

积分形式非局部本构关系的 界带分析方法*

姚 征, 郑长良

(大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 基于 Hamilton 体系研究了 Eringen 的非局部线弹性本构关系. Eringen 的非局部线弹性理论存在积分型和微分型两类本构关系. 由于方程的形式简单, 目前多采用微分型本构; 而积分型本构方程是典型的积分-微分方程, 数值求解较为困难. 在分析结构力学中提出的界带分析方法, 成功求解了时间滞后问题的积分-微分方程. 根据分析动力学与分析结构力学的模拟关系, 将界带分析方法引入到非局部理论的积分型本构方程, 可以实现积分-微分方程的数值求解. 通过杆件的振动分析算例验证了该套理论算法的准确性和可行性, 也指出了辛体系算法在非局部力学问题中的潜力.

关键词: 非局部理论; 积分-微分方程; 界带分析; 辛几何算法

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.003

引 言

在 Eringen 非局部弹性理论存在积分型本构关系和微分型本构关系, 其对于指数型衰减核函数的微分型本构关系^[1-2], 由于可化为简单形式而得到许多研究者的应用和检验^[3-6]. 虽然微分形式非局部理论较为成功地解释了高频波的弥散现象, 并被研究者扩展到梁、板结构中, 但微分型非局部理论本身尚存在某些缺陷和局限. 其主要原因在于微分形式的非局部理论是在特定的条件下推导出来的, 其适用范围自然受到限制. Eringen 的非局部理论最初是以积分型本构方程为出发点的, 积分型本构方程有着更广泛的意义和适用性. 为了更好地理解、检验和应用 Eringen 的非局部理论, 就需要对积分型本构理论进行深入细致的研究. 由于积分型本构关系导致了复杂的积分-微分方程, 积分-微分方程的求解在数学上依然没能很好地解决, 从而制约了积分型本构理论的进一步扩展和应用.

计算结构力学中的子结构法将复杂结构离散为一系列的子结构, 子结构间由分界面连接, 这类类似于传统的局部理论. 通过将子结构间的分界面延拓为有一定宽度的分界带/分界域, 并引入长程力的作用, 可推导建立一套崭新的微观力学问题求解的新方法. 需要指出的是, 辛空间下动力学问题对偶变量的特殊数学结构使其天然适用于模拟子结构间的非局部效应, 确保了子结构单元间满足 C^1 连续条件, 从而克服动力学问题数值计算上的困难. 根据此思路, 可基

* 收稿日期: 2014-09-26; 修订日期: 2014-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(11202040); 中央高校基本科研业务专项资金(3132015100)

作者简介: 姚征(1978—), 男, 河北人, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: yaozheng@dlnu.edu.cn);
郑长良(1963—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: zhengcl@dlnu.edu.cn).

于分析力学推导建立一套崭新的非局部求解方法——界带分析法^[7].界带分析方法首先用于离散系统的分析计算,并在碳纳米管声子谱(色散关系)的计算中获得成功^[8-9].这既验证了该套基于分析力学的非局部算法的正确性与可行性,也指出了该套方法在微观力学振动分析领域的应用前景和潜力.离散结构要求按界带宽度(影响域范围)划分最小子结构,限制了子结构区段积分计算的最小步长.而分析动力学问题则要求可以实现任意步长的积分运算.通过引入“步进”的计算方法,可以使任意界带宽度的子结构实现任意积分步长的积分运算^[10],从而将界带分析方法引入到连续系统的积分问题.动力学时滞问题的数值求解充分验证了界带分析方法用于连续系统分析计算的可行性和准确性,也指出其在求解积分-微分方程方面独特的优势^[11].因此可以尝试利用界带分析方法求解积分型非局部本构关系.

1 二维非局部线弹性模型

对于均匀各向同性弹性固体,Eringen的非局部弹性理论可以利用如下方程组来描述^[1-2]:

$$t_{kl}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa) \sigma_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (1)$$

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{x}') = \lambda e_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

$$e_{kl}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_k(\mathbf{x}')}{\partial x'_l} + \frac{\partial q_l(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \right), \quad (4)$$

其中 t_{kl} , ρ , f_l 和 q_l 分别是 t 时刻该弹性体上某个参考点 \mathbf{x} 的:应力张量、质量密度、体力密度和位移矢量. $e_{kl}(\mathbf{x}')$ 是弹性体上任意一点 \mathbf{x}' 在 t 时刻的线性应变张量, $\sigma_{kl}(\mathbf{x}')$ 是相应的宏观(经典)应力张量. λ 和 μ 是 Lamé 系数, δ_{kl} 为 Kronecker 符号.

