

热荷载作用下薄板的优化设计*

倪晓琴, 程耿东

(大连理工大学 工程力学系;工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(本刊编委程耿东来稿)

摘要: 板壳结构是一大类广泛使用的结构元件.在热荷载作用下,当热膨胀受到约束时,板壳结构产生内力及挠度,严重时影响结构的正常服役.由于热荷载的特殊性,简单地均匀加大板壳结构的厚度并不能有效地减少热变形和热应力,热结构设计因此特别困难.该文研究在给定材料体积的条件下,通过优化板壳结构的厚度分布来减少弹性薄板结构在热荷载下的变形.以结构的变形能为优化目标,在给定材料体积的条件下,建立了设计板壳结构厚度分布的优化问题列式,并采用变分法,推导出优化准则,给出了修改厚度的迭代公式.应用商用有限元软件的热结构分析功能,对程序进行二次开发,从而实现该优化算法.算例结果表明,采用该方法优化弹性薄板的厚度分布,可以大幅度地减小结构热变形,是一种有效的热结构设计方法.

关键词: 薄板; 热荷载; 厚度; 优化准则

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.03.001

引 言

板壳热问题在应用中随处可见,例如:在高温下工作的发动机气缸、散热器管道、超音速飞行器燃烧室,以及穿过大气层时的火箭外壁等等.在很多结构中,热荷载所产生的应力和变形都不可忽视.由于材料的热胀冷缩,不受几何约束的板壳结构受热,便会自由膨胀,如果热荷载分布不均匀或者边界条件限制了热膨胀,结构内部就会产生热应力及热变形,影响结构的正常使用.

上世纪70年代,结构优化领域的一个研究热点是受到外力作用的弹性薄板结构的最优设计,研究在给定材料体积及中面形状的条件下,寻求板的厚度分布使结构柔顺度最小.文献[1-3]由变分原理出发,导出优化准则,构造了求解板的厚度的迭代格式.然而这一研究只考虑机械荷载,而热荷载和机械荷载有差别,处理板壳热优化问题有特殊的困难.在工程应用中,板壳热优化通常采用多层复合材料结构^[4-5]形式解决,而本文研究单一材料,通过改变板壳结构厚度分布来减小结构热变形.

热结构优化研究中,很多工作将结构柔顺性作为目标函数^[6-9].深入的分析表明,对于热弹性问题,这一目标函数存在异议.对于热弹性问题的优化设计,文献[10-11]对其目标函数的选

* 收稿日期: 2014-11-11; 修订日期: 2015-01-07

作者简介: 倪晓琴(1988—),女,山东人,硕士生(通讯作者. E-mail: nixiaoqin@mail.dlut.edu.cn);
程耿东(1941—),男,江苏人,中科院院士,博士生导师(E-mail: chenggd@dlut.edu.cn).

取进行了探讨.Zhang(张卫红)等^[10,12]用弹性应变能为目标函数进行优化设计;Li等^[13]以离散单元厚度为变量,提出基于均匀温度场下位移的灵敏度使位移最小化的渐近结构优化方法;Pedersen等^[11,14]提出最大化结构强度的优化方法.本文采用结构的应变能为目标函数.

本文研究材料体积给定、边界受约束的弹性矩形薄板,以结构的应变能为目标函数,推导出在热荷载条件下减少结构应变能的优化准则,并以温度沿薄板厚度线性变化的热荷载为例,基于优化准则给出厚度迭代公式.算例表明该优化准则可以有效地降低弹性薄板的挠度.

1 薄板结构变温分析^[15]

考虑受到热载荷的弹性矩形薄板,薄板的材料常数、材料体积和温度荷载已知.板的中面区域 Ω 以及边界条件也已知,在矩形板中面内建立直角坐标系 Oxy ,板厚度方向坐标 z 由 $-h/2$ 到 $h/2$.根据薄板小挠度理论,当温度改变时,薄板中任意一点的物理方程为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \quad (1)$$

其中 E 是弹性模量, ν 是Poisson(泊松)比, α 是线膨胀系数, $T = T(x, y, z)$ 是薄板中任意一点的变温.

