

精确计算 Bingham 流体圆管层流压降及速度分布规律的新方法*

赵珊珊¹, 乌效鸣¹, 刘耀东²

(1. 中国地质大学(武汉)工程学院, 武汉 430074;
2. 广东和立土木工程有限公司, 广州 510403)

摘要: Bingham(宾汉)模型情况下,多采用通用公式进行圆管层流压降的解析计算,即将 Bingham 模型本构方程代入粘性流体圆管层流流动通用公式进行计算,仅能得到压降的解析解.新方法结合 Bingham 流体本构方程与运动方程,建立有关力学平衡方程,并运用代数方程的根式解理论对圆管层流流动时的非线性方程进行求解,可直接求得 Bingham 流体圆管层流压降及速度流核区半径的解析解,进一步可求得圆管层流速度解析解;Bingham 流体圆管层流速度的直接影响因素为流量、塑性粘度和屈服值,研究发现速度流核宽度与屈服值成正比,与流量及塑性粘度成反比,且流核的宽度越大,流核区的速度越小.

关键词: 水力参数; 速度流核半径; Bingham 流体; 层流; 解析解

中图分类号: O373 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.012

引言

在钻井水力参数计算和优化设计等问题中,钻具及环空中的压降计算、速度分布规律是基本的水力参数.这些水力参数除了与钻具、环空的几何参数有关之外,钻井液的流变性质也是重要影响因素.目前常用的描述钻井液流变性质的模型主要有 5 种:Newton(牛顿)模型、Bingham 模型、幂率模型、Herschel-Bulkley(赫-巴)模型和 Casson(卡森)模型^[1].

关于不同流变模型下的压降计算及速度分布规律目前已有很多研究成果^[2-5].本文研究了 Bingham 模型钻具内层流压降计算及速度分布规律.在 Bingham 模型下,层流压降的解析计算都采用粘性流体圆管层流流动通用公式^[6-9],将 Bingham 模型的本构方程代入计算.使用通用公式的缺点是计算繁琐,且不能获得速度流核区的半径.本文通过力学平衡关系及流量守恒原理可同时获得 Bingham 流体圆管层流压降及速度流核区半径的直接解析解和速度分布规律.

1 Bingham 流体圆管层流的通用公式解析解

1.1 非 Newton 流体圆管轴向层流通用公式

假设所研究的非 Newton 流体的本构方程可一般地表示为

$$\gamma = f(\tau)^{[10]}.$$

* 收稿日期: 2014-10-27; 修订日期: 2015-01-28

作者简介: 赵珊珊(1989—),女,山东人,硕士生(通讯作者. E-mail: xiaojinglingzs@126.com).

由动量守恒定律得

$$\tau = \frac{\Delta P}{2L} r. \quad (1)$$

在一定压力梯度下,剪切应力 τ 与 r 成正比,在管壁处切应力有最大值:

$$\tau_{\omega} = \frac{\Delta P}{2L} R. \quad (2)$$

文献[1]给出了下面的计算公式:

$$v(r) = \frac{R}{\tau_{\omega}} \int_{\tau}^{\tau_{\omega}} f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_{\omega}^3} \int_0^{\tau_{\omega}} f(\tau) \tau^2 d\tau. \quad (4)$$

从式(2)得到压降的计算公式:

$$\Delta P = \frac{2L\tau_{\omega}}{R}, \quad (5)$$

式中, γ 为剪切速率, s^{-1} ; τ 为剪切应力, Pa; $f(\cdot)$ 为一般连续函数; ΔP 为压降, Pa; L 为圆管长度, m; r 为距圆管轴心的距离, m; R 为圆管半径, m; τ_{ω} 为最大剪切应力, Pa; $v(r)$ 为流体的速度分布函数, m/s; Q 为流量, m^3/s .

1.2 通用公式的解析解

Bingham 流体的本构方程为

$$\gamma = f(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\eta_p}, & \tau > \tau_0, \\ 0, & \tau \leq \tau_0, \end{cases}$$

式中, τ_0 为屈服值, Pa; η_p 为塑性粘度, $Pa \cdot s$.

