

不可压饱和多孔弹性杆动力响应的多辛方法*

刘雪梅^{1,2}, 邓子辰¹, 胡伟鹏¹

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

(2. 长安大学 工程力学系, 西安 710064)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 研究了不可压饱和多孔弹性杆的一维动力响应问题,基于多孔介质理论,在流相和固相微观不可压、固相骨架小变形的假定下,建立了不可压流体饱和多孔弹性杆一维轴向动力响应的数学模型,利用 Hamilton 空间体系的多辛理论,构造了不可压饱和多孔弹性杆轴向振动方程的多辛形式及其多种局部守恒律,采用中点 Box 离散方法得到轴向振动方程的多辛离散格式和局部能量守恒律以及局部动量守恒律的离散格式;数值模拟了不可压饱和多孔弹性杆的轴向振动过程,记录了每一时间步的局部能量数值误差和局部动量数值误差,结果表明,已构造的多辛离散格式具有很高的精确性和较长时间的数值稳定性,这为解决饱和多孔介质的动力响应问题提供了新的途径。

关键词: 饱和多孔弹性杆; 多辛方法; 动力响应; 离散

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.03.002

引言

近年来,随着饱和多孔介质在地震工程学、土力学、生物力学等领域的广泛应用,其相关理论和研究已经越来越多地引起学术界的重视和关注,尤其有关各类饱和多孔结构流固耦合动静力响应分析的研究更是取得了很大的成果.Theodorakopoulos 等^[1]研究了多孔弹性板的弯曲振动问题;Anke 等^[2]基于 Biot 理论,建立了饱和多孔弹性 Mindlin 板的动力学数学模型,并给出以挠度、转角和孔隙应力为基本未知量的虚功原理;杨骁等^[3]基于多孔介质理论,建立了饱和多孔弹性杆件弯曲变形时动力响应的数学模型,并利用 Laplace 变换,给出了饱和多孔悬臂梁弯曲时挠度、弯矩以及孔隙流体压力等效力偶等物理量随时间的响应曲线.然而,对于饱和多孔结构流固耦合动静力响应问题在数值求解过程中如何保持系统的局部能量守恒律和局部动量守恒律等多种局部几何性质,学术界却很少讨论.

众所周知,我国数学家 Feng(冯康)先生于上世纪八十年代提出了基于辛几何原理计算 Hamilton 系统的 Hamilton 辛算法^[4],这种算法有一个优于其它算法的重要特点,就是它可以对守恒量长时间数值模拟,但是当用辛算法对无限维 Hamilton 系统进行离散时就具有局限性,

* 收稿日期: 2014-12-02; 修订日期: 2014-12-26

基金项目: 国家自然科学基金(11372252;11172239;11372253);中央高校基金(2014G1121096)

作者简介: 刘雪梅(1980—),女,陕西榆林人,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: liumei112@163.com).

具体表现在守恒量是全局性的,为了克服这种局限性,Marsden 等^[5-6]和 Bridges 等^[7-8]从 Lagrange 系统和 Hamilton 系统出发,提出了多辛 Hamilton 系统和多辛算法的概念,将有限维的 Hamilton 系统推广到无限维 Hamilton 系统,使得偏微分方程在时间和空间方向上都有其各自的辛结构.更值得一提的是,多辛算法在数值求解过程中能够精确地保持系统的多辛结构及其局部能量守恒律和局部动量守恒律,因此这一保结构算法已经成为解决如何在数值求解过程中保持系统固有几何性质的有效途径^[9-10].

饱和和多孔弹性杆作为各类流固耦合多孔结构中最基础也是最重要的结构,对其动力学问题的研究尤为重要,它的研究将为多孔介质杆系结构、生物多孔介质、植物根茎等多种多孔介质结构的动力响应以及多孔介质波传播等问题提供有力的依据.因此,学术界对于饱和多孔弹性梁、杆的各类动力学问题已经有了一定的研究.杨骁等^[11]基于多孔介质理论和弹性梁的大挠度理论,在孔隙流体仅沿轴向扩散的假设下,考虑轴向变形,建立了微观不可压饱和多孔弹性梁大挠度弯曲变形的一维非线性数学模型,研究了两端可渗透的简支饱和多孔弹性梁在突加横向均布载荷作用下的拟静态弯曲问题.周凤玺、米海珍^[12]基于不可压多孔介质理论,考虑孔隙流体沿轴向扩散的情形,建立了弹性地基上含液饱和多孔弹性梁横向弯曲的数学模型,并利用 Fourier 级数展开法研究了两端简支且自由透水边界条件下多孔弹性梁的自由振动特性.欧阳煜、张雅男^[13]基于饱和多孔弹性 Timoshenko 梁的动力数学模型,研究了两端可渗透饱和多孔弹性 Timoshenko 简支梁在梁中点承受突加载荷作用下的动力响应,并给出了梁中点无量纲挠度、固相骨架弯矩和孔隙流体压力等效力偶等随无量纲时间的响应.然而,如何将多辛保结构算法这一强大的数值计算工具应用到饱和多孔弹性梁、杆的动力响应问题中,并从中得到系统的多个保结构性质却并没有在学术界得到广泛的涉足.正是基于这一点,本文试图通过多辛保结构算法寻求新的研究饱和多孔弹性杆动力响应的数值计算方法,并且从中揭示系统的多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律,从而为各类多孔结构动力响应的数值求解提供新的途径.