积分本构方程(1)中包含一个核函数 α (也称作非局部模数):

$$\alpha = \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa), \quad \kappa = e_0 a_0 / l_0, \quad (5)$$

它有多种形式,不同的问题可以采用不同的形式.核函数依赖于一个特征长度比率 a_0/l_0 , 其中 a_0 是内部特征长度(晶格参数、颗粒距离等);而 l_0 是外部特征长度(如裂缝长度、波长等).式中的 e_0 是相应的材料常数.

对于各向同性弹性体,变形能密度为

$$V_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} t_{kl}(\mathbf{x}') e_{kl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} e_{kl}(\mathbf{x}) \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa) \sigma_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left[e_{kl}(\mathbf{x}) \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa) [\lambda e_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \right]. \quad (6)$$

变形能(势能)为

$$U_2(\mathbf{x}) = \int_V \frac{1}{2} \left[e_{kl}(\mathbf{x}) \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa) [\lambda e_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\mathbf{x}')] dv(\mathbf{x}') \right] dv(\mathbf{x}). \quad (7)$$

动能为

$$U_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{q}_k(\mathbf{x}) \dot{q}_k(\mathbf{x}) dv(\mathbf{x}). \quad (8)$$

相应的变分原理为

$$S(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x}) + U_2(\mathbf{x}), \quad \delta S(\mathbf{x}) = 0. \quad (9)$$

完成变分必然会得到积分-微分方程.积分-微分方程难以分析求解,寻求离散解是必然途径.

2 积分型非局部本构关系的界带分析方法

首先考虑较简单的一维情况进行分析.如果是一维直杆,对于各向同性弹性体,变形能(7)可简化为

$$U_2(x) = \frac{EA}{2} \int_L \left[\int_L \frac{\partial q(x)}{\partial x} \alpha(|x' - x|, \kappa) \frac{\partial q(x')}{\partial x'} dx' \right] dx, \tag{10}$$

动能为

$$U_1(x) = \frac{\rho A}{2} \int_L \dot{q}(x) \dot{q}(x) dx. \tag{11}$$

如果考虑频域问题,可令

$$q(x) = \tilde{q}(x) \exp(i\omega t), \tag{12}$$

则某指定范围内的动能可离散为

$$U_1(x) = -\frac{\rho A \omega^2}{2} \int_a q(x) q(x) dx = -\frac{\rho A \omega^2}{2} \frac{\eta}{2} [q_k^2 + 2q_{k+1}^2 + \dots + 2q_{k+n-1}^2 + q_{k+n}^2] = -\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} / 2, \tag{13}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 2 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \frac{\rho A \eta \omega^2}{2}, \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_k \\ q_{k+1} \\ \vdots \\ q_{k+n} \end{Bmatrix}.$$

对于考虑非局部应力的线弹性问题,可以给定核函数的影响范围,不妨设 $\alpha(|x' - x|, \kappa) = 0$, 当 $|x' - x| > a$, 于是有

$$U_2(x) = \frac{EA}{2} \int_L \left[\int_{-a}^a \frac{\partial q(x)}{\partial x} \alpha(|s|, x, \kappa) \frac{\partial q(x+s)}{\partial s} ds \right] dx. \tag{14}$$

为了实现逐步积分计算,首先考虑 x 的一个步长 $x_{k-1} \sim x_k (x_k - x_{k-1} = \eta)$ 区段的积分.考虑到界带的子结构拼装时边界要求不可重复也不可缺失,非边界单个积分区段的变形能可写作

$$U_2(q_{k-1}, q_k) = \frac{EA}{2} \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} \frac{\partial q(x)}{\partial x} \left[\int_0^a \alpha(s, x, \kappa) \frac{\partial q(x-\tau)}{\partial \tau} ds \right] dx. \tag{15}$$

将能量表达形式代入式(9)并完成变分,可得到该问题的积分-微分方程:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x)}{\partial t^2} - \int_{x-a}^{x+a} \alpha(s, x, \kappa) \frac{\partial q(s)}{\partial x} ds = 0. \tag{16}$$