将 Bingham 流体的本构方程代入式(4),解得参数 τ_{ω} ;将计算所得参数 τ_{ω} 代入式(5)便求得 Bingham 流体圆管层流压降的解析解.

文献[11]利用上述通用公式获得 4 次方程并求根得到压降的解析解,但计算繁琐,且没有获得表征流速特征的流核区半径.

2 Bingham 流体圆管层流计算新方法

Bingham 流体圆管层流存在两个流动区域:一个是中部以半径为 r_d 的等速核区域, 流层间剪切应力小于屈服值 τ_0 从而内部流体不发生相对运动;另一个是外围 $r_d \sim R$ 之间的梯速环区域, 流层间剪切应力大于屈服值 τ_0 从而流体发生相对运动.两个流动区域的交界面上 $\tau = \tau_0$.由于等速核区域内流体总是比它外侧流体流动得快,因此,该流体外侧面受到一个同流动方向相反的剪切应力 τ 作用.

由等速核流体受力平衡,得

$$\pi r_d^2 dp = 2\pi r_d \tau_0 dl,$$

故

$$\frac{dp}{dl} = 2 \frac{\tau_0}{r_d}, \quad (6)$$

式中, dp/dl 为单位长度上的压降, Pa/m .

在梯速环区域中,取外半径为 r 、内半径为 r_d 、高为 dl 的居中圆环柱体,该环柱体的上、下两端面单位长度上的压强差为 dp , 外侧壁面所受剪切应力由 Bingham 模型本构关系确定为

$$\tau = \tau_0 - \frac{dv}{dr} \eta_p, \quad (7)$$

该单元环体的力学平衡关系式为

$$(2\pi r\tau - 2\pi r_d\tau_0) dl = \pi(r^2 - r_d^2) dp. \quad (8)$$

联立式(6)、(7)、(8)得到

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\tau_0}{\eta_p} \left(1 - \frac{r}{r_d}\right). \quad (9)$$

对式(9)不定积分并代入边界条件 $v(R) = 0$ 得梯速区流速分布:

$$v(r) = \frac{\tau_0}{2r_d\eta_p}(R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta_p}(R - r). \quad (10)$$

在 $r_d \sim R$ 区间对式(10)定积分可得梯速区的流量:

$$Q_1 = \int_{r_d}^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi\tau_0}{\eta_p} \left(\frac{R^4}{4r_d} - \frac{R^3}{3} - \frac{R^2 r_d}{2} + R r_d^2 - \frac{5r_d^3}{12} \right). \quad (11)$$

因为交界公共点 r_d 处的流速也是等速核的流速,且钻杆内总流量 Q 是等速核流量与梯速区流量之和,则

$$Q = Q_1 + \int_0^{r_d} 2\pi r v(r_d) dr = \frac{\pi\tau_0}{\eta_p} \left(\frac{R^4}{4r_d} - \frac{R^3}{3} + \frac{r_d^3}{12} \right). \quad (12)$$

对式(12)变形得到关于 r_d 的4次方程:

$$r_d^4 - A r_d + 3R^4 = 0, \quad (13)$$

其中

$$A = \frac{12Q\eta_p}{\pi\tau_0} + 4R^3 > 0. \quad (14)$$

令 $r_d = x, c = 3R^4$. 由文献[12]可知,式(13)的4个根与方程 m, n 的根等价,且 y 是方程 q 的一个实根.

$$m: x^2 + \sqrt{8y} \frac{x}{2} + y + \frac{A}{\sqrt{8y}} = 0,$$

$$n: x^2 - \sqrt{8y} \frac{x}{2} + y - \frac{A}{\sqrt{8y}} = 0,$$

$$q: 8y^3 - 8cy - (-A)^2 = 0.$$

方程 q 的实根为

$$y = \sqrt[3]{\frac{(-A)^2}{16} + \sqrt{\frac{(-A)^4}{16^2} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{(-A)^2}{16} - \sqrt{\frac{(-A)^4}{16^2} - \frac{c^3}{27}}}. \quad (15)$$

由 y 的实根可判断 $y > 0$.

