

# 扁球壳在均布压力与均匀温度场 联合作用下的屈曲\*

赵伟东, 杨亚平

(青海大学 土木工程学院, 西宁 810016)

**摘要:** 根据扁壳几何非线性理论,推导出均布压力与均匀温度场联合作用下的扁球壳的位移型几何非线性控制方程.考虑夹紧边界条件,采用打靶法得到了扁球壳轴对称弯曲与屈曲的数值结果.讨论了壳体几何参数对平衡路径、临界荷载的影响,给出了壳体临界几何参数.当几何参数大于临界几何参数时,上、下临界荷载都随几何参数增加而增加.给定几何参数时,考察了不同均匀温度场对壳体上、下临界荷载、临界几何参数以及平衡构型的影响.均匀升温会使上临界荷载显著增加,会使下临界荷载略有减小,均匀变温会使临界几何参数改变.

**关键词:** 扁球壳; 均布压力; 均匀温度场; 屈曲; 临界荷载; 临界几何参数;  
打靶法

**中图分类号:** TU43      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.03.004

## 引 言

自从 von Kármán 和 Tsien(钱学森)<sup>[1]</sup> 首先指出载荷-位移非线性关系是薄壳稳定性中的重要因素,并首先对球壳的屈曲进行了非线性分析之后,人们利用非线性分析方法对扁球壳的屈曲做了大量的工作<sup>[2-3]</sup>.我国学者在该领域的工作在国际上占有重要位置,早在 1945 年,钱伟长(未发表)首先用势能原理研究了对称线布载荷作用下扁薄圆球壳的弯曲与跳跃问题.1954 年,胡海昌<sup>[4]</sup> 研究了扁薄圆球壳在均布边缘力矩作用下的跳跃问题,文中首次证明了一个理论上完全正确的关系式,即跳进力矩与跳回力矩的平均值与壳体几何参数的平方成正比;求出了可能产生跳跃现象的临界几何参数.1966 年,罗祖道等<sup>[5]</sup> 提出了有关开顶双层扁薄圆球壳在均布温度场作用下的稳定性的一般理论,文中给出了临界跳跃温度与壳体的物理、几何诸参数之间的相互关系.1983 年,叶开沅<sup>[6]</sup> 系统介绍了柔韧构件研究在中国的进展,继而又在 1987 年<sup>[7]</sup> 提出了求解圆底扁薄球壳非线性微分方程边值问题的 Newton(牛顿)-样条函数法(NS 法),并应用该方法详细讨论了圆底扁薄球壳的屈曲前和屈曲后行为以及寻找临界点的问题.

由于该问题的非线性性质,对其求解方法的研究是其重要的组成部分.1988 年,顾淑贤<sup>[8]</sup> 用三次 B 样条函数和逐步迭代法求解了扁球壳在对称线布载荷作用下的非线性稳定性,该方

\* 收稿日期: 2014-07-04; 修订日期: 2015-01-29

作者简介: 赵伟东(1972—),男,甘肃靖远人,副教授,硕士(通讯作者). E-mail: zhwd.xbl@163.com).

法的显著成就是:当壳体几何参数  $k < 25$  时,所得的结果与前人的结果一致;在  $25 < k < 400$  的大范围内,仍能得到收敛良好的解答.就在同一年,严圣平<sup>[9]</sup>用逐步加载法将圆底扁球壳在均布压力作用下的非线性微分方程组线性化,然后以三次 B 样条函数为试函数,用配点法将线性微分方程组化成线性代数方程组,最终使问题得到了满意的解答,文中给出了大量可供后续工作者参考的宝贵数据.

在建筑和精密仪器的弹性元件中,经常使用具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳.1988年,刘人怀等<sup>[10]</sup>用修正迭代法研究了开顶扁球壳的非线性稳定性.1997年,严圣平<sup>[11]</sup>用文献[9]提出的方法,研究了均布荷载作用下变厚度开顶扁球壳的非线性稳定性问题.2001年,王璠等<sup>[12]</sup>用修正迭代法研究了开顶扁球壳的动态屈曲.

近年来,对扁球壳非线性静、动力学行为的研究仍是研究领域的热点.2008年,朱永安等<sup>[13]</sup>考虑横向剪切效应,用修正迭代法研究了对称圆柱正交异性层合扁球壳的热屈曲.2010年,李善倾等<sup>[14]</sup>以简支梯形底扁球壳的自由振动为例,详细阐明了准 Green 函数方法的思想,并求得了较高精度的结构固有频率.该文首次在壳体结构中运用了准 Green 函数方法,为研究底边界形状复杂的简支扁球壳的自由振动提出了一种新的数学方法.同在 2010年,Panda等<sup>[15]</sup>基于高阶剪切变形理论(HSDT),运用直接迭代法结合非线性有限元法,研究了复合材料层合扁球壳形面板在热后屈曲状态时的非线性自由振动.2013年,Boroujerdy等<sup>[16]</sup>考虑均匀的外部压力、热荷载以及恒定电压作用,研究了带有压电层的功能梯度扁球壳的非线性轴对称热-机械响应.就在同一年,张平等<sup>[17]</sup>根据势能驻值原理,用有限元法研究了用于自适应进气道的扁薄球壳的双稳态特性.