薄板小挠度弯曲问题的应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 用挠度 w 表示如下:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

通过式(1)与(2),得到板内任意点的应力:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

对上述3种应力在薄板厚度方向上进行积分,在截面每单位宽度上,应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 合成为弯矩及扭矩, M_x, M_y, M_{xy}, M_T 与挠度 w 的关系如下:

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - M_T, \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - M_T, \\ M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $D = \frac{Eh^3(x, y)}{12(1-\nu^2)}$ 称为板的抗弯刚度, $M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} Tz dz$ 称为变温的等效弯矩,它是 x 和 y 的函数,依赖于温度在板平面内及厚度方向的分布,也依赖于板的厚度在板平面内的分布.

用弯矩、扭矩及荷载表示的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0, \quad (5)$$

其中 q 为作用于板表面的机械荷载,假定没有机械荷载作用,取 $q = 0$ 并将式(4)代入上式,得

到薄板在变温作用下的弹性曲面微分方程:

$$(Dw_{xx})_{xx} + (Dw_{yy})_{yy} + \nu(Dw_{yy})_{xx} + \nu(Dw_{xx})_{yy} + 2(1 - \nu)(Dw_{xy})_{xy} = -\nabla^2 M_T, \quad (6)$$

$-\nabla^2 M_T$ 称为变温的等效横向荷载.

薄板边界条件可以参考一般的薄板理论.这里限于考虑齐次边界条件,即边界上没有外力、外弯矩;固定边、简支边及自由边都是齐次边界条件,它们可以分别表示如下:

1) 固定边 若沿 x 轴的边是固定的,即挠度与转角均为 0,于是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0; \quad (7a, b)$$

2) 简支边 若沿 x 轴的边是简支边,即挠度与弯矩为 0,于是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad M_y = \left(-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - M_T\right)_{y=0} = 0; \quad (7c, d)$$

3) 自由边 若 $x = a$ 边为自由边,则弯矩与剪力均为 0,于是

$$\begin{cases} M_x = \left(-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - M_T\right)_{x=a} = 0, \\ F'_{Sx} = \left(-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\partial M_T}{\partial x}\right)_{x=a} = 0. \end{cases} \quad (7e, f)$$

2 优化问题列式

本文研究在给定材料体积的条件下受到热荷载的弹性薄板的优化设计,目标是通过板壳结构的截面厚度分布来减少弹性薄板结构的挠度.

对于只有机械荷载作用的薄板弯曲问题,通常将优化目标取为结构的柔顺性:

$$C = \int_{\Omega} q w dx dy. \quad (8)$$

当机械荷载是集中力时, C 正比于集中力作用点处板的挠度,最小化柔顺性等同于最小化薄板的挠度,也等同于最大化板的刚度.当机械荷载是均布荷载时,最小化柔顺性等同于最小化板的平均挠度.采用柔顺性式(8)作为目标函数有很多优点,它是一个标量,以式(8)为目标函数的优化问题是一个单目标的自共轭问题,其灵敏度很容易求得.由于这些优点,热结构优化研究中,很多工作将热荷载等效为机械荷载,再采用式(8)作为目标函数.深入地分析表明,这一目标函数缺乏明确物理意义,得到的薄板设计并不能有效地降低挠度,因此本文探讨采用其它更合适的目标函数.

为了最小化薄板的热变形,有两个目标函数可供选择.一是直接采用薄板每个节点上的位移作为优化目标函数,导致多目标优化;二是采用结构的应变能作为目标函数,后者是个标量.本文将以最小化结构应变能进行优化设计.下面的推导和算例将说明,这一选择的确能使我们构造简单的迭代格式,并有效地降低薄板的挠度.