方程 m, n 的判别式分别为

$$\Delta_1 = -2y - \sqrt{\frac{2}{y}} A,$$

$$\Delta_2 = -2y + \sqrt{\frac{2}{y}} A.$$

容易推出, $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$. 即方程 m 无实根, 方程 n 的两个实根为

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{-\frac{2}{y} + \frac{A}{\sqrt{8y}}},$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{y}} - \sqrt{-\frac{2}{y} + \frac{A}{\sqrt{8y}}}.$$

最终求得的 $x = r_d$ 还应满足 $x/R < 1$ 的条件.

令 $\xi = x/R$, 则 $\xi_1 = x_1/R, \xi_2 = x_2/R$. 这两个解随参数 A 的变化曲线见图 1.

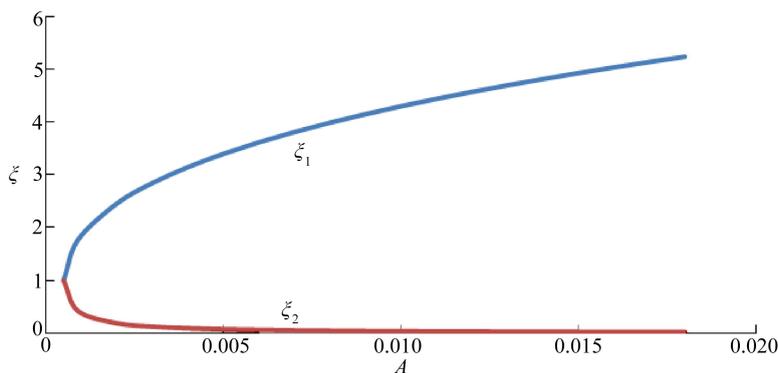


图 1 解 ξ 随参数 A 的变化曲线

Fig. 1 The changing curve of solution ξ along with parameter A

从图 1 可以看出, 解 ξ_1 随参数 A 单调上升, 其函数值从 1 逐渐变化到正无穷大; 解 ξ_2 随参数 A 单调下降, 其函数值从 1 逐渐变化到 0. 因此, 解 ξ_2 是满足条件的解. 即流速核半径的解析解为

$$r_d = x_2 = \sqrt{\frac{2}{y}} - \sqrt{-\frac{2}{y} + \frac{A}{\sqrt{8y}}}. \quad (16)$$

将式(16)代入式(6)得到

$$\frac{dp}{dl} = \frac{4\tau_0 \sqrt{2y}}{2y - \sqrt{-4y^2 + \sqrt{8y}A}}. \quad (17)$$

式(16)即是 Bingham 流体圆管层流速度流核区半径的解析解, 式(17)即是单位长度压降的解析解. 其中 y 由式(15) 计算, A 由式(14) 计算.

采用文献[13]中数据进行验算, 由解析式(17)算得 $dp/dl = 4\,458.340\,665$ Pa/m, 与文献[13]中计算的解析解 ($dp/dl = 4\,458.34$ Pa/m) 一致.

3 压降计算的误差分析与实验验证

3.1 传统方法的误差分析

传统算法相对于精确解析算法存在的误差主要来源于其在推导流量关系式过程中略去的某些高阶项^[14]. 在 Bingham 流体圆管层流压耗计算过程中, 传统算法将流量 Q 中的 $(r_d/R)^4/3$ 省去. 为了分析传统方法压耗计算结果的误差, 以 $(\Delta P_1 - \Delta P_2)/\Delta P_1$ 表示压降计算结果的误差