本文针对不可压饱和多孔弹性杆的动力响应问题,首先利用流固混合物动量方程、孔隙流体动量方程和流固两相的本构关系,推导出饱和多孔弹性杆一维轴向振动的数学模型;继而采用多辛保结构算法,构造饱和多孔弹性杆轴向振动的多辛形式及多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律等多种局部几何性质,并对其进行数值离散;最后数值模拟了不可压饱和多孔弹性杆的轴向振动过程和系统的各种局部守恒律数值误差.

1 不可压饱和多孔弹性杆动力响应的数学模型

为了研究不可压流体饱和多孔弹性杆的轴向振动,本文建立如下模型:设长为 L 、横截面高度为 H 的流体饱和多孔弹性杆由不相溶的微观不可压流相和微观不可压弹性多孔固相骨架组成,其侧表面不透水(如图 1).根据多孔介质理论,对于各向同性线弹性多孔固相骨架和无粘性流体,在两相不可压和固相小变形的假定下,忽略流相和固相的体积力、两相间的质量和能量交换,则不可压流体饱和多孔弹性杆的三维流固耦合动量方程、孔隙流体动量方程以及固相骨架的应变和本构方程^[3,14-15]可分别表示为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{\text{SE}} - \operatorname{grad} p - (\rho^{\text{S}} + \rho^{\text{F}}) \ddot{\boldsymbol{u}}^{\text{S}} - \rho^{\text{F}} \dot{\boldsymbol{w}}^{\text{F}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$n^{\text{F}} \operatorname{grad} p + \rho^{\text{F}} (\ddot{\boldsymbol{u}}^{\text{S}} + \dot{\boldsymbol{w}}^{\text{F}}) + S_v \boldsymbol{w}^{\text{F}} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{E}^{\text{S}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}^{\text{S}} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}^{\text{S}})^{\text{T}}), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{SE}} = 2\mu^{\text{S}}\mathbf{E}^{\text{S}} + \lambda^{\text{S}}(\mathbf{E}^{\text{S}} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}, \quad (4)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{SE}}$ 和 \mathbf{E}^{S} 分别为固相骨架的有效应力张量和应变张量, p 为有效孔隙水压力, ρ^{S} 和 ρ^{F} 分别为固相骨架和孔隙流体的宏观质量密度, n^{F} 和 S_p 分别为流相的体积分数和流固两相间的耦合系数, \mathbf{u}^{S} 为固相骨架的位移, \mathbf{w}^{F} 为孔隙流体相对固相骨架的速度, μ^{S} 和 λ^{S} 均为固相骨架的宏观 Lamé 常数.

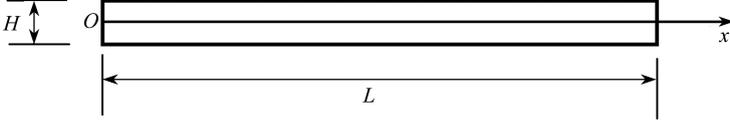


图 1 饱和多孔弹性杆的轴向振动

Fig. 1 Axial vibration of the saturated poroelastic rod

将固相应变和本构方程代入式(1)、(2), 场控制方程可进一步简化为

$$\begin{cases} (\lambda^{\text{S}} + \mu^{\text{S}}) \text{grad div } \mathbf{u}^{\text{S}} + \mu^{\text{S}} \text{div grad } \mathbf{u}^{\text{S}} - \text{grad } p - \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{S}} - \rho^{\text{F}} \dot{\mathbf{w}}^{\text{F}} = \mathbf{0}, \\ n^{\text{F}} \text{grad } p + \rho^{\text{F}} (\ddot{\mathbf{u}}^{\text{S}} + \dot{\mathbf{w}}^{\text{F}}) + S_p \mathbf{w}^{\text{F}} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

对于工程中的低渗透饱和和多孔介质, 可近似认为孔隙流体相对固相骨架无流动, 即上述控制方程中 $\mathbf{w}^{\text{F}} = \mathbf{0}$. 以下考虑低渗透饱和和多孔弹性杆的一维轴向振动问题, 可设 $\mathbf{u}^{\text{S}} = (u^{\text{S}}(x, t), 0, 0)$, $p = p(x, t)$, 则由式(5)可得饱和和多孔弹性杆一维轴向振动方程:

$$(\rho - \rho^{\text{F}}/n^{\text{F}}) \partial_{tt} u^{\text{S}} - (\lambda^{\text{S}} + 2\mu^{\text{S}}) \partial_{xx} u^{\text{S}} = 0, \quad (6)$$