对于一个固定的积分区段,有

$$e_x = \frac{\partial q(x)}{\partial x} = \frac{\Delta l}{\eta} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\eta}. \tag{17}$$

设影响域半径 $a = n\eta$, 可将影响域离散积分,于是可以得到

$$U_2(q_{k-1}, q_k) = \frac{EA}{2} \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} \frac{\partial q(x)}{\partial x} \int_0^a \alpha(s, x, \kappa) \frac{\partial q(x-s)}{\partial s} ds dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{EA\eta}{4} \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} \left[\alpha_0 \frac{\partial q(x)}{\partial x} \frac{\partial q(x)}{\partial x} + 2\alpha_1 \frac{\partial q(x)}{\partial x} \frac{\partial q(x-\eta)}{\partial x} + \cdots + \right. \\ & \left. \alpha_n \frac{\partial q(x)}{\partial x} \frac{\partial q(x-n\eta)}{\partial x} \right] dx = \\ & \frac{EA\eta}{4} \frac{\eta}{\eta^2} [\alpha_0 (q_k - q_{k-1})^2 + 2\alpha_1 (q_k - q_{k-1})(q_{k-1} - q_{k-2}) + \cdots + \\ & \alpha_n (q_k - q_{k-1})(q_{k-n} - q_{k-n-1})], \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为核函数 $\alpha(s, x, \kappa)$ 在影响域内各插值点 $\tau = i\eta, i = 1, 2, \dots, n$ 的值. 进而根据式(18)可以写出一个非边界的影响域区段内的能量表达形式:

$$\begin{aligned} U_2(q_k, q_{k+n}) &= U_{2,k}(q_k, q_{k+1}) + U_{2,k+1}(q_{k+1}, q_{k+2}) + \cdots + U_{2,k+n-1}(q_{k+n-1}, q_{k+n}) = \\ & \frac{EA}{4} \{ [\alpha_0 (q_{k+1} - q_k)^2 + 2\alpha_1 (q_{k+1} - q_k)(q_k - q_{k-1}) + \cdots + \\ & \alpha_n (q_{k+1} - q_k)(q_{k-n+1} - q_{k-n})] + \\ & [\alpha_0 (q_{k+2} - q_{k+1})^2 + 2\alpha_1 (q_{k+2} - q_{k+1})(q_{k+1} - q_k) + \cdots + \\ & \alpha_n (q_{k+2} - q_{k+1})(q_{k-n+2} - q_{k-n+1})] + \cdots + \\ & [\alpha_0 (q_{k+n} - q_{k+n-1})^2 + 2\alpha_1 (q_{k+n} - q_{k+n-1})(q_{k+n-1} - q_{k+n-2}) + \cdots + \\ & \alpha_n (q_{k+n} - q_{k+n-1})(q_k - q_{k-1})] \} = \\ & \begin{Bmatrix} q_{k-n} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{k+n} \end{Bmatrix}^T \left[\frac{EA}{4} \alpha_0 \mathbf{K}_0 + \frac{EA}{2} \alpha_1 \mathbf{K}_1 + \frac{EA}{2} \alpha_2 \mathbf{K}_2 + \cdots + \frac{EA}{4} \alpha_n \mathbf{K}_n \right] \begin{Bmatrix} q_{k-n} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{k+n} \end{Bmatrix} = \\ & \begin{Bmatrix} q_{k-n} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{k+n} \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} q_{k-n} \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_{k+n} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_n & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n+1} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_n & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n-1} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n+2} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n-1} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & & & \\ 1/2 & -1 & 1/2 & \ddots & & \\ -1/2 & 1/2 & \ddots & \ddots & & -1/2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 1/2 \\ & & & & -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{n+2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} i \\ n+1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1/2 & \ddots & \ddots \end{matrix}}^{i+1} & \overbrace{\begin{matrix} \\ \\ \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & \ddots & \ddots & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & 1 & -1/2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{n+1} \end{matrix} \right. & \cdot
 \end{bmatrix}$$

式(13)和式(19)便是一个影响域宽度内的非边界基本子结构的动能和势能的离散形式,这也是该非局部问题的基本界带子结构的能量表达形式.边界区段则需要根据边界条件修改积分后离散获得,推导过程和上文类似,篇幅关系这里便不再赘述.