(ΔP_1 为压降的精确解, ΔP_2 为压降的传统解), 分析其随流核区半径与圆管半径之比 r_d/R 的变化情况。

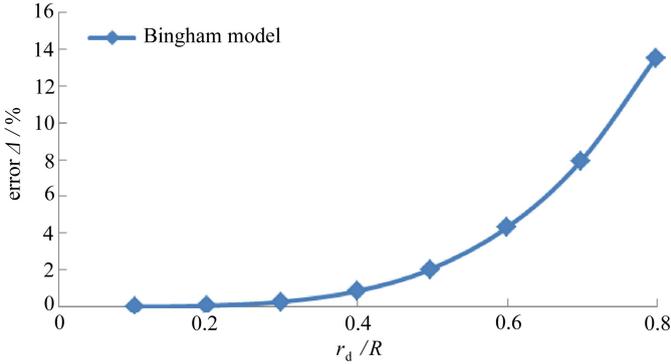


图2 压降计算误差分析

Fig. 2 Error analysis of the pressure drop

由图2可以看出, $r_d/R < 0.4$ 时(对应于低屈服值流体), 误差很小; $r_d/R > 0.4$ 时(对应于高屈服值流体), 误差较大, 而且随 r_d/R 的增加, 误差逐渐增大。它揭示了传统算法与精确解析算法的压降计算误差随流体屈服值的增大而增大, 因此, 传统算法不能应用于高屈服值流体, 不具有普适性。

3.2 实验验证

通过4组实验数据^[15]对 Bingham 模型圆管层流压降计算做进一步说明。实验所用钻井液基本参数为塑性粘度 $0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 屈服值 0.15 Pa 。圆管直径 7.1 cm , 测点距离 1030 cm 。图3为 Bingham 模式圆管压降计算结果, 详细数据参考文献^[15]。

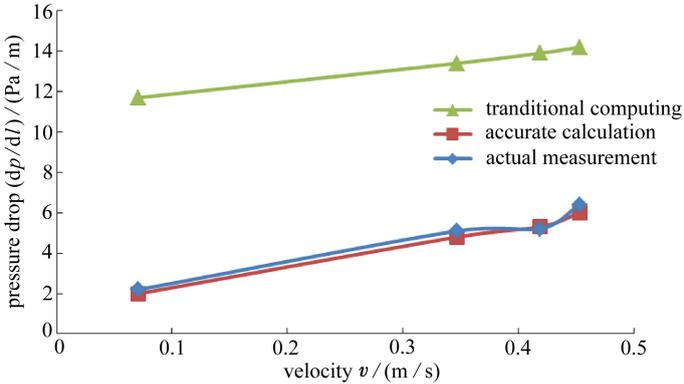


图3 Bingham 模型压耗对比

Fig. 3 Contrast of the pressure drop for the Bingham model

由图3可知, 用精确计算解析解得到的压降与实测结果基本相吻合, 而用传统计算方法得到的压降与实测结果相差较大, 但随着排量的增大传统计算方法的压降与实测结果误差不断减小。

4 Bingham 流体圆管层流速度解析解

由第2节计算所得流速核半径的解析解, 可知 Bingham 流体圆管层流速度解析式:

$$v(r) = \begin{cases} \frac{\tau_0}{2r_d\eta_p}(R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta_p}(R - r), & r_d < r < R, \\ \frac{\tau_0}{2r_d\eta_p}(R - r_d)^2, & 0 < r < r_d, \end{cases}$$

其中, r_d 由式(16)计算。

文献[16]中讨论了屈服值及压力梯度对 Bingham 流体环空速度剖面的影响.然而,由 Bingham 流体圆管层流速度解析式可知,速度剖面的直接影响因素为钻井液的流变性质(塑性粘度、屈服值)及流量,压力梯度是间接影响因素.下面分别讨论这些因素对速度的影响。

4.1 流量对速度的影响

钻井液流变性质不变,取 Q 分别为 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$, $1.5 \text{ m}^3/\text{s}$,通过数值计算得到速度剖面见图 4。