其中记 $\rho = \rho^{\text{S}} + \rho^{\text{F}}$. 引入如下无量纲量和常量:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u^{\text{S}}}{H}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{\rho}^{\text{S}} = \frac{\rho^{\text{S}}}{\rho^{\text{S}} + \rho^{\text{F}}}, \quad \bar{\rho}^{\text{F}} = \frac{\rho^{\text{F}}}{\rho^{\text{S}} + \rho^{\text{F}}}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{T}, \quad T = \frac{H}{\sqrt{(\lambda^{\text{S}} + 2\mu^{\text{S}})/(\bar{\rho}^{\text{S}} + \bar{\rho}^{\text{F}})}}, \quad \lambda = \frac{H}{L}. \end{aligned}$$

同时令 $1 - \bar{\rho}^{\text{F}}/n^{\text{F}} = D$, 并为了书写方便仍用量纲形式的符号表示无量纲量和常量, 可得不可压饱和和多孔弹性杆轴向振动的无量纲振动方程:

$$D \partial_{\bar{t}\bar{t}} \bar{u} - \lambda^2 \partial_{\bar{x}\bar{x}} \bar{u} = 0. \quad (7)$$

2 不可压饱和和多孔弹性杆动力响应的多辛形式及其局部保结构性

对于饱和多孔弹性杆的轴向振动方程(7), 采用辛降阶的方法, 引入正交变换 $\partial_{\bar{t}} \bar{u} = w$, $\partial_{\bar{x}} \bar{u} = v$, 上述二阶偏微分控制方程(7)就可以转化为以下 Hamilton 体系下的一阶形式:

$$\mathbf{M} \partial_{\bar{t}} \mathbf{z} + \mathbf{K} \partial_{\bar{x}} \mathbf{z} = \nabla_{\mathbf{z}} S(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = [u, v, w]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

其中, Hamilton 函数为 $S(\mathbf{z}) = (\lambda^2 v^2 - Dw^2)/2$, 其系数矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

本文利用中点离散方法分别在空间方向和时间方向对多辛形式(8)进行差分离散, 联立这两个方向的离散结果得到中点 Box 格式:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}_{i+1/2}^{j+1} - \mathbf{z}_{i+1/2}^j)/\Delta t + \mathbf{K}(\mathbf{z}_{i+1}^{j+1/2} - \mathbf{z}_i^{j+1/2})/\Delta x = \nabla_{\mathbf{z}} S(\mathbf{z}_{i+1/2}^{j+1/2}), \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} z_i^{j+1/2} &= \frac{1}{2}(z_i^{j+1} + z_i^j), \quad z_{i+1/2}^j = \frac{1}{2}(z_{i+1}^j + z_i^j), \\ z_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{4}(z_{i+1}^{j+1} + z_{i+1}^j + z_i^{j+1} + z_i^j), \dots \end{aligned}$$

代入系数矩阵、状态变量及其 Hamilton 函数,得到多辛偏微分方程(8)的等价形式:

$$\begin{cases} D \frac{w_{i+1/2}^{j+1} - w_{i+1/2}^j}{\Delta t} - \lambda^2 \frac{v_{i+1}^{j+1/2} - v_i^{j+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \lambda^2 \frac{u_{i+1}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}}{\Delta x} = \lambda^2 v_{i+1/2}^{j+1/2}, \\ -D \frac{u_{i+1/2}^{j+1} - u_{i+1/2}^j}{\Delta t} = -D w_{i+1/2}^{j+1/2}. \end{cases} \quad (11)$$

众所周知,多辛算法可以很好地保持系统的固有几何性质,这也正是这一算法一直备受学术界关注的原因之一.对于本文研究的饱和多孔弹性杆轴向振动的一维问题,同样也可以考察其多辛算法的局部保结构性.首先,引入向量外积的计算,考察饱和多孔弹性杆一维轴向振动方程的多辛形式(8),可得其多辛守恒律为

$$\partial_t \omega + \partial_x k = 0, \quad (12)$$

其中 ω, k 为外积形式: $\omega = (dz \wedge Mdz)/2, k = (dz \wedge Kdz)/2$. 代入状态变量和相应的系数矩阵,可得无量纲轴向振动方程(7)的多辛守恒律具体形式为

$$\partial_t (Ddu \wedge dw) + \partial_x (\lambda^2 dv \wedge du) = 0. \quad (13)$$

对于多辛形式(8),亦可引入向量内积的计算,从而可得其多辛局部能量守恒律和多辛局部动量守恒律.分别记能量密度 $E(z) = S(z) - z^T K \partial_x z/2$, 能量通量 $F(z) = z^T K \partial_t z/2$, 则可得饱和多孔弹性杆轴向振动方程的多辛局部能量守恒律为

$$\partial_t E(z) + \partial_x F(z) = 0. \quad (14)$$

代入状态变量和系数矩阵,可得局部能量守恒律的具体表达式为

$$\partial_t \left[\frac{1}{2} (\lambda^2 v^2 - Dw^2) - \frac{1}{2} \lambda^2 (v \partial_x u - u \partial_x v) \right] + \frac{1}{2} \partial_x [\lambda^2 (v \partial_t u - u \partial_t v)] = 0. \quad (15)$$