子结构界带宽度为 a , 变形能矩阵为 $2n+1$ 阶, 左右出口界带为 n 维向量. 为了获取 $2n$ 阶的出口刚度阵, 可将 q_{k-n} 作为已知节点进行消元, 进而获得由左右界带向量表示的变形能 $U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ 以及出口刚度阵 \mathbf{R}_o :

$$U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{R}_o \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_o^T = \mathbf{R}_o. \quad (20)$$

子结构与外部的联系应还有对偶的力向量:

$$\mathbf{p}_a = -\partial U / \partial \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_b = \partial U / \partial \mathbf{q}_b. \quad (21)$$

以上是结构力学势能表达的形式, 还有传递辛矩阵的表达, 特别适用于离散分析动力学体系. 引入两端的界带状态向量:

$$\mathbf{v}_a = \{ \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \}^T, \quad \mathbf{v}_b = \{ \mathbf{q}_b, \mathbf{p}_b \}^T, \quad (22)$$

则有传递形式^[12-13]

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{S} \mathbf{v}_a, \quad (23)$$

其中 \mathbf{S} 为辛矩阵, 满足 $\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mathbf{J}$, 可经由 \mathbf{K} 阵计算获得.

传递形式可与分析动力学的初值问题相衔接, 传递方程表明, 每一次传递一定是一个界带到下一个界带. 子结构的左右界带相互间没有共同点, 但可以有若干中间点, 这些中间点在计算时会作为内部点被消元. 因此传递是跳跃式地前进的, 至少跳跃一个界带宽度, 从而要求整体结构的尺度是界带子结构宽度的整数倍. 连续系统的积分计算不可单纯地跳跃式前进, 而需要实现任意步长的逐步积分, 此时可利用“步进”算法完成逐步积分^[10], 由于篇幅关系, 不给出该算法的推导过程.

3 数值算例

考虑非局部拉杆的静力学问题: 总长度为 $L+a$; 结构的影响域范围(即界带宽度)为 a , 两端边界条件分别为: 左端 d 范围内给定力的边界条件, 而右端 a 范围内给定位移边界条件, 如

图 1 所示,非局部本构方程的核函数采用如下形式^[1]:

$$\alpha(|x' - x|) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x' - x|}{a} \right), & \frac{|x' - x|}{a} \leq 1, \\ 0, & \frac{|x' - x|}{a} > 1. \end{cases} \quad (24)$$

设左端 $[0, d]$ 上作用大小为 f 的均布力,而右端 $[L - a, L]$ 固定,试计算该结构各点位移。

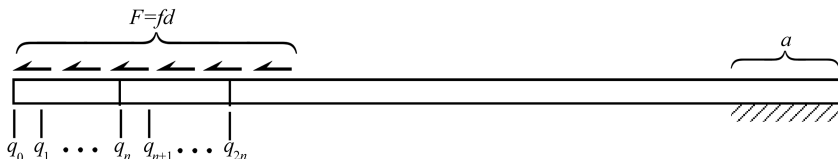


图 1 连续结构的界带划分

Fig. 1 The inter-belt division of a continuous structure

在界带最小宽度(影响域宽度)范围将结构划分为 n 等份,每份长度为 $\eta = a/n$.由于是连续结构,设均布力作用区段可划分为 m 等份,每份长度也为 η .该均布力作用区段作为初始区段,包含 $m + 1$ 个节点,其内部存在若干以影响域宽度为单位的界带子结构($m \geq n$,但 m 可以不是 n 的整数倍).由于结构的总长度 L 并不一定为界带宽度 a 的整数倍,按传统的子结构法无法直接生成传递矩阵,因此可采用步进与传递矩阵相结合的方法计算各积分点的数值^[10].

3.1 数值算例 1

为了便于验证不妨设: $L = 3d = 3, a = 0.2, F = fd = 1, EA = 10$.分别取不同的离散方案,计算节点 $i = 0, i = m/2, i = m, i = 3m/2, i = 2m, i = 5m/2$ 的位移 q_i .由于要计算中间节点,故这里取 m 为偶数,计算结果如表 1 所示.