在薄板的小挠度弯曲问题中,结构内储存的应变能有以下 3 种表达形式:

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz, \quad (9a)$$

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2E} \iiint (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1 + \nu) \tau_{xy}^2) dx dy dz, \quad (9b)$$

$$V_{\varepsilon} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \iiint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2}(1 - \nu) \gamma_{xy}^2 \right) dx dy dz. \quad (9c)$$

对于只受机械荷载的薄板,这3种表达式都是相等的.对于有温度荷载的情况,上面3种应变能的表达式不相同.设想几何不受约束的结构受到均匀热荷载,发生自由膨胀,此时,应变不为0,但结构内应力为0,表达式(9a)、(9b)为0,式(9c)不为0;再设想板的上下表面温度相同,此时板内虽然有应力,但不发生弯曲应变和挠度,式(9a)、(9c)都为0,式(9b)不为0.由于我们更关心板的变形,则选用式(9c).在即使有温度荷载的条件下,式(9c)也可写成如下用挠度 w 表示的表达式:

$$V_\varepsilon = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint \Omega z^2 \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz = \\ \frac{1}{2} \iint \Omega D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (10)$$

以结构的变形能为目标,在满足给定材料体积的条件下最优的厚度分布 $h(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ 的优化问题列式如下:

$$\begin{aligned} \text{find } & h(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \text{min } & \Phi \\ \text{s.t. } & L(h(x, y), w(x, y)) = -\nabla^2 M_T, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\iint \Omega h(x, y) d\Omega = V, \quad (11b)$$

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max}, \quad (11c)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint \Omega D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (12)$$

$$L(h(x, y), w(x, y)) = (Dw_{xx})_{xx} + (Dw_{yy})_{yy} + \nu(Dw_{yy})_{xx} + \nu(Dw_{xx})_{yy} + 2(1-\nu)(Dw_{xy})_{xy}. \quad (13)$$

公式中包含了厚度分布的上下界限限制, $h(x, y)$ 的不等式约束可通过引入松弛变量 $\sigma(x, y)$ 和 $\tau(x, y)$ 改为等式约束:

$$h_{\min} - h(x, y) + \sigma^2(x, y) = 0, \quad h(x, y) - h_{\max} + \tau^2(x, y) = 0. \quad (14)$$

上面的公式适用于任何形状的板.下面引入中面区域为 $\Omega = \Omega((x, y) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b)$ 的矩形板,边界条件为以下之一:简支、固支或自由.

3 优化准则和迭代格式

为通过变分方法解决此问题,引入 Lagrange(拉格朗日)乘子 $\eta(x, y)$, λ , $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ 并构建一个增广泛函:

$$\begin{aligned} \pi^* = & \Phi + \iint \Omega \eta(x, y) [L(h(x, y), w(x, y)) + \nabla^2 M_T] dx dy + \\ & \lambda \left[\iint \Omega h(x, y) dx dy - V \right] + \iint \Omega \alpha(x, y) [h_{\min} - h(x, y) + \sigma^2(x, y)] dx dy + \\ & \iint \Omega \beta(x, y) [h(x, y) - h_{\max} + \tau^2(x, y)] dx dy. \end{aligned} \quad (15)$$

上式取驻值的必要条件是

$$\begin{aligned} \delta \pi^* = & \delta_{h(x, y)} \pi^* + \delta_{\eta(x, y)} \pi^* + \delta_{w(x, y)} \pi^* + \delta_{\alpha(x, y)} \pi^* + \\ & \delta_{\beta(x, y)} \pi^* + \delta_{\lambda} \pi^* + \delta_{\sigma(x, y)} \pi^* + \delta_{\tau(x, y)} \pi^* = 0, \end{aligned}$$

对于任意的 $\delta h(x, y), \delta \eta(x, y), \delta w(x, y), \delta \alpha(x, y), \delta \beta(x, y), \delta \lambda, \delta \sigma(x, y), \delta \tau(x, y)$ 均成立。