同理,多辛形式(8)的局部动量守恒律可表述为

$$\partial_t I(z) + \partial_x G(z) = 0, \quad (16)$$

其中

$$I(z) = \frac{1}{2} z^T M \partial_x z, \quad G(z) = S(z) - \frac{1}{2} z^T M \partial_t z.$$

代入具体的状态变量和相应的系数矩阵,对于饱和多孔弹性杆的无量纲轴向振动方程(7),其多辛局部动量守恒律可具体表述为

$$\frac{D}{2} \partial_t (-w \partial_x u + u \partial_x w) + \partial_x \left[\frac{1}{2} (\lambda^2 v^2 - Dw^2) - \frac{1}{2} D (-w \partial_t u + u \partial_t w) \right] = 0. \quad (17)$$

3 数值实验及其分析

考虑如下初始条件和边界条件:

$$u(x, 0) = -0.12x^2 + 0.24x, \quad \partial_t u|_{t=0} = 0, \quad (18)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \partial_x u|_{x=1} = 0. \quad (19)$$

选取计算步长 $\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.5$, 参数 $\lambda^2 = 0.000 1, D = 0.15$ (也即 $n^F = 0.5, \rho^F = 0.425$) 和 $D = 0.08$ (也即 $n^F = 0.5, \rho^F = 0.46$), 在 $t \in [0, 100]$ 内, 得到饱和和多孔弹性杆在不同时刻下的固相位移随空间坐标的变化图(图 2 和图 3). 采用分离变量法, 可得无量纲偏微分方程(7)的定解问题(18)、(19)的精确解:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)\lambda\pi t}{2\sqrt{D}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}, \quad (20)$$

其中

$$A_n = 3.84 / ((2n+1)^3 \pi^3). \quad (21)$$

因此, 亦可得饱和和多孔弹性杆在不同时刻下固相位移的精确解随空间坐标的变化图(图 2 和图 3).

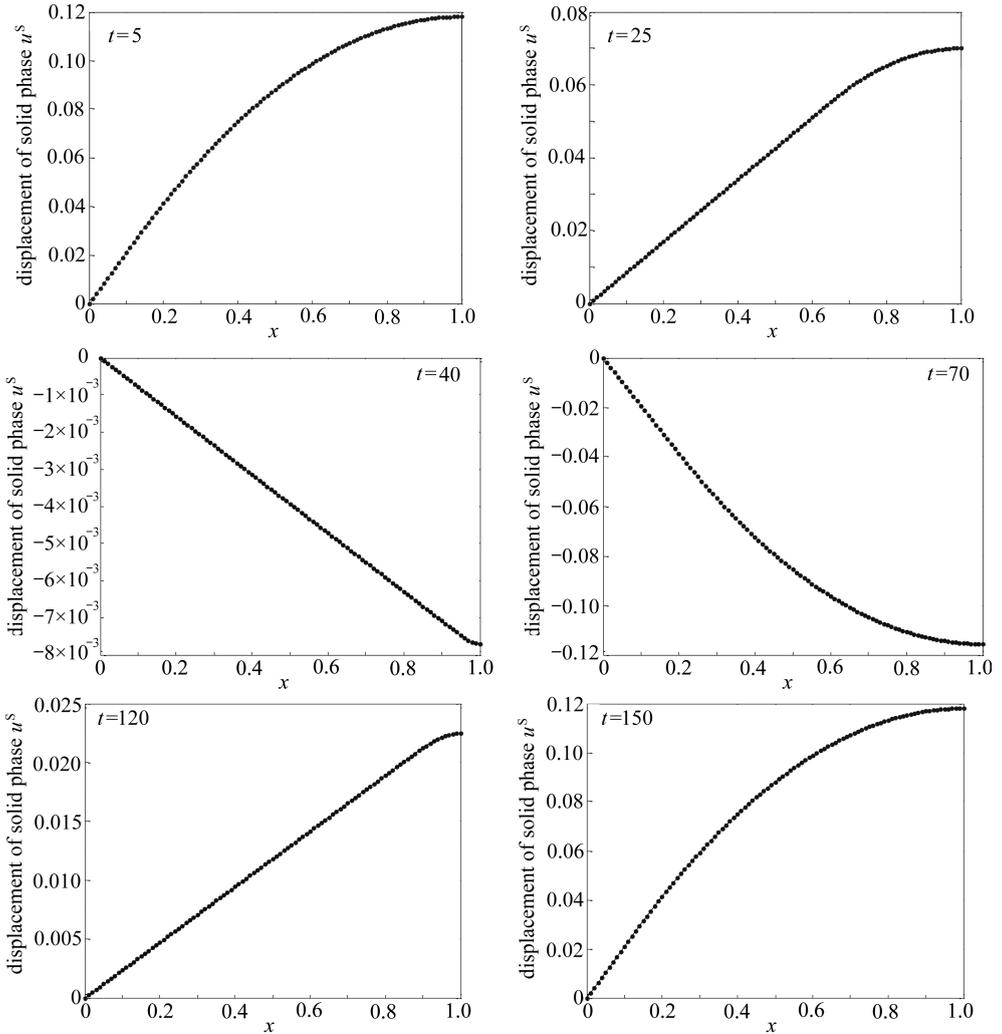


图 2 $D = 0.15$ 时不同时刻固相位移的数值解(点)与精确解(曲线)的比较

Fig. 2 Comparison between the numerical solution (dots) and the analytic solution (curve) of the solid phase displacement for $D = 0.15$ at different moments