我们知道:圆底扁球壳在对称压力作用下的对称屈曲是个典型的两点边值问题.已有文献多以横向位移函数  $w$  和径向薄膜内力  $N_r$ (或应力函数  $\Phi$ ) 为基本未知函数建模并设法求解,由于问题的非线性特性,求解过程普遍较复杂.若用横向位移函数  $w$  和径向位移函数  $u$  来描述,则可得一对相互耦合的位移型非线性常微分方程组.如果用打靶法求其数值结果,则无需对方程做任何处理,从而避免引入人为误差,只要找到相应的初值,就可以计算得到较高精度的数值解.在该领域用打靶法求解扁薄球壳弯曲与屈曲的文献还不多见,有关温度变化对扁薄球壳弯曲与屈曲的影响方面的数据依然稀缺.考虑到作为精密仪器弹性元件的扁薄球壳,经常需要在弹性范围内工作,且常常需要利用屈曲发生时产生的“跳跃”现象作为自动控制的信号,这就需要考虑物理方程非线性、几何方程非线性的因素;并且由位移型方程及位移型边界条件给出的一维定解问题很容易用打靶法求得较高精度的解.本文在文献[18-20]工作基础上,考虑均匀变温场,建立了在均布外压作用下的圆底扁薄球壳轴对称弯曲/屈曲位移型方程,并给出了固定边的位移型边界条件及中心对称条件.运用打靶法计算得到了过屈曲平衡路径、临界荷载随几何参数变化的稳定曲线,发现壳体上临界荷载对变温很敏感,变温会使临界几何参数发生改变.为了直观起见,给出了一个具有实际参数圆底扁薄球壳在不同变温环境下的过屈曲平衡路径及平衡构型.将文中数据与文献[9]中已有的数据做了详细对比,二者能较好地一致.取壳体几何参数  $k = 0$ (壳体退化为圆薄板),当未发生变温时,所得数据与圆薄板大挠度问题摄动法解一致性很好.

## 1 建立数学模型

在研究图 1 圆底扁薄球壳轴对称弯曲变形时,应用圆柱坐标系,则球壳中曲面上任意点 A

的位置坐标为  $A(r, \theta, z)$ 。在轴对称的情况下,  $A$  点的径向位移  $U(r)$  及横向位移(即挠度)  $W(r)$  仅是半径  $r$  的一元函数。设球壳中曲面曲率半径为  $R$ ,  $h$  为壳体厚度,  $F$  为拱高,  $a$  为圆底半径,  $q$  为均布压力集度,  $T$  为均匀变温。在线弹性、轴对称的情况下, 扁薄球壳中曲面大挠度几何方程由文献[21]中的相应方程退化为

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dr} \right)^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} - \frac{W}{R}. \quad (2)$$

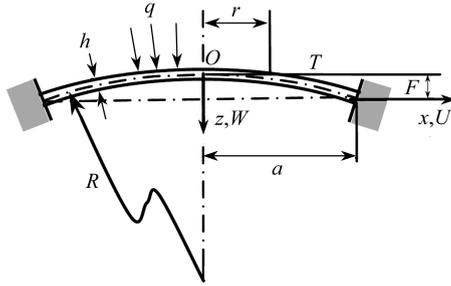


图1 夹紧扁球壳

Fig. 1 A clamped shallow spherical shell

大挠度扁薄球壳在均布外压作用下的平衡方程由文献[21]中的相应方程退化为

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r \left( \frac{1}{R} + \frac{d^2 W}{dr^2} \right) + N_\theta \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) + q = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0, \quad (5)$$

式中,  $q$  为均布压力集度;  $N_r, N_\theta$  分别为径向和环向截面上的薄膜力;  $M_r, M_\theta$  分别为径向和环向截面上的内矩;  $Q_r$  为径向截面上的横向剪力, 表示式是

$$N_r = K(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) - Eh\alpha T/(1 - \nu), \quad (6)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) - Eh\alpha T/(1 - \nu), \quad (7)$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right), \quad (8)$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right), \quad (9)$$

$$Q_r = -D \left( \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right), \quad (10)$$