在这些条件中, $\delta_{\eta(x, y)} \pi^* = \delta_{\alpha(x, y)} \pi^* = \delta_{\beta(x, y)} \pi^* = \delta_{\lambda} \pi^* = 0$ 再次分别得出薄板控制方程, 厚度约束条件(14)和材料体积约束(11b)。而 $\delta_{\sigma(x, y)} \pi^* = \delta_{\tau(x, y)} \pi^* = 0$ 得出互补条件:

$$\alpha(x, y)\sigma(x, y) = 0, \beta(x, y)\tau(x, y) = 0. \quad (16)$$

与约束条件(14)一起得出下面3种情况:

1) 对于厚度约束非主动区域 Ω_u ,

$$h_{\min} < h(x, y) < h_{\max}, \alpha(x, y) = \beta(x, y) = 0; \quad (17)$$

2) 对于子域 Ω_{\max} , 厚度受上限约束, 有

$$h(x, y) = h_{\max}, \alpha(x, y) = 0, \beta(x, y) \neq 0; \quad (18)$$

3) 对于子域 Ω_{\min} , 厚度受下限约束, 有

$$h(x, y) = h_{\min}, \alpha(x, y) \neq 0, \beta(x, y) = 0, \quad (19)$$

其中 $\Omega = \Omega_{\max} \cup \Omega_{\min} \cup \Omega_u$ 。

根据增广泛函 π^* 取驻值的必要条件: 泛函 π^* 对 $w(x, y)$ 的变分 $\delta_{w(x, y)} \pi^* = 0$, 则有 $w(x, y) = -\eta(x, y)$ 。将 $w(x, y) = -\eta(x, y)$ 代入泛函 π^* 取驻值的必要条件: 对设计变量 $h(x, y)$ 的变分 $\delta_{h(x, y)} \pi^* = 0$, 得到如下的优化条件:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial h} ((w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + 2(1 - \nu)(w_{xy})^2) + \\ \frac{\partial M_T}{\partial h} (w_{xx} + w_{yy}) = \lambda - \alpha(x, y) + \beta(x, y). \end{aligned} \quad (20)$$

在厚度约束非主动区域 $\Omega_u, \alpha(x, y) = \beta(x, y) = 0$, 优化条件为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial h} ((w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + 2(1 - \nu)(w_{xy})^2) + \\ \frac{\partial M_T}{\partial h} (w_{xx} + w_{yy}) = \lambda^*, \end{aligned} \quad (21)$$

其中 λ^* 为常数。

相比挠度的偏微分, 单位长度截面内的弯矩与扭矩更便于在商业软件中输出, 故利用式(4)将优化条件用弯矩与扭矩表示:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^4} (M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1 + \nu) M_{xy}^2 + 2(1 - \nu) M_T (M_x + M_y + M_T)) - \\ \frac{\alpha E}{6h^2} (T' - T'') (M_x + M_y + 2M_T) = \lambda^* - \alpha^*(x, y) + \beta^*(x, y). \end{aligned} \quad (22)$$

在工程实际问题中, 通常都假定薄板的变温 T 沿板厚度方向是线性变化的, 即 $T = (T' + T'')/2 - (T'' - T')z/h$, (T' 及 T'' 分别是薄板下表面及上表面的温度), 则式(22)改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^4} (M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1 + \nu) M_{xy}^2) - \\ \frac{E^2 \alpha^2}{72(1 - \nu)} (T' - T'')^2 = \lambda^* - \alpha^*(x, y) + \beta^*(x, y). \end{aligned}$$

在下面的讨论中, 假定上下表面的温差 $T' - T''$ 为不依赖于 x, y 的常数, 上式简化为

$$\frac{1}{h^4} (M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1 + \nu) M_{xy}^2) = \lambda^* - \alpha^*(x, y) + \beta^*(x, y). \quad (23)$$

设 $g(x, y) = M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1 + \nu)M_{xy}^2$, 通过转化, 优化条件可重新写为

$$h(x, y) = \begin{cases} h_{\max}, & \text{if } \left(\frac{g}{\lambda^*}\right)^{1/4} \geq h_{\max}, (x, y) \in \Omega_{\max}, \\ \left(\frac{g}{\lambda^*}\right)^{1/4}, & \text{if } h_{\min} < \left(\frac{g}{\lambda^*}\right)^{1/4} < h_{\max}, (x, y) \in \Omega_u, \\ h_{\min}, & \text{if } h_{\min} \geq \left(\frac{g}{\lambda^*}\right)^{1/4}, (x, y) \in \Omega_{\min}. \end{cases} \quad (24)$$