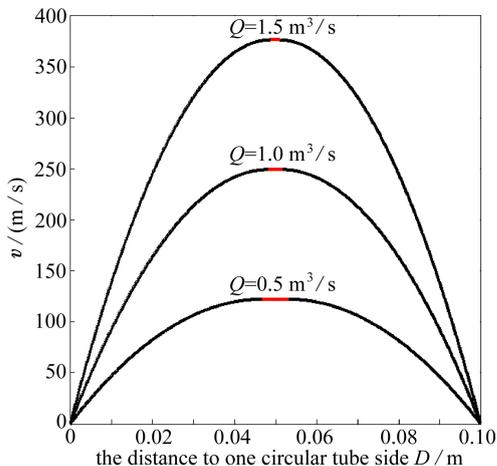


图 4 流量对速度剖面的影响

Fig. 4 Influence of flow on the velocity profile

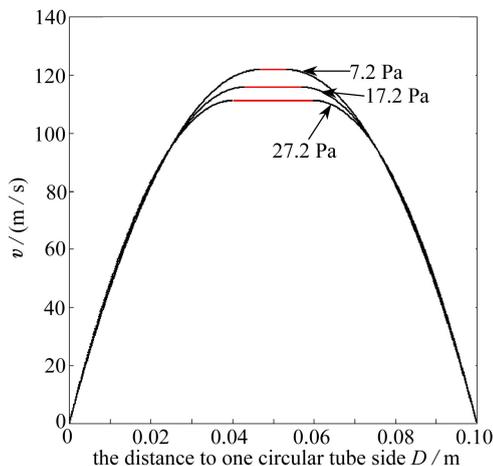


图 5 屈服值对速度剖面的影响

Fig. 5 Influence of dynamic shear on the velocity profile

由图 4 可知,随着流量 Q 的增加($0.5 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow 1.0 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$),等速核宽度逐渐减小($0.0032 \text{ m} \rightarrow 0.0017 \text{ m} \rightarrow 0.0011 \text{ m}$).这是由于对 Bingham 流体流动而言,切应力 τ 代表摩擦阻力,单位长度压降 $|dp/dl|$ 代表推动力,在流变参数不变的情况下,流量的增大使得流速显著增加,也就是流核区处 $\tau_0/|dp/dl|$ 随着流量增大逐渐变小,而 $2\tau_0/|dp/dl|$ 为流核区半径,故速度流核区半径相应减小。

4.2 屈服值对速度的影响

其它参数不变,取屈服值 τ_0 分别为 7.2 Pa , 17.2 Pa , 27.2 Pa .通过数值计算得到速度剖面,见图 5。

由图 5 可知,随着屈服值 τ_0 的增加($7.2 \text{ Pa} \rightarrow 17.2 \text{ Pa} \rightarrow 27.2 \text{ Pa}$),等速核宽度逐渐增大($0.0032 \text{ m} \rightarrow 0.0069 \text{ m} \rightarrow 0.0099 \text{ m}$).这是因为对于塑性粘度相同的 Bingham 流体,在相同推动力 $|dp/dl|$ 的作用下,屈服值 τ_0 越大的流体其流核区的速度越小.同时,流量相同,即速度曲线所围成的面积相同,对应速度越小的流体其流核区半径 $2\tau_0/|dp/dl|$ 越大。

4.3 塑性粘度对速度剖面的影响

其它参数不变,取塑性粘度 η_p 分别为 $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $0.02 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $0.04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$,通过数值计算得到速度剖面见图 6。