式中  $K = Eh/(1 - \nu^2)$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  为弯曲刚度,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为 Poisson(泊松)比,  $\alpha$  为材料热膨胀系数。联立式(1)~(10), 考虑  $1/R \approx 2F/a^2$ , 并引入下列无量纲量:

$$x = r/a, \quad w = W/h, \quad u = Ua/h^2, \quad f = F/h, \quad k = \sqrt{12(1 - \nu^2)} a^2/(Rh),$$

$$\mu = 12(1 + \nu)\alpha a^2 T/h^2, \quad Q = qa^4/(Dh),$$

式中,  $x$  为柱坐标系中的无量纲径向坐标,  $u$  和  $w$  分别为无量纲径向和横向位移函数,  $f$  为球壳无量纲拱高,  $k$  为壳体物理几何参数(由于该参数不但与壳体几何尺寸有关, 也与壳体材料常数有关, 但为了与传统文献一致, 下文仍称其为壳体几何参数),  $\mu$  为无量纲变温,  $Q$  为无量纲均布外压力. 于是得到扁球壳无量纲位移型几何非线性方程如下:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + \mu \left( \nabla^2 w + \frac{k}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right) - 12 \left\{ \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \nu \frac{u}{x} \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + \right. \\ \left. \left[ \frac{u}{x} + \nu \frac{du}{dx} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right\} - \frac{6k(1+\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[ \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - \right. \\ \left. w \left( \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{k}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right) \right] = Q, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dw}{dx} + \frac{1-\nu}{2x} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - \frac{k(1+\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (12)$$

式中算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}.$$

固定夹紧边界条件:

$$x = 1 \text{ 时, } u = 0, w = 0, \frac{dw}{dx} = 0; \quad (13)$$

中心对称条件:

$$x = 0 \text{ 时, } u = 0, \frac{dw}{dx} = 0. \quad (14)$$

由于结构、荷载及变形均正对称, 故位于球顶 ( $r \rightarrow 0$ ) 径向截面(正对称截面)上反对称的剪力  $Q_r = 0$ ; 又因为外荷载  $q$  连续, 故剪力  $Q_r$  连续; 若用无量纲横向位移  $w$  及径向坐标  $x$  表达式(10), 则有下式成立:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dw}{dx} \right) = 0. \quad (15)$$

方程(11)、(12)及边界条件(13)~(15)为均匀变温场中的、均布外压作用的固定边圆底扁薄球壳轴对称弯曲变形的常微分方程两点边值问题, 易用打靶法得到其数值结果(需要说明的是: 若令式(11)、(12)中的几何参数  $k = 0$ , 方程将退化为均匀变温场中的圆薄板在横向荷载作用下的大挠度问题; 若再令  $Q \rightarrow 0$ , 则可求圆薄板热屈曲临界温度)。

为了用打靶法求解上述两点边值问题, 设

$$\mathbf{Y} = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7)^T = (w \ w' \ w'' \ w''' \ u \ u' \ Q)^T.$$

由于方程(11)、(12)及边界条件(15)在  $x = 0$  处存在奇异性, 为保证数值结果收敛, 将求解区间取为  $[\Delta x, 1]$ , 其中  $\Delta x \rightarrow 0^+$ . 则原两点边值问题可化为下述初值问题:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}, x) = (y_2 \ y_3 \ y_4 \ \phi_1 \ y_6 \ \phi_2 \ 0)^T, \quad x \in [\Delta x, 1],$$

式中  $\phi_i (i = 1, 2)$  从非线性常微分方程(11)、(12)中得到, 不再赘述. 由于位移函数在  $x = 0$  处连续可微, 当  $\Delta x$  充分小时, 可用  $\Delta x$  处的值代替  $x = 0$  处的边界条件:

$$Y(\Delta x) = (\eta \quad 0 \quad V_1 \quad 0 \quad 0 \quad V_2 \quad V_3)^T,$$

式中  $\eta$  为  $x = \Delta x$  处的初始挠度(赋值),  $V_i (i = 1, 2, 3)$  为待定参数, 由  $x = 1$  处的边界确定.

## 2 数值结果分析

为便于将本文中的数据与文献[9]中的数据做对比, 令方程(11)中的无量纲荷载  $Q = P / \sqrt{3(1 - \nu^2)}$ , 无量纲变温  $\mu = 0$ . 图2在给定13个壳体几何参数  $k$  的情况下, 给出了均布外压力  $P$  与壳体中心挠度  $w(0)$  的关系曲线. 数值计算表明: 当  $k < 11.1$  时,  $w(0)$  为  $P$  的单值函数; 当  $k > 11.1$  时, 在  $P$  的一定取值范围内,  $w(0)$  为  $P$  的多值函数, 曲线出现了明显的迂回, 也即出现了上下临界荷载. 由于曲线的迂回特性, 在物理上将导致跳跃的发生, 这是很多文献已经揭示的成果, 这里不做详细描述. 现在用  $k_{cr} = 11.1$  来表达均布外压作用的固定边圆底扁薄球壳的临界几何参数. 经换算该值对应的壳体无量纲拱高(即临界拱高)  $f_{cr} = 1.6795$ . 为便于应用, 表1、表2中列出了图2中的部分数据, 给出了不同几何参数  $k$  的上下临界荷载(即表中的加粗数字), 并与文献[9]中已有的数据做了对比. 从数据对比可以看出: ① 当壳体退化为圆板 ( $k = 0$ ) 时, 打靶法数值结果不但能与摄动法解很好一致, 也能与文献[9]的解(选用  $n = 40, W_{k0} = 0.01$  时所得载荷)很好一致; ② 当  $k = 6, 16, 20, 26$  时, 打靶法解也能够与文献[9]的解(选用  $n = 90, W_{k0} = 0.002$  时所得载荷)很好一致. 以  $k = 26$  为例, 本文上临界荷载对应的中心挠度与文献[9]的相应值同为  $0.854$ ; 若以文献[9]的上临界荷载为参考值, 本文相应的解与其相对误差小于  $0.2\%$ , 而本文下临界荷载为  $372.8807$ , 对应的中心挠度为  $5.408$  (文献[9]未提供该值). 上面的数据对比表明, 对前文导出的固定边圆底扁薄球壳位移型方程及定解条件, 用打靶法求解是有效的.