因为不知道薄板中面区域划分及 Lagrange 乘子 λ^* , 上式不能直接求出 $h(x, y)$. 应用如下迭代形式:

$$h^{i+1}(x, y) = \begin{cases} h_{\max}, & \text{if } \left(\frac{g^i}{\lambda^*}\right)^{1/4} \geq h_{\max}, (x, y) \in \Omega_{\max}, \\ \left(\frac{g^i}{\lambda^*}\right)^{1/4}, & \text{if } h_{\min} < \left(\frac{g^i}{\lambda^*}\right)^{1/4} < h_{\max}, (x, y) \in \Omega_u, \\ h_{\min}, & \text{if } h_{\min} \geq \left(\frac{g^i}{\lambda^*}\right)^{1/4}, (x, y) \in \Omega_{\min}. \end{cases} \quad (25)$$

将式(24)代入体积限制条件(11b)解出 λ^* :

$$\lambda^* = \left[\frac{\int_{\Omega_u} g^i(x, y)^{1/4} dx dy}{V - h_{\min} \int_{\Omega_{\min}} dx dy - h_{\max} \int_{\Omega_{\max}} dx dy} \right]^4. \quad (26)$$

因为中面区域的划分需要先确定 $h^{i+1}(x, y)$ 的值, 故本优化方法需要应用内迭代来决定 $h^{i+1}(x, y)$ 和 λ^* .

根据上述方程, 构建迭代公式改进薄板厚度分布, 迭代格式如下:

- 1) 设定一个合理的初始厚度分布 $h^0(x, y)$, $i = 0$;
- 2) 对于厚度分布为 $h^i(x, y)$ 的板进行结构分析, 得到挠度 $w^i(x, y)$ 及弯矩;
- 3) 由 $h^i(x, y)$ 和 $w^i(x, y)$, 根据优化条件, 应用递推公式得到 $h^{i+1}(x, y)$;
- 4) 检查是否满足收敛准则, 如果不收敛, $i = i + 1$, 返回 2), 如果收敛, 停止迭代最优厚度分布 $h_{\text{opt}}(x, y) = h^{i+1}(x, y)$.

4 算 例

本文采用 ABAQUS 软件与 Python 语言进行二次开发, 选取两个算例应用式(25)进行优化分析.

4.1 四边简支薄板

一个 1 000 mm×1 000 mm 方形薄板, 厚度 25 mm, 材料弹性模量 $E = 180$ GPa, Poisson 比 $\nu = 0.35$, 线膨胀系数 $\alpha = 1.66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. 薄板四边简支, 沿薄板厚度方向有线性温度分布, z 轴正向表面温度为 100 $^\circ\text{C}$, 负向表面温度为 -20 $^\circ\text{C}$. 2 500 个网格, 采用 S4R 单元. 模型示意图如图 1.

设定优化厚度限制为 $h_{\min} = 15$ mm, $h_{\max} = 80$ mm, 保持薄板中面形状不变, 收敛条件为相邻两次迭代所有单元厚度之差的和 ≤ 1 mm. 优化后的厚度分布如图 2 所示, 在薄板四角处厚度增大, 其余部分厚度为最小厚度 15 mm. 优化后薄板的最大挠度由 8.141 mm 降低到 3.498

mm,减小了 57.1%,优化效果明显.