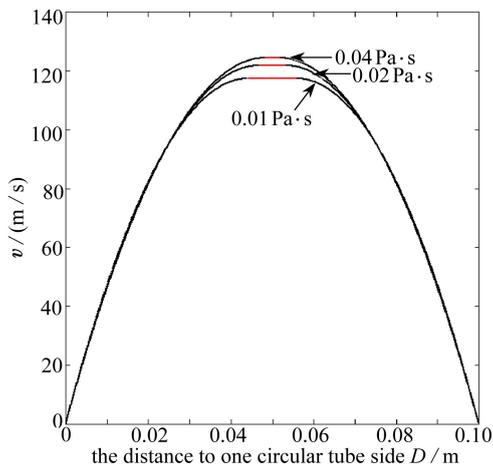


图6 塑性粘度对速度剖面的影响

Fig. 6 Influence of plastic viscosity on the velocity profile

由图6可知,随着塑性粘度 η_p 的增加(0.01 Pa·s→0.02 Pa·s→0.04 Pa·s),等速核宽度逐渐减小(0.005 9 m→0.003 2 m→0.001 7 m),这与流量的影响结果一致。这是因为塑性粘度代表流体内的粘滞阻力,在动切力不变的情况下,为了克服相同的动切力,塑性粘度越大的流体所需要的推动力 $|dp/dl|$ 越大,故流核区速度半径 $2\tau_0/|dp/dl|$ 越小。同时,流量相同,即速度曲线所围成的面积相同,对应流核区半径越小的流体其流核区速度越大。

5 结 论

- 1) 通过受力分析的新思路求解出 Bingham 流体圆管层流压降及速度流核半径的解析解。
- 2) Bingham 流体圆管层流压耗传统算法的误差随流体屈服值的增大而增大,本文的精确算法具有普适性好、精度高的特点,为工程领域的应用提供了良好的基础。
- 3) Bingham 流体圆管层流流核宽度与其屈服值成正比,与流量及塑性粘度成反比。
- 4) 当其它参数相同时,随着屈服值的增加,Bingham 流体圆管层流流动的速度分布剖面越扁平,即流核宽度增加,流核区处速度减小。
- 5) 流量和塑性粘度对速度剖面的影响一致,即当其它参数相同时,随着流量或塑性粘度的减小,Bingham 流体圆管层流流动的速度分布剖面愈扁平,即流核宽度增加,流核区处速度减小。

参考文献(References):

- [1] 张景富. 钻井流体力学[M]. 北京:石油工业出版社,1994.(ZHANG Jing-fu. *Drilling Fluid Mechanics*[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1994. (in Chinese))
- [2] 陈家琅. 钻井泥浆的管流公式集[J]. 大庆石油学院学报,1981(3): 99-111.(CHEN Jia-lang. Circular flow formula of drilling mud[J]. *Journal of Daqing Petroleum Institute*, 1981(3): 99-111.(in Chinese))
- [3] 陈家琅. 钻井泥浆的管流公式集(续)[J]. 大庆石油学院学报,1983(2): 111-115.(CHEN Jia-lang. Circular flow formula of drilling mud (sequel)[J]. *Journal of Daqing Petroleum Institute*, 1983(2): 111-115.(in Chinese))
- [4] von Schowalter W R. *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*[M]. Oxford: Pergamon Press,