图 2 反映了参数 D 取 0.15 时饱和和多孔弹性杆的轴向振动过程. 从图中可以看出: 杆在无量纲时间约为 40 时第一次回到平衡位置, 约 $t = 70$ 时其第二个 $1/4$ 振动周期结束, 无量纲时间

约为 120 时杆又一次振动接近平衡位置,整个振动过程的周期约为无量纲时间 150.图 3 亦反映了饱和多孔弹性杆的轴向振动过程,此时参数 $D = 0.08$.可以看到: $t = 60$ 时杆已完成第二个 $1/4$ 周期的振动, $t = 80$ 时杆第二次接近平衡位置,整个振动过程均比 $D = 0.15$ 时加快,振动周期亦缩短至无量纲时间 110.比较图 2 和图 3 可知,随着参数 D 的减小,杆的振动周期缩短;同时可以看到,不论参数 D 如何选取,饱和多孔弹性杆轴向振动过程中固相位移场的数值解与精确解均非常吻合.图 4 给出了杆自由端位移随时间的变化规律,从图中可以看出其自由振动的周期将随参数 D 的增大而增加,其位移的数值解与精确解亦非常吻合.

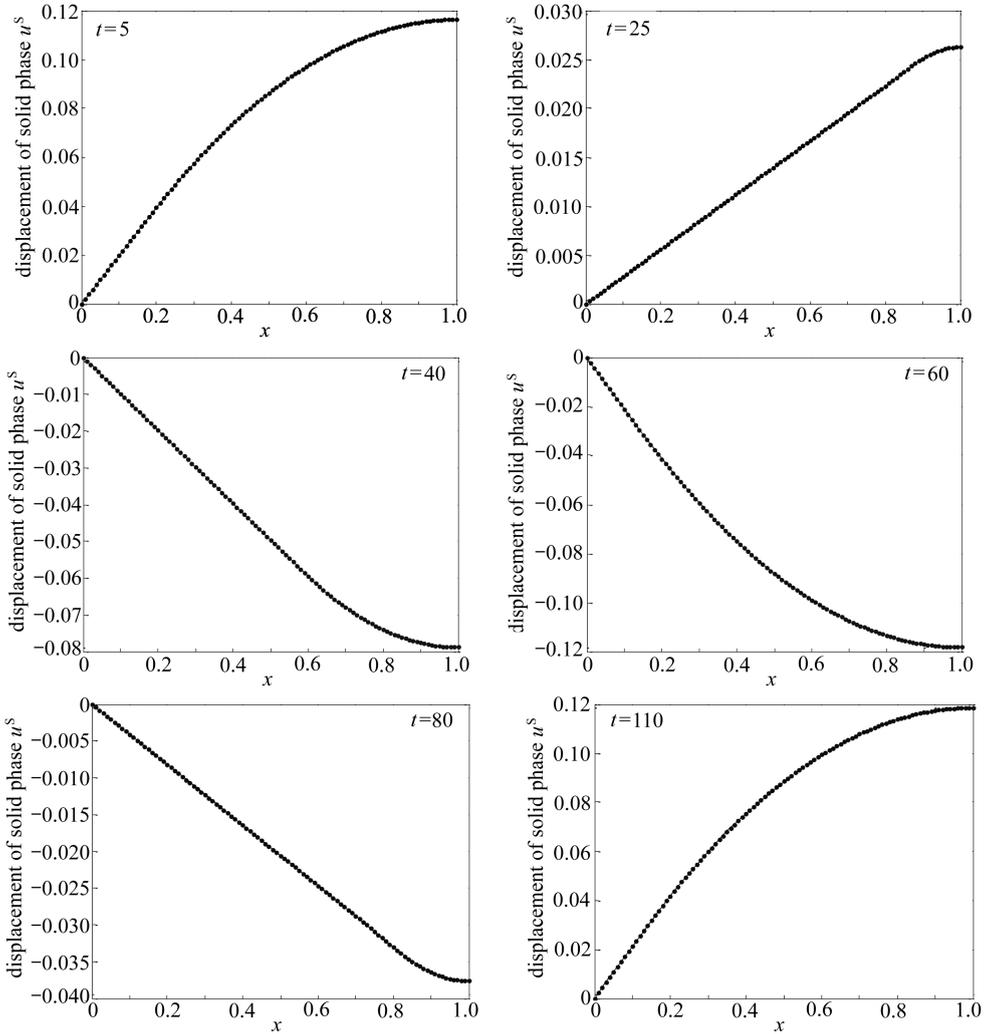


图 3 $D = 0.08$ 时不同时刻固相位移的数值解(点)与精确解(曲线)的比较

Fig. 3 Comparison between the numerical solution (dots) and the analytic solution (curve) of the solid phase displacement for $D = 0.08$ at different moments