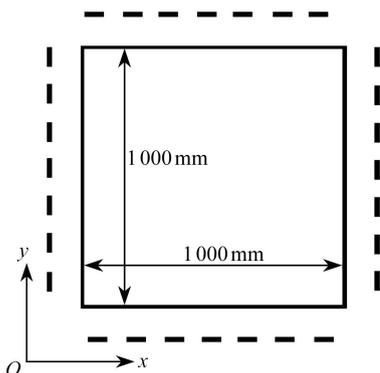


图 1 四边简支板

Fig. 1 A rectangular simply supported plate

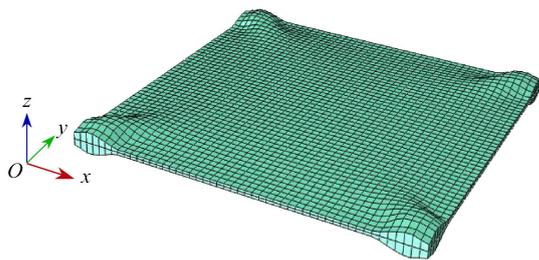


图 2 优化后厚度分布图

Fig. 2 The thickness distribution after optimization

4.2 三边简支,一边自由薄板

一个 1 000 mm×500 mm 方形薄板,厚度 20 mm.材料弹性模量 $E = 215 \text{ GPa}$,Poisson 比 $\nu = 0.31$,线膨胀系数 $\alpha = 1.66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.薄板两长边与一短边简支,沿薄板厚度方向有线性温度分布, z 轴正向表面温度为 $200 \text{ } ^\circ\text{C}$,负向表面温度为 $0 \text{ } ^\circ\text{C}$.5 000 个网格,采用 S4R 单元.模型示意图如图 3.

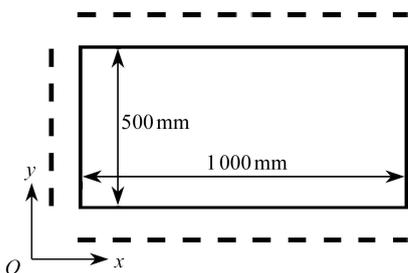


图 3 三边简支,一边自由板

Fig. 3 A rectangular plate with 3 edges simply supported and 1 edge free

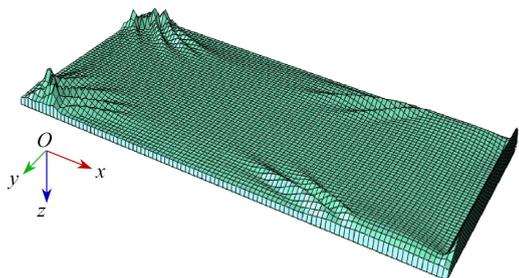


图 4 优化后厚度分布图

Fig. 4 The thickness distribution after optimization

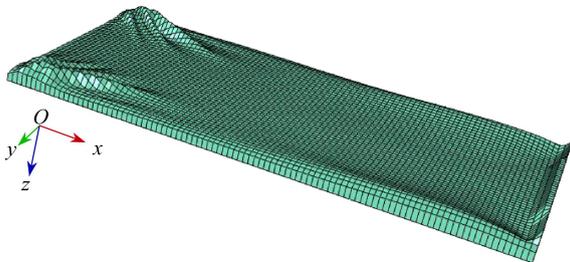


图 5 优化后厚度分布图 ($h_{\min} = 15 \text{ mm}$, $h_{\max} = 50 \text{ mm}$)

Fig. 5 The optimized thickness distribution ($h_{\min} = 15 \text{ mm}$, $h_{\max} = 50 \text{ mm}$)

设定优化厚度限制为 $h_{\min} = 15 \text{ mm}$, $h_{\max} = 80 \text{ mm}$,保持薄板上表面不变,收敛条件为相邻两次迭代所有单元厚度之差的和 $\leq 10 \text{ mm}$.优化后的厚度分布如图 4 所示,薄板有 4 处区域出现明显的加肋现象,自由边界处明显加厚,其余部分厚度相对较小.优化之后,薄板的最大挠度

由 -6.627 mm 降低到 -2.588 mm,减小了 60.9%,优化效果明显。

如果将算例 4.2 中的优化厚度限制设为 $h_{\min} = 15$ mm, $h_{\max} = 50$ mm,则优化后的挠度为 -3.007 mm,优化效益减小,如图 5 所示厚度分布也与之前的厚度分布存在差异,这说明此优化条件与厚度设置有关,且厚度限制比值 h_{\max}/h_{\min} 越大,优化效果越好。