- 1978: 138-139.
- [5] 汪海阁, 苏义脑. Robertson-Stiff 流体在偏心环空中的流动[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(10): 931-940.(WANG Hai-ge, SU Yi-nao. Flow of Robertson-Stiff fluids through an eccentric annulus[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, **19**(10): 931-940.(in Chinese))
- [6] Govier G W, Aziz K. *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1972: 183-185.
- [7] Herzog R O, Weissenberg K. Ueber die thermische, mechanische und röntgenoptische analyse der Quellung[J]. *Kolloid-Zeitschrift*, 1928, **46**(4): 277-289.
- [8] Rabinowitsch B. Über die viskosität und elastizität von Solen[J]. *Z Phys Chem A*, 1929, **145**: 1-26.
- [9] Monney M. Explicit formulas for slip and fluidity[J]. *Journal of Rheology*, 1931, **2**(2): 210-222.
- [10] 高远文, 鲁港, 杨龙, 佟长海, 孙忠国. 宾汉钻井液圆管轴向层流压降的数值计算[J]. 探矿工程(岩土钻掘工程), 2010, **37**(3): 5-7.(GAO Yuan-wen, LU Gang, YANG Long, TONG Chang-hai, SUN Zhong-guo. Numerical calculation for axial laminar flow pressure drop of the Bingham drilling fluid in circular pipe[J]. *Exploration Engineering (Rock & Soil Drilling and Tunneling)*, 2010, **37**(3): 5-7.(in Chinese))
- [11] 石玉发. 使用四次方程求根公式精确计算宾汉流体圆管轴向层流压降[J]. 科技创新导报, 2009(7): 91.(SHI Yu-fa. Use quartic equation root formula accurately calculating the Bingham fluid axial laminar flow pressure drop in circular pipe[J]. *Science and Technology Innovation Herald*, 2009(7): 91.(in Chinese))
- [12] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. (Mathematical Manual Writing Committee. *Mathematics Handbook*[M]. Beijing: People's Education Press, 1979.(in Chinese))
- [13] 陈尚伟. 宾汉塑性流体层流压强降的分析解[J]. 化学世界, 1990(8): 369-372.(CHEN Shang-wei. Bingham plastic fluid laminar analysis solution of the pressure drop[J]. *Chemical World*, 1990(8): 369-372.(in Chinese))
- [14] 樊洪海, 彭齐, 腾学清, 周号博, 李朝玮, 汤化沙. 不同流变模式钻井流体圆管层流压耗的通用精确算法[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2014, **38**(1): 70-74.(FAN Hong-hai, PENG Qi, TENG Xue-qing, ZHOU Hao-bo, LI Zhao-wei, TANG Hua-sha. A high precision method for calculating laminar pressure drop of drilling fluid in pipe flow with different rheological models[J]. *Journal of China University of Petroleum(Edition of Natural Science)*, 2014, **38**(1): 70-74.(in Chinese))
- [15] 白家祉, 姚荣魁. 《带屈服值的假塑性流体的双曲模式方程与压降计算式》一文的实验验证[J]. 石油学报, 1980, **1**(3): 49-57.(BAI Jia-zhi, YAO Rong-kui. Experimental verifications on "a new hyperbolic model equation for yield-pseudoplastic fluids and related pressure drop formulas"[J]. *Acta Petrolei Sinica*, 1980, **1**(3): 49-57.(in Chinese))
- [16] 李兆敏, 王渊, 张琪. 宾汉流体在环空中流动时的速度分布规律[J]. 石油学报, 2002, **23**(2): 87-91.(LI Zhao-min, WANG Yuan, ZHANG Qi. The law of velocity distribution of Bingham fluid's flowing in the encircle pipe[J]. *Acta Petrolei Sinica*, 2002, **23**(2): 87-91.(in Chinese))

A New Method for Accurate Calculation of the Bingham Fluid Axial Laminar Flow Pressure Drop and Velocity Distribution in Circular Pipes

ZHAO Shan-shan¹, WU Xiao-ming¹, LIU Yao-dong²

(1. *Faculty of Engineering, China University of Geosciences(Wuhan)*,
Wuhan 430074, P.R.China;

2. *Guangdong Heli Civil Engineering Co., Ltd.*,
Guangzhou 510403, P.R.China)

Abstract: Based on the Bingham model, the analytical calculations of axial laminar flow pressure drop in circular pipes often involve the general formula for viscous fluid, with the Bingham fluid constitutive equations introduced into the calculation to get only the analytical solution of pressure drop. A new method combining the Bingham fluid constitutive equation and the motion equation to establish the mechanical equilibrium equations was proposed, to solve the circular pipe laminar flow nonlinear equations according to the algebraic equation radical solution theory, and directly get the analytical solution of the axial laminar flow pressure drop, the velocity flow core zone radius and the flow velocity. The results show that, the direct influential factors on the Bingham fluid pipe laminar flow velocity are flow rate, plastic viscosity and yield value, and the flow core zone width is proportional to the yield value and inversely proportional to the flow velocity or the plastic viscosity. Besides, the wider the velocity flow core zone is, the lower the flow velocity in the core zone is.

Key words: hydraulic parameter; velocity flow core zone radius; Bingham fluid; laminar flow; analytical solution