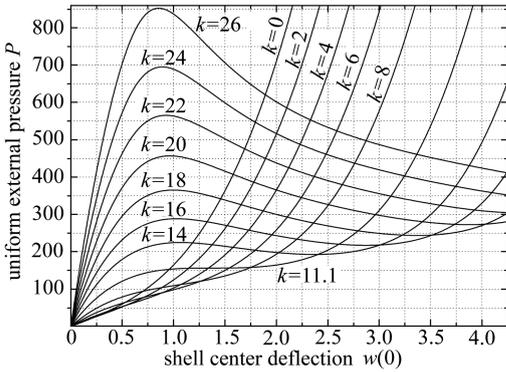


图2 不同壳体几何参数  $k$  对应的中心挠度  $w(0)$  与均布外压力  $P$  的关系曲线

Fig. 2 Center deflection  $w(0)$  vs. uniform external pressure  $P$  for different values of shell geometric parameter  $k$

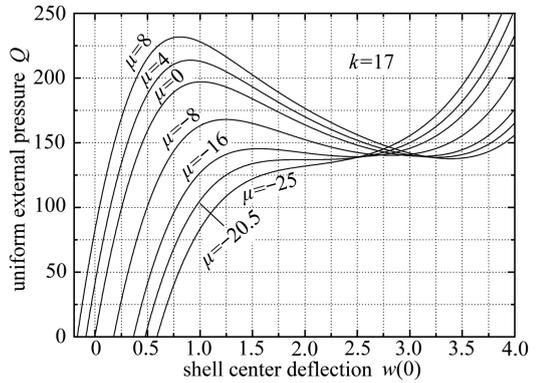


图3 不同变温  $\mu$  对应的中心挠度  $w(0)$  与均布外压力  $Q$  的关系曲线

Fig. 3 Center deflection  $w(0)$  vs. uniform external pressure  $Q$  for different values of uniform temperature  $\mu$

下面通过图3给出变温对壳体过屈曲平衡路径的影响. 为了利用方程(11)右边的无量纲荷载的最简形式, 现在仍用  $Q$  来表达无量纲均布压力. 也为了便于描述的缘故, 图中仅以壳体几何参数  $k = 17$  为例, 给出不同变温情况的过屈曲平衡路径.



表 2 壳体中心挠度  $w(0)$  对应的均布外压力  $P$  的数值结果(II)Table 2 Numerical results of the uniform external pressure corresponding to shell center deflection  $w(0)$  (II)