表 1 不同离散方案下的位移计算结果

Table 1 The results of displacement based on different discretization schemes

number of elements in one inter-belt n	displacement q_0	displacement $q_{m/2}$	displacement q_m	displacement $q_{3m/2}$	displacement q_{2m}	displacement $q_{5m/2}$
6	1.079 587 13	1.028 968 82	0.862 695 75	0.661 718 34	0.457 975 29	0.246 502 32
20	1.051 645 20	1.001 275 37	0.843 822 30	0.644 685 59	0.450 983 17	0.241 060 73
80	1.042 875 29	0.994 204 37	0.838 738 44	0.641 086 18	0.449 211 05	0.240 249 16
200	1.041 147 27	0.992 879 59	0.837 736 89	0.640 433 46	0.448 861 47	0.240 099 47
300	1.040 764 43	0.992 586 08	0.837 514 98	0.640 288 82	0.448 783 99	0.240 066 28

对连续体系进行离散计算必然会引入误差,可以看到,当 n 取 80 时的结果已经和 n 取 300 相当接近了.由于计算过程采用步进算法与传递矩阵相结合,并不需要组装总刚度阵,参与计算的分块矩阵均为 $n \times n$ 矩阵,故该算法具有很高的效率.

为了对比验证,可利用 $m \times m$ 的分块矩阵进行步进运算,并计算步进 s 次以后该分块区段内各点的对偶力(内力)之和 $F_s = \sum q'_{a,i}$,并与外力 F 对比.表 2 给出了不同离散方案下步进次数 $s = 1, m, 2m$ 所得出的当前界带区段内各点的内力之和.

从表 2 可以看出,虽然不同离散方案得出的位移存在一定误差,但都可以很好地满足平衡条件,即使是完成 $2m$ ($n = 300$ 时 $s = 2m = 10n = 3\ 000$) 次步进运算后依然可良好地保持对平衡条件的满足,这正是保辛算法的优势所在.

表 2 特定步进次数后的界带内对偶力之和

Table 2 The sum of dual forces after a specific stepping count

number of elements in one inter-belt n	stepping once	stepping m times	stepping $2m$ times
6	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00
20	0.999 999 999 999 98	0.999 999 999 999 99	0.999 999 999 999 98
80	0.999 999 999 999 89	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00
200	0.999 999 999 999 83	0.999 999 999 999 99	0.999 999 999 999 96
300	1.000 000 000 000 03	1.000 000 000 000 0	0.999 999 999 999 97

3.2 数值算例 2

考虑和算例 1 相同的一维拉杆,令: $L = 3d = 3$, $F = fd = 1$, $EA = 10$, $\rho A = 1$; 并且设轴向还有刚度为 $k = 1$ 的分布弹簧支撑,如图 2 所示. 分别在不同影响域范围: $a = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ 下计算该杆的前 10 阶本征值, 计算结果如表 3 所示.

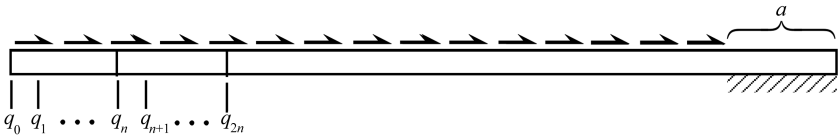


图 2 带弹性支撑的非局部拉杆

Fig. 2 The nonlocal rod with elastic support

表 3 不同影响域范围下的前 10 阶本征值

Table 3 The eigenvalues based on different values of influence domain a

	domain of influence a			
	0.05	0.10	0.15	0.20
eigenvalue				
1st order	1.000 000 000 000	1.000 000 000 000	1.000 000 000 000	1.000 000 000 000
2nd order	1.023 398 705 978	1.022 780 500 505	1.022 572 692 191	1.022 466 843 069
3rd order	1.093 589 050 633	1.091 099 968 951	1.090 242 446 987	1.089 782 584 948
4th order	1.210 553 715 546	1.204 892 327 055	1.202 864 394 528	1.201 693 132 425
5th order	1.374 263 841 438	1.364 047 514 010	1.360 197 402 102	1.357 775 879 600
6th order	1.584 679 035 284	1.568 411 590 808	1.561 904 545 513	1.557 440 978 102
7th order	1.841 747 380 283	1.817 786 885 951	1.807 553 759 564	1.799 932 968 240
8th order	2.145 405 448 667	2.111 932 182 126	2.096 618 655 308	2.084 332 463 824
9th order	2.495 578 317 355	2.450 562 943 301	2.428 479 482 288	2.409 556 831 802
10th order	2.892 179 586 426	2.833 351 581 500	2.802 424 194 635	2.774 353 249 391

从表 3 不难看出,随着影响域范围的增大,拉杆各阶本征频率会相应变小,这与 Eringen 在文献[2]中给出的结果拥有相同的规律.