为了进一步验证多辛格式(8)的局部保结构性,本文将无量纲模拟时间延长至 500,并取参数 $D = 0.08$,在模拟过程中记录每一时间步的局部能量误差和局部动量误差,得到系统局部能量数值误差和局部动量数值误差在时间和空间坐标下的三维曲线图(图 5).图中局部能量数值误差和局部动量数值误差分别采用 (x, t) 平面内的围线积分式(22)和(23)^[9]:

$$\Delta_e = \int_{x=0}^{m\Delta x} [E(z(x, n\Delta t)) - E(z(x, 0))] dx + \int_{t=0}^{n\Delta t} [F(z(m\Delta x, t)) - F(z(0, t))] dt, \quad (22)$$

$$\Delta_d = \int_{x=0}^{m\Delta x} [I(z(x, n\Delta t)) - I(z(x, 0))] dx + \int_{t=0}^{n\Delta t} [G(z(m\Delta x, t)) - G(z(0, t))] dt. \quad (23)$$

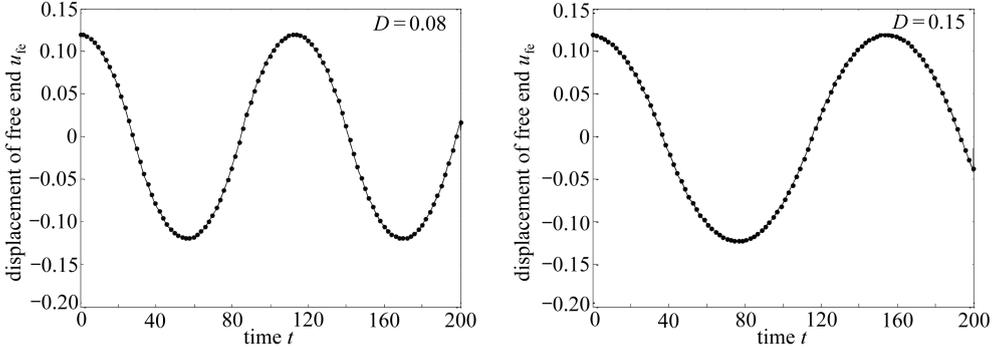


图4 $D = 0.08$ 和 $D = 0.15$ 时杆自由端位移的变化规律(数值解(点)、精确解(线))

Fig. 4 The numerical solution (dots) and the analytic solution (line) of the free end displacement for $D = 0.08$ and $D = 0.15$

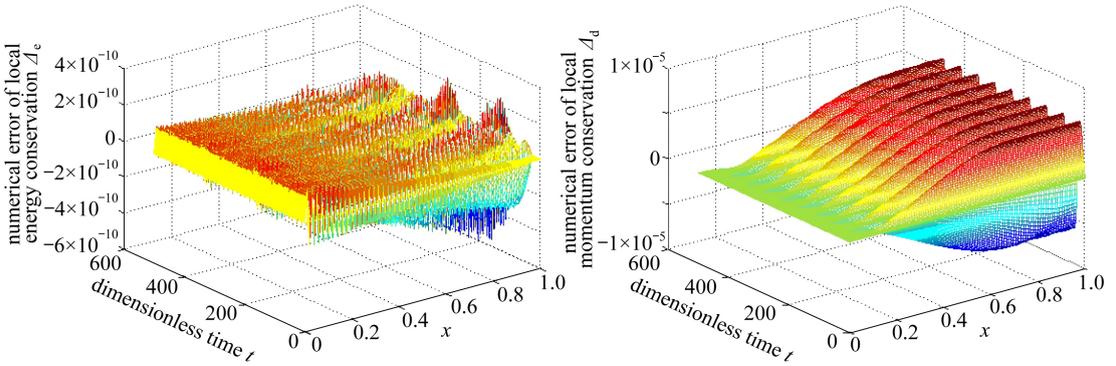


图5 $D = 0.08$ 时局部能量误差与局部动量误差

Fig. 5 The numerical errors of local energy conservation and local momentum conservation for $D = 0.08$

从图5中可以看出,随着时间的推移,局部能量误差在空间方向上的波动幅值逐渐减小,逐渐接近于0,并且整个时空区域内局部能量误差的数量级均在 10^{-10} ;通过局部动量误差的三维曲线图可得,局部动量误差在时间方向上呈周期分布,周期约为无量纲时间50,在空间方向上,在 x 接近于0的位置局部动量误差为0,随着 x 的增大,局部动量误差逐渐增大,最后趋于一个稳定值,同时在整个时空区域内局部动量误差的数量级均为 10^{-5} 。

为了得到局部能量数值误差和局部动量数值误差关于时间的函数图,本文在固定的空间区域 $[0, 1]$ 和时间区域 $[0, t]$ (其中 $t \geq 0$,且 $t \in [0, 500]$)内分别对离散局部能量误差和离散局部动量误差求和^[9],从而得到局部能量数值误差和局部动量数值误差关于时间 $t \in [0, 500]$ 内的函数图(图6和图7)。图6中取参数 $D = 0.08$,从此图中可以看出,初始时刻局部能量误差值为0,之后其值随时间的推移而增大,但数量级均在 10^{-6} 以下;局部动量数值误差在初始时