deflection $w(0)$	solution in ref. [9] ( $n = 90, W_{k0} = 0.002$ ), $P = \sum p_k$ ,							
	$k = 16$		$k = 18$		$k = 20$		$k = 22$	
	solution in ref. [9]	present solution	present solution	solution in ref. [9]	present solution	present solution		
0.1	64.985 839 8	64.895 790	81.655 000	101.431 076	101.320 50	124.148 30		
0.2	120.161 652	119.983 90	151.601 70	189.204 102	188.977 00	232.727 70		
0.3	166.073 105	165.812 10	210.263 80	263.520 996	263.173 50	325.627 70		
0.4	203.335 922	202.998 10	258.154 30	324.660 645	324.191 00	402.736 90		
0.5	232.644 409	232.238 00	295.908 80	373.047 119	372.457 20	464.049 70		
0.6	254.774 033	254.309 80	324.314 90	409.333 984	408.632 60	509.842 10		
0.7	270.573 975	270.064 30	344.328 50	434.488 281	433.692 40	540.903 00		
0.8	280.947 510	280.406 20	357.062 60	449.826 660	448.961 00	558.718 90		
0.9	286.817 871	286.258 60	363.739 40	456.969 482	456.063 80	565.468 60		
0.924		287.096 20	364.580 30		456.750 10	565.727 30		
<b>0.926</b>		287.157 10	364.638 50		456.791 60	<b>565.728 10</b>		
0.928		287.216 60	364.694 70		456.830 60	565.722 50		
0.960		287.991 80	365.360 30		457.144 30	565.280 90		
<b>0.962</b>		288.029 50	365.387 60	458.059 326	<b>457.145 10</b>	565.229 20		
<b>0.964</b>		288.066 00	365.413 40	<b>458.060 303</b>	457.144 00	565.174 40		
0.966		288.101 30	365.437 60	458.059 082	457.140 60	565.116 70		
0.994		288.471 20	365.611 20		456.881 20	564.038 60		
<b>0.996</b>		288.489 10	<b>365.612 40</b>		456.848 20	563.942 60		
0.998		288.505 80	365.611 90		456.813 00	563.844 80		
1.0	289.085 937	288.521 50	365.610 00	457.691 650	456.776 20	563.744 00		
1.026	289.190 430	288.626 70	365.458 30		456.131 30	562.231 30		
<b>1.028</b>	<b>289.191 162</b>	<b>288.627 40</b>	365.437 10		456.069 30	562.099 70		
1.030	289.190 674	288.627 10	365.414 50		456.006 10	561.966 10		
1.5	271.726 074	271.254 60	338.655 00	416.567 627	415.843 30	502.528 10		
2.0	243.607 788	243.265 40	300.203 30	366.196 045	365.680 20	438.040 10		
2.866		217.329 40	253.546 40		304.629 10	364.265 80		
<b>2.868</b>		<b>217.328 50</b>	253.476 90		304.522 10	364.134 70		
2.870		217.329 10	253.407 10		304.413 70	364.005 30		
3.0		218.182 90	249.331 40		297.745 00	355.798 90		
3.364		232.242 10	243.831 80		282.488 80	335.504 20		
<b>3.366</b>		232.378 70	<b>243.830 80</b>		282.420 10	335.403 70		
3.368		232.517 30	243.830 90		282.352 70	335.301 60		
3.868		299.029 60	259.368 20		272.788 60	313.933 90		
<b>3.870</b>		299.457 30	259.511 50		<b>272.788 40</b>	313.868 60		
3.872		299.887 50	259.652 50		272.789 20	313.800 90		
4.378			330.481 40		288.935 10	304.106 80		
<b>4.380</b>			330.940 10		289.079 10	<b>304.105 00</b>		
4.382			331.397 30		289.228 30	304.105 10		

从图容易看出: ① 均匀变温(相对初始温度而言,下文同,不再赘述)对壳体上临界荷载  $Q_{cr}^u$  有着明显的影响,温度升高,  $Q_{cr}^u$  显著增加,温度降低,  $Q_{cr}^u$  显著减小.这表明,温度升高,有助于提高壳体的抗屈曲能力. ② 均匀变温对壳体下临界荷载  $Q_{cr}^d$  的影响较小,但随着温度降低,  $Q_{cr}^d$  在增大.这表明,若使温度均匀降低,将导致壳体上下临界荷载逐渐靠近,最终导致壳体不出现上下临界荷载(迂回特性消失).因此,温度变化会引起壳体临界几何参数发生变化.计算表明,当无量纲温度  $\mu = -20.5$  时,对  $k = 17$  的壳体,  $|Q_{cr}^u - Q_{cr}^d| \rightarrow 0$ .换句话说,当  $\mu = -20.5$  时,  $k_{cr} = 17$ (前文已指出:  $\mu = 0$  时,  $k_{cr} = 11.1$ ).

图2、图3分别揭示了壳体几何参数、变温均对壳体承载力(这里指上临界荷载,下文不再赘述)有着显著的影响.为便于工程应用,图4给出不同变温环境下的壳体上、下临界荷载随几何参数变化的关系曲线.从图容易看出: ① 对于指定的变温  $\mu$ , 壳体的上/下临界荷载 ( $Q_{cr}^u/Q_{cr}^d$ ) 均随几何参数  $k$  的增加而单调增加,但上临界荷载的增加要快得多; ② 当壳体几何参数  $k$  指定时,  $\mu$  越高,  $Q_{cr}^u$  越大,但  $\mu$  对  $Q_{cr}^d$  的影响较小.由于变温会明显地影响壳体的承载能力,又由于模型的超静定特性,这就为试验验证提出了很大的挑战.因为对壳体施加温度变化时,如何保证支座不受变温影响,从而保证边界条件不受影响则有着很大的困难.已经知道,该模型的线性理论的解与实验值相差悬殊<sup>[3]</sup>,但很少有文献提及变温对实验结果的影响.根据文中的计算数据判断,温度变化应该是导致实验误差不可避免的因素之一.

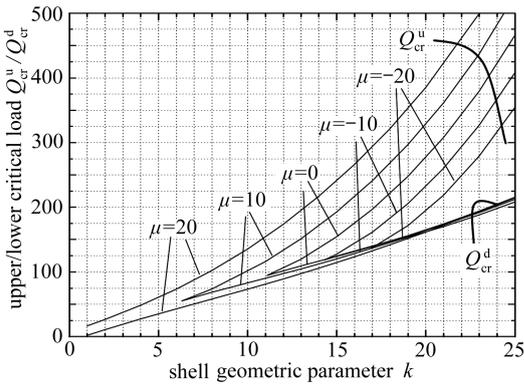


图4 不同变温  $\mu$  对应的上/下临界荷载  $Q_{cr}^u/Q_{cr}^d$  与几何参数  $k$  的关系曲线

Fig. 4 Upper/lower critical load  $Q_{cr}^u/Q_{cr}^d$  vs. shell geometric parameters  $k$  for different values of uniform temperature  $\mu$