4 结 论

Eringen 的非局部理论是以积分型本构方程为出发点的,但由于积分型本构关系会导致积分-微分方程,为求解带来很大的困难,从而一直未得到充分的研究与发展. 本文根据分析动力学与分析结构力学的模拟关系,将发展于离散结构的界带分析方法引入连续系统,并成功地用于积分-微分方程的数值求解. 通过分析推导,实现了简单的积分型非局部问题的数值积分. 目前仅完成一维问题的计算,高维问题将在以后的研究中进一步讨论.

参考文献(References):

- [1] Eringen A C. *Nonlocal Continuum Field Theories*[M]. New York: Springer, 2002.
- [2] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [3] 郑长良. 非局部弹性直杆振动特性及 Eringen 常数的一个上限[J]. 力学学报, 2005, **37**(6): 796-798.(ZHENG Chang-liang. The free vibration characteristics of nonlocal continuum bar and an upper bound of material constant in Eringen's nonlocal model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, **37**(6): 796-798.(in Chinese))
- [4] Burhanettin S A, Ghatu S. A nonlocal formulation based on a novel averaging scheme applicable to nanostructured materials[J]. *Mechanics of Materials*, 2003, **35**(3/6): 281-294.
- [5] Ganghoffer J F, de Borst R. A new framework in nonlocal mechanics[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2000, **38**(4): 453-486.
- [6] Reddy J N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, **45**(2/8): 288-307.
- [7] 张洪武, 姚征, 钟万勰. 界带分析的基本理论和计算方法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(3): 257-263.(ZHANG Hong-wu, YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Basic theory and algorithm for inter-belt analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(3): 257-263.(in Chinese))
- [8] 姚征, 张洪武, 王晋宝, 钟万勰. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(1): 13-22.(YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, WANG Jin-bao, ZHONG Wan-xie. Symplectic analysis for phonon dispersion of carbon nanotubes based on inter-belt model[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(1): 13-22.(in Chinese))
- [9] Zhang H W, Yao Z, Wang J B, Zhong W X. Phonon dispersion analysis of carbon nanotubes based on inter-belt model and symplectic solution method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(20): 6428-6449.
- [10] 姚征, 张洪武, 钟万勰. 连续系统的界带分析方法[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(6): 749-756.(YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie. Inter-belt analysis of continuous system [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(6): 749-756.(in Chinese))
- [11] 姚征, 张洪武, 钟万勰. 时滞与界带[J]. 动力学与控制学报, 2012, **10**(2): 97-106.(YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie. Time delay and inter-belt[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, **10**(2): 97-106.(in Chinese))
- [12] ZHONG Wan-xie. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control*[M]. New York: Springer, 2004.
- [13] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.(ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.(in Chinese))

Inter-Belt Analysis of the Integral-Form Nonlocal Constitutive Relation

YAO Zheng, ZHENG Chang-liang

(*Transportation Equipment and Ocean Engineering College,
Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, P.R.China*)

Abstract: Based on the Hamilton theory, the constitutive relation was investigated for the nonlocal linear elasticity originally proposed by Eringen. Eringen's nonlocal equations can be written in the integral form and the differential form. The differential form with the relatively simple mathematical formulation, had been widely used in recent years. For the integral form of the nonlocal elastic theory, solving the integro-differential equations was challenging for numerical process. In the analytical structural mechanics, the integro-differential equations in time-delay problems had been solved with the inter-belt theory. According to the simulative relations between the analytical dynamics and the analytical structural mechanics, the inter-belt theory was introduced into the integral-form constitutive equations of the nonlocal theory, and hence the integro-differential equations were numerically solved with high precision. Then the fundamental theory and computational algorithm were applied to dynamic problems of nonlocal rod vibration. The numerical experiments demonstrate validity of the present method and potential of the symplectic system algorithm in solving nonlocal mechanics problems.

Key words: nonlocal theory; integro-differential equation; inter-belt analysis; symplectic algorithm

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202040)