降低了系统的耦合特性,从而使得面外的功率谱相比面内要小 3 个量级左右。通过减小阻尼矩阵或者增大转轴转速 Ω 可以使得面内运动与面外运动的耦合作用增强。图 6 给出了当其余参数固定不变而 $C = 0.002K$ 时,采用辛虚拟激励法计算得到 2 号盘质心平动响应的功率谱结果。从图 6 可以看到在 $\omega \in [80, 140] \text{ rad/s}$ 区间内,面内与面外运动响应的功率谱取值的差异小于

一个量级.因此,通过减小阻尼矩阵确实可以增大面内运动与面外运动的耦合关系.通过减小阻尼矩阵,陀螺效应被突出,从而使得耦合作用增强,因此可以通过增大 Ω 来增强耦合作用.依然取 $\mathbf{C} = 0.02\mathbf{K}$,固定其它系统参数,将 Ω 增大为 $\Omega = 1\ 000\ \text{rad/s}$,重新计算得到 2 号转盘质心平动响应的功率谱见图 7.从图 7 可以看到在 $\omega \in [20, 140]\ \text{rad/s}$ 区间内,转盘质心面内平动与面外平动响应功率谱取值的差异小于两个量级.因此,通过增大 Ω 也增强了面内运动与面外运动的耦合作用.

4 结 论

针对受随机载荷作用下陀螺阻尼系统动力响应问题,建立了其动力学特性在 Hamilton 体系下陀螺系统辛本征值问题的一般描述.结合虚拟激励法和 Hamilton 体系下辛本征展开方法推导了系统随机振动响应功率谱分析的求解列式,其可方便地用于陀螺系统平稳随机振动分析.与传统随机振动方法相比,避免了复数矩阵求逆过程,所建立的方法对于实际复杂旋转机械系统随机振动分析具有很好的参考价值.

参考文献(References):

- [1] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990. (ZHANG Wen. *Fundamental Theories of Rotor Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 1990. (in Chinese))
- [2] 毕世华, 黄文虎, 荆武兴, 郑钢铁. 油膜轴承动态特性参数及转子不平衡的统一识别[J]. 强度与环境, 1995(2): 8-15, 21. (BI Shi-hua, HUANG Wen-hu, JING Wu-xing, ZHENG Gang-tie. Identification of both the dynamic characteristics of the journal bearings and the unbalances of the rotor[J]. *Structure & Environment Engineering*, 1995(2): 8-15, 21. (in Chinese))
- [3] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of Structures* [M]. 3rd ed. University Ave: Computers & Structures, Inc, 1995.
- [4] 钟万勰, 林家浩. 不对称实矩阵的本征对共轭子空间迭代算法[J]. 计算结构力学及其应用, 1990, 7(4): 1-10. (ZHONG Wan-xie, LIN Jia-hao. Adjoint subspace for large scale eigenvalue problems of asymmetric real matrices[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1990, 7(4): 1-10. (in Chinese))
- [5] 钟万勰, 林家浩. 陀螺系统与反对称矩阵辛本征解的计算[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(3): 237-253. (ZHONG Wan-xie, LIN Jia-hao. Computation of gyroscopic system and the symplectic eigensolution of anti-symmetric matrix[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1993, 10(3): 237-253. (in Chinese))
- [6] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [7] 李明武, 赵岩, 钟万勰. 基于辛本征空间的线性阻尼振动系统动力学分析[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(1): 1-15. (LI Ming-wu, ZHAO Yan, ZHONG Wan-xie. Dynamic analysis of linear damped systems with the symplectic eigenspace expansion method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(1): 1-15. (in Chinese))
- [8] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. *Pseudo Excitation Method in Random Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [9] LIN Jia-hao, ZHAO Yan, ZHANG Ya-hui. Accurate and highly efficient algorithms for structural stationary/non-stationary random responses[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(1/2): 103-111.

- [10] 赵岩, 项盼, 张有为, 林家浩. 不确定车轨耦合系统辛随机振动分析[J]. 力学学报, 2012, 44(4): 769-778. (ZHAO Yan, XIANG Pan, ZHANG You-wei, LIN Jia-hao. Symplectic random vibration analysis for coupled vehicle-track systems with parameter uncertainties[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(4): 769-778. (in Chinese))
- [11] 隋永枫. 转子动力学的求解辛体系及其数值计算方法[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2005. (SUI Yong-feng. A symplectic systematic methodology for rotor dynamics and the corresponding numerical computational methods[D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2005. (in Chinese))
- [12] 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论[M]. 北京: 科学出版社, 1987. (HU Hai-chang. *Natural Vibration Theories of Multi-Degree-of-Freedom Structures*[M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese))

Symplectic Eigenspace Expansion for the Random Vibration Analysis of Gyroscopic Systems

ZHAO Yan, LI Ming-wu, LIN Jia-hao, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment(Dalian University of Technology);

Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, LIN Jia-hao, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The random dynamic responses of the damped gyroscopic system were investigated under random loads. The pseudo-excitation method, as a highly efficient and accurate method for random vibration analysis, had been widely used in the fields of structural seismic and wind engineering. In the Lagrange framework based on a single physics variable the method of modal superposition is effective to reduce the degrees of freedom for complex structures in the numerical random vibration analysis. However, for the random analysis of gyroscopic systems, given the existing gyroscopic effects, application of the modal superposition method based on the Rayleigh quotient eigenvalues will be quite limited. Therefore, the general description of the symplectic eigenvalue problem was introduced firstly. Furthermore, for the damped gyroscopic system subjected to stationary random loads, the pseudo-excitation method was used and the solution formulae were derived based on the symplectic eigenspace expansion. For the conservative gyroscopic system, the solution expression was in an explicit form. In the numerical examples, the stationary random responses of a gyroscopic system were computed with the present method, of which the accuracy and efficiency were verified through comparison of the results with those out of other methods. The present method is of significance for the random vibration problems about mechanical engineering equipments with gyroscopic systems.

Key words: gyroscopic system; symplectic eigenspace; random vibration; pseudo-excitation method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11472067); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB046803)