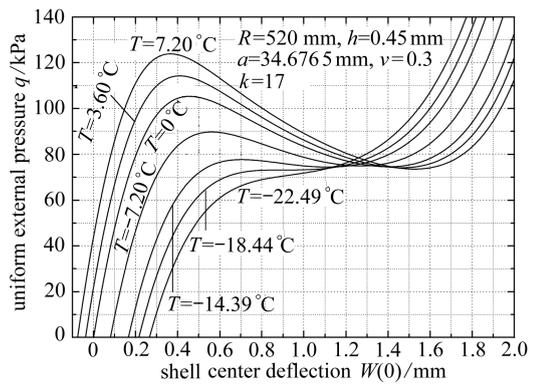


图5 不同变温  $T$  对应的中心挠度  $W(0)$  与均布外压力  $q$  的关系曲线

Fig. 5 Shell center deflection  $W(0)$  vs. uniform external pressure  $q$  for different values of uniform temperature  $T$

为了进一步说明变温会明显地影响壳体的承载能力,也为了增加论文数据的直观性,下面给出一个实际参数模型的相关数据.取球壳曲率半径  $R = 520$  mm,厚度  $h = 0.45$  mm(该参数曾在文献[3]的实验模型中选用),壳体几何参数  $k = 17$ .经换算:对应  $a = 34.6765$  mm,有量纲拱高  $F = 1.1575$  mm,材料弹性模量  $E = 2.06 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>,Poisson 比  $\nu = 0.3$ ,热膨胀系数  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>.针对该实际参数模型,将图3的无量纲数据换算为相应的有量纲数据,并由图5给出.从图中容易看出,在温度变化幅度并不大的情况下,壳体上临界荷载也有着显著的变化.这里清楚地表明:壳体的承载能力对变温非常敏感.至于变化规律,则于图3无量纲的情形完全一致,不再赘述.

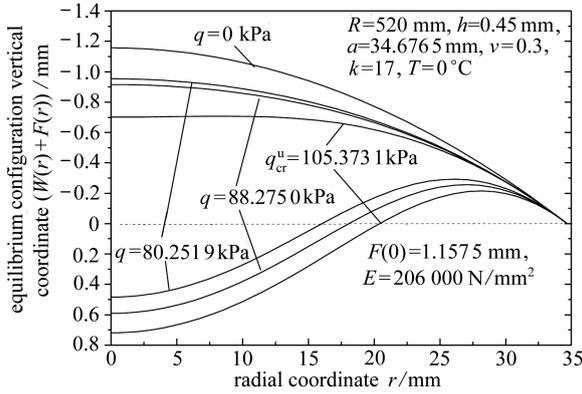
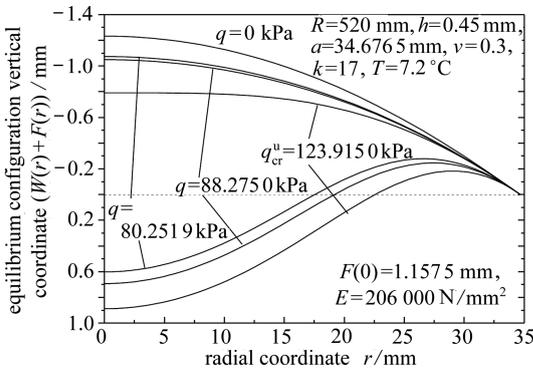
图6  $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时壳体平衡构型Fig. 6 The shell's equilibrium configurations for  $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 图7  $T = 7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时球壳平衡构型

Fig. 7 The shell's equilibrium configurations

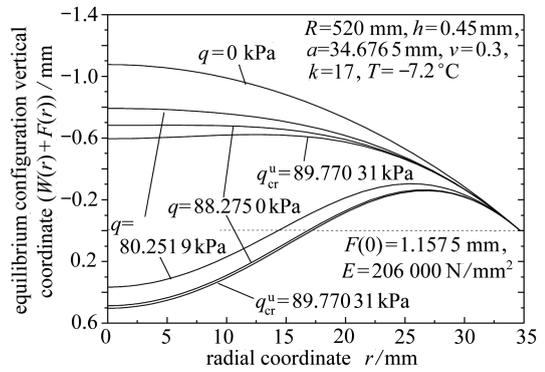
for  $T = 7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 图8  $T = -7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时球壳平衡构型