刻亦为0,之后呈周期性分布,并且这种周期性分布不随时间的推移而变化,其数量级均在 10^{-2} 以下.图7中 $D = 0.12$,通过此图易知,局部能量误差也随时间的推移而增大,其数量级均在 10^{-7} 以下;局部动量误差亦呈周期性分布,数量级均在 10^{-2} 以下.其次,通过对图6和图7结果的比较可知,随着参数 D 的取值增大,相同时刻下局部能量数值误差减小,而局部动量数值误差将增大.同时,从以上两图反映的结果可以看出:整个模拟过程中,局部能量数值误差和局部动量数值误差均在 10^{-2} 数量级以下,这说明本文构造的多辛算法能够很好地模拟系统的轴向振动过程,从而保持了系统的固有几何性质.

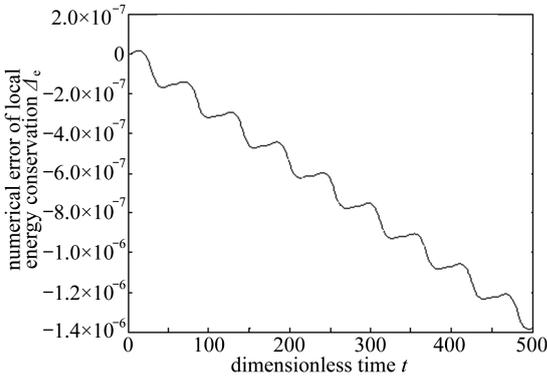


图6 $D = 0.08$ 时局部能量误差与局部动量误差随时间变化的函数图

Fig. 6 The numerical errors of local energy conservation and local momentum conservation changing with dimensionless time t for $D = 0.08$

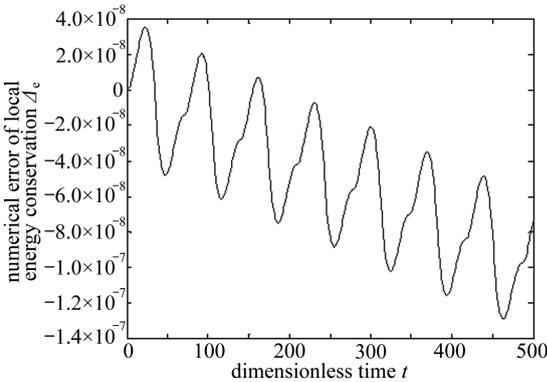
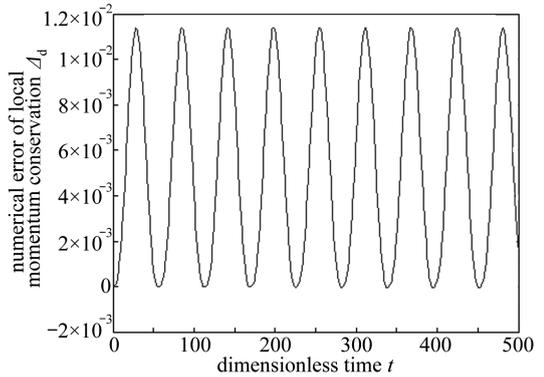
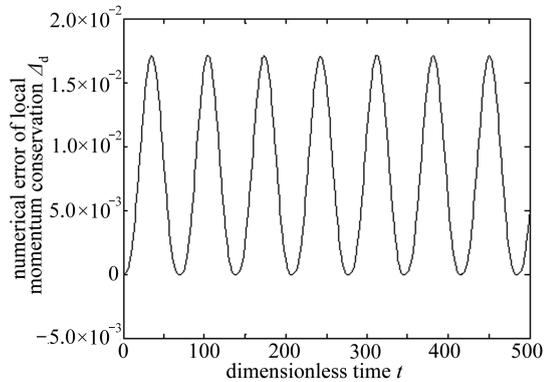


图7 $D = 0.12$ 时局部能量误差与局部动量误差随时间变化的函数图

Fig. 7 The numerical errors of local energy conservation and local momentum conservation vs. dimensionless time t for $D = 0.12$



4 结 论

本文通过采用多辛保结构算法研究了饱和和多孔弹性杆的动力响应问题,构造了其轴向振动方程的多辛形式和多辛守恒律、局部能量守恒律以及局部动量守恒律等多种局部几何性质,并且采用中点离散方法离散其多辛形式.在此基础上,数值考察了不可压饱和和多孔弹性杆的一维轴向振动过程,得到振动过程随不同参数值的变化规律,并将位移场的数值结果与精确解进行比较;继而数值考察了一段长时间内的局部能量数值误差和局部动量数值误差,得到局部能量误差和局部动量误差随时间空间两个方向变化的三维曲线图以及其仅在时间方向变化的平

面图.通过以上研究,可得如下结论:

- 1) 本文构造的多辛格式能够很好地模拟不可压饱和和多孔弹性杆的轴向振动过程,在参数取值不同的情况下,数值解与精确解均非常吻合,这充分显示出了多辛保结构算法的精确性;
- 2) 在局部能量数值误差和局部动量数值误差的三维曲线图和平面图中,其误差值均保持在极小的数量级以下,这说明本文构造的多辛格式能够很好地保持系统固有的几何性质,并且具有良好的长时间数值稳定性.