Fig. 8 The shell's equilibrium configurations

for  $T = -7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 

为了更直观起见,我们通过图6、图7和图8给出3个变温参数时前述实际参数模型的平衡构型.现在以图6为例加以说明如下:①图中 $q = 0\text{ kPa}$ 对应的曲线为 $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时的原始构型;②图中 $q = 80.2519\text{ kPa}$ ,  $88.2750\text{ kPa}$ 及 $q_{cr}^u = 105.3731\text{ kPa}$  ( $q_{cr}^u$ 表示实际参数的上临界荷载)对应的6条曲线为 $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时的相应构型,其中竖向坐标均小于0的3条曲线代表翻转(跳跃)之前的构型,另外3条曲线对应翻转之后的构型.图中曲线清楚地表达了荷载与变形的对应关系,不再赘述.为便于对比,在3个荷载参数与图6荷载参数取相同值的前提下,图7和图8分别给出了 $T = 7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和 $T = -7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 两种变温参数时的构型图.从图中易见,其变化规律与图6表达的规律类似.下面仅就明显的差异加以说明:①对比 $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和 $-7.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 对应的3个原始构型,不难发现,温度升高,壳体(指扁壳)的拱高会显著增加,反之则拱高显著减小.由于壳体的拱高增减直接反映壳体几何参数的增减(将导致承载力显著增减),显然,这应该是温度升高导致壳体(指扁壳)承载能力提高的主要原因.②与未变温的变形情况相比,温度升高,壳体在翻转前后的跳跃幅度显著增加;温度降低,情况则相反.

### 3 结 论

1) 固定边圆底扁薄球壳在均布外压力及均匀变温场中的轴对称弯曲与屈曲的几何非线性

性力学行为,可以用横向位移函数与径向位移函数来描述,用打靶法对其求解能得到高精度的数值结果。

2) 固定边圆底扁薄球壳:在未变温的情况下,随壳体几何参数增加,上下临界荷载均单调增加,但上临界荷载的增加显著,而下临界荷载的增加则较小。

3) 固定边圆底扁薄球壳:当壳体几何参数不变时,随温度升高(相对初始温度)壳体上临界荷载显著增加,下临界荷载则略有减小;随温度降低(相对初始温度)壳体上临界荷载显著减小,下临界荷载则略有增加,因此,温度升高会显著地增加壳体的抗屈曲能力;温度降低则会显著地削弱壳体的抗屈曲能力。

4) 固定边圆底扁薄球壳:温度下降,会导致上、下临界荷载差值减小,进而引起壳体临界几何参数发生改变;温度下降,壳体临界几何参数增加,反之则减小。

#### 参考文献(References):

- [1] von Kármán T, Tsien H S. The buckling of spherical shells by external pressure[J]. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1939, **6**(2): 43-50.
- [2] Weintschke H J. On the stability problem for shallow spherical shells[J]. *J Math Phys*, 1959, **38**(4): 209-231.
- [3] 沃耳密耳 A C. 柔韧板与柔韧壳[M]. 卢文达, 黄择言, 卢鼎霍 译. 北京: 科学出版社, 1959. (Wolmil A C. *Flexible Plate and Flexible Shell* [M]. LU Wen-da, HUANG Ce-yan, LU Ding-huo transl. Beijing: Science Press, 1959. (in Chinese))
- [4] 胡海昌. 球面扁薄圆壳的跳跃问题[J]. 物理学报, 1954, **10**(2): 105-131. (HU Hai-chang. On the snapping of a thin spherical cap[J]. *Acta Physica Sinica*, 1954, **10**(2): 105-131. (in Chinese))
- [5] 罗祖道, 聂德耀, 刘汉东, 刘习文, 史建勋. 双层金属球面扁壳的热稳定性[J]. 力学学报, 1966, **9**(1): 1-13. (LUO Zu-dao, NIE De-yao, LIU Han-dong, LIU Xi-wen, SHI Jian-xun. Thermal snap-through buckling of a bimetallic shallow spherical shell[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1966, **9**(1): 1-13. (in Chinese))
- [6] 叶开沅. 柔韧构件研究在中国的进展[J]. 力学进展, 1983, **13**(2): 125-134. (YE Kai-yuan. The development of investigations of flexible structural elements in China[J]. *Advances in Mechanics*, 1983, **13**(2): 125-134. (in Chinese))
- [7] 叶开沅, 宋卫平. 均布压力作用下圆底扁薄球壳的轴对称屈曲[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1987, **23**(2): 18-27. (YE Kai-yuan, SONG Wei-ping. Axisymmetrical buckling of thin shallow circular spherical shells under the action of uniform pressure[J]. *Journal of Lanzhou University(Natural Science)*, 1987, **23**(2): 18-27. (in Chinese))
- [8] 顾淑贤. 扁球壳在对称线布荷载作用下的稳定性问题[J]. 固体力学学报, 1988, **9**(1): 39-48. (GU Shu-xian. An approach to the nonlinear stability of shallow shells with a symmetrically distributed line load[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1988, **9**(1): 39-48. (in Chinese))
- [9] 严圣平. 扁球壳在均布压力作用下的非线性弯曲问题[J]. 应用力学学报, 1988, **5**(3): 21-29. (YAN Sheng-ping. Non-linear bending of a shallow spherical shell under uniformly distributed pressure[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1988, **5**(3): 21-29. (in Chinese))
- [10] 刘人怀, 成振强. 集中载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(2): 95-106. (LIU Ren-huai, CHENG Zhen-qiang. On the nonlinear stability of a truncated

- shallow spherical shell under a concentrated load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, **9**(2): 95-106. (in Chinese))
- [11] 严圣平. 均布载荷作用下变厚度开顶扁球壳的非线性稳定问题[J]. *应用数学和力学*, 1997, **18**(10): 947-952. (YAN Sheng-ping. Nonlinear stability of truncated shallow spherical shell with variable thickness under uniformly distributed load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, **18**(10): 947-952. (in Chinese))
- [12] 王璠, 刘人怀. 复合材料层合开顶扁球壳的非线性动态屈曲[J]. *固体力学学报*, 2001, **22**(3): 309-314. (WANG Fan, LIU Ren-huai. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated truncated spherical shell[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, **22**(3): 309-314. (in Chinese))
- [13] 朱永安, 王璠, 刘人怀. 考虑横向剪切的对称圆柱正交异性层合扁球壳的热屈曲[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(3): 263-271. (ZHU Yong-an, WANG Fan, LIU Ren-huai. Thermal buckling of axisymmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells including transverse shear[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(3): 263-271. (in Chinese))
- [14] 李善倾, 袁鸿. 简支梯形底扁球壳自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(5): 602-608. (LI Shan-qing, YUAN Hong. Quasi-Green's function method for free vibration of simply-supported trapezoidal shallow spherical shell[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(5): 602-608. (in Chinese))
- [15] Panda S K, Singh B N. Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2010, **6**(2): 175-188.
- [16] Boroujerdy M S, Eslami M R. Nonlinear axisymmetric thermomechanical response of piezo-FGM shallow spherical shells[J]. *Arch Appl Mech*, 2013, **83**(12): 1681-1693.
- [17] 张平, 周丽, 邱涛. 用于自适应进气道的扁薄球壳双稳态特性分析[J]. *工程力学*, 2013, **30**(10): 264-271. (ZHANG Ping, ZHOU Li, QIU Tao. Analysis of bi-stable behavior of shallow thin spherical shell applied in adaptive inlet[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(10): 264-271. (in Chinese))
- [18] 赵伟东. 圆薄板及扁球壳轴对称非线性强迫振动[D]. 硕士学位论文. 兰州: 兰州理工大学, 2007. (ZHAO Wei-dong. Nonlinear forced axisymmetric vibrations of thin circular plate and shallow spherical shell[D]. Master Thesis. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2007. (in Chinese))
- [19] 赵伟东, 邱平, 吴晓, 甘文艳. 均布压力作用下扁球壳几何非线性自由振动[J]. *兰州理工大学学报*, 2010, **36**(4): 168-171. (ZHAO Wei-dong, QIU Ping, WU Xiao, GAN Wen-yan. Geometrically nonlinear free vibration of a shallow spherical shell under uniform pressure[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2010, **36**(4): 168-171. (in Chinese))
- [20] 赵伟东, 黄永玉, 杨亚平. 弹性基础上压杆的横向非线性自由振动与屈曲[J]. *力学与实践*, 2014, **36**(3): 303-307. (ZHAO Wei-dong, HUANG Yong-yu, YANG Ya-ping. The transverse nonlinear free vibration and the buckling of a compressive bar on an elastic foundation[J]. *Mechanics in Engineering*, 2014, **36**(3): 303-307. (in Chinese))
- [21] 冯仲齐. 扁球壳的大挠度弹塑性分析[J]. *西安冶金建筑学院学报*, 1994, **26**(2): 117-122. (FENG Zhong-qi. Analysis of elastoplastic of shallow spherical shells with large deflection[J].

*Journal of Xi'an University of Architecture & Technology*, 1994, **26**(2): 117-122. (in Chinese))

## **Buckling of Shallow Spherical Shells Under Uniform Pressure in Uniform Temperature Field**

ZHAO Wei-dong, YANG Ya-ping

(*School of Civil Engineering, Qinghai University, Xining 810016, P.R.China*)

**Abstract:** According to the geometrical nonlinear theory for shallow shells, the displacement-type geometrical nonlinear governing equations for shallow spherical shells under uniform pressure in uniform temperature field were derived. With the shooting method, the numerical results of axisymmetric bending and buckling of the shallow spherical shell in the clamped boundary condition were obtained. The effects of various shell geometrical parameters on the equilibrium paths and the critical loads were discussed. The critical shell geometrical parameter was defined. And it is found that both the upper and lower critical loads increase with the geometrical parameter in the range beyond its critical value. The effects of different values of the uniform temperature field on the upper and lower critical loads, the critical geometrical parameter, and the equilibrium configurations were investigated under a given geometrical parameter. Rise of the uniform temperature brings obvious increase of the upper critical load and slight decrease of the lower critical load. Moreover, change of the uniform temperature influences the critical shell geometrical parameter a lot.

**Key words:** shallow spherical shell; uniform pressure; uniform temperature field; buckling; critical load; critical geometrical parameter; shooting method