参考文献(References):

- [1] Theodorakopoulos D D, Niskos D E. Flexural vibrations of poroelastic plate[J]. *Acta Mech*, 1994, **103**(1/4): 191-203.
- [2] Anke B, Martin S, Heinz A. A poroelastic Mindlin-plate[J]. *Proc Appl Math Mech*, 2003, **3**(1): 260-261.
- [3] 杨骁, 李丽. 不可压饱和和多孔弹性梁、杆动力响应的数学模型[J]. 固体力学学报, 2006, **27**(2): 159-166. (YANG Xiao, LI Li. Mathematical model for dynamics of incompressible saturated poroelastic beam and rod[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, **27**(2): 159-166. (in Chinese))
- [4] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on D D*. Beijing: Science Press, 1984: 42-58.
- [5] Marsden J E, Patriek G P, Shkoller S. Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs[J]. *Comm Math Phys*, 1998, **199**(2): 351-395.
- [6] Marsden J E, Patriek G P, Shkoller S. Variational methods, multisymplectic geometry and mechanics[J]. *J Geom Phys*, 2001, **38**(2): 253-284.
- [7] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1997, **121**(1): 147-190.
- [8] Bridges T J, Reich S. Multi-symplectic integrator: numerical schemes for Hamiltonian PDE that conserve symplecticity[J]. *Physics Letters A*, 2001, **284**(4/5): 184-193.
- [9] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations [J]. *J Comput Phys*, 1999, **157**(2): 473-499.
- [10] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. 膜自由振动的多辛方法[J]. 应用数学和力学, 2008, **28**(9): 1054-1062. (HU Wei-peng, DENG Zi-chen, LI Wen-cheng. Multi-symplectic methods for membrane free vibration equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **28**(9): 1054-1062. (in Chinese))
- [11] 杨骁, 李丽. 轴向扩散下简支饱和和多孔弹性梁的大挠度分析[J]. 固体力学学报, 2007, **28**(3): 313-317. (YANG Xiao, LI Li. Larger deflection analysis of simply supported saturated poroelastic beam[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, **28**(3): 313-317. (in Chinese))
- [12] 周凤玺, 米海珍. 弹性地基上不可压含液饱和和多孔弹性梁的自由振动[J]. 兰州理工大学学报, 2014, **40**(2): 118-122. (ZHOU Feng-xi, MI Hai-zhen. Free vibration of poroelastic beam with incompressible saturated liquid on elastic foundation[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2014, **40**(2): 118-122. (in Chinese))
- [13] 欧阳煜, 张雅男. 集中荷载作用下饱和多孔 Timoshenko 简支梁的动力学响应[J]. 工程力学, 2012, **29**(11): 325-331. (OUYANG Yu, ZHANG Ya-nan. Dynamical behavior of simply-supported saturated poroelastic Timoshenko beam under a concentrated load[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(11): 325-331. (in Chinese))

- [14] YANG Xiao. Gurtin-type variational principles for dynamics of a non-local thermal equilibrium saturated porous medium[J]. *Acta Mech Solida Sin*, 2005, **18**(1): 37-45.
- [15] 杨骁, 程昌钧. 流体饱和和多孔介质的动力学 Gurtin 型变分原理和有限元模拟[J]. 固体力学学报, 2003, **24**(3): 267-276. (YANG Xiao, CHENG Chang-jun. Gurtin variational principle and finite element simulation for dynamical problems of fluid-saturated porous media[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, **24**(3): 267-276. (in Chinese))

A Multi-Symplectic Method for Dynamic Responses of Incompressible Saturated Poroelastic Rods

LIU Xue-mei^{1,2}, DENG Zi-chen¹, HU Wei-peng¹

(1. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)*

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Dynamic responses of incompressible saturated poroelastic rods were investigated. Based on the theory of porous media, the 1D axial vibration equation for a fluid saturated elastic porous rod was established, in which the saturated porous material was modeled as a 2-phase system composed of an incompressible solid phase and an incompressible fluid phase. Then a 1st-order multi-symplectic form for the axial vibration equation and several local conservation laws for the saturated poroelastic rod were derived with the multi-symplectic method. Moreover, the midpoint Box multi-symplectic scheme for the axial vibration equation, and the discrete schemes for the local energy conservation law and local momentum conservation law were constructed with the midpoint method. Finally, the axial vibration process of the incompressible saturated poroelastic rod was simulated numerically and numerical errors of the local energy conservation law and local momentum conservation law were also discussed by means of the numerical results of each time step and each time-space step, respectively. The results show that the proposed multi-symplectic scheme has advantages of high accuracy, long-time numerical stability and good conservation properties, and this method provides a new way to solve the dynamic responses of saturated porous media.

Key words: saturated poroelastic rod; multi-symplectic method; dynamic response; discrete

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11372252; 11172239; 11372253)