通过以上两个模型算例可以看出,应用本文提出的优化准则对薄板的厚度进行优化,大幅度地降低了薄板的横向变形,说明了本优化准则的有效性。

5 结 论

本文研究了受热荷载作用的弹性薄板优化设计的数学列式以及优化准则。需要指出,由于没有材料也就没有热膨胀,如果不给定材料,最优设计会成为厚度为 0 的板。但是,由于板结构还需承受机械荷载及承担分割空间等其它功能,假定材料体积是给定的,这种优化准则得到的有可能是局部最优解,且优化效果与厚度限制有关。此类优化方法也可以推广到任意类型的板壳问题,可以广泛地应用于工程实际中可能出现的各类形状受热荷载作用的板壳变形问题。且从算例中的优化结果可以发现,优化后的薄板出现加肋现象,均匀加厚结构不是最优设计。

参考文献(References):

- [1] 程耿东. 实心弹性薄板的最优设计[J]. 大连工学院学报, 1981, **20**(2): 1-11.(CHENG Geng-dong. Optimum design of thin, solid, elastic plates[J]. *Journal of Dalian Institute of Technology*, 1981, **20**(2): 1-11.(in Chinese))
- [2] CHENG Keng-tung, Olhoff N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates[J]. *International of Solids and Structures*, 1982, **18**(2): 153-169.
- [3] CHENG Keng-tung, Olhoff N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates[J]. *International of Solids and Structures*, 1981, **17**(3): 305-323.
- [4] Todoroki A, Ozawa T, Mizutani Y, Suzuki Y. Thermal deformation constraint using response surfaces for optimization of stacking sequences of composite laminates[J]. *Advanced Composite Materials*, 2013, **22**(4): 265-279.
- [5] 王琪, 吉庭武, 肖曼玉, 谢公南. 轻质热防护系统多层材料组合结构的热应力分析[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(7): 742-749.(WANG Qi, JI Ting-wu, XIAO Man-yu, XIE Gong-nan. Numerical analysis on thermal stress of multilayer materials combined structures for a lightweight thermal protection system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(7): 742-749.(in Chinese))
- [6] Xia Q, Wang M Y. Topology optimization of thermoelastic structures using level set method [J]. *Computational Mechanics*, 2008, **42**(6): 837-857.
- [7] Yan J, Cheng G D, Liu L. A uniform optimum material based model for concurrent optimization of thermoelastic structures and materials[J]. *Int J Simul Multi Design Optim*, 2008, **2**(4): 259-266.
- [8] 孙十平, 张卫红. 热弹性结构的拓扑优化[J]. 力学学报, 2009, **41**(6): 878-887.(SUN Shi-ping, ZHANG Wei-hong. Topology optimal design of thermo-elastic structures[J]. *Chinese Journal of Theoretical Applied Mechanics*, 2009, **41**(6): 878-887.(in Chinese))
- [9] Cho S, Choi J Y. Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field adjoint sensitivity analysis method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, **41**(15): 1481-1495.

- [10] Zhang W H, Yang J G. A deep study on topology optimization of thermo-elastic problems [C]//*Proceedings of the Second International Conference on Computational Methods for Thermal Problems*. Dalian, China, 2011: 133-136.
- [11] Pedersen P, Pedersen N L. Strength optimized designs of thermoelastic structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **42**(5): 681-691.
- [12] Zhang W H, Yang J G, Xu Y J, Gao T. Topology optimization of thermo-elastic structures: mean compliance minimization or elastic strain energy minimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **49**(3): 417-429.
- [13] Li Q, Steven G P, Xie Y M. Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness designs[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **179**(3/4): 361-378.
- [14] Pedersen P, Pedersen N L. Interpolation/penalization applied for strength design of 3D thermoelastic structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, **45**(6): 773-786.
- [15] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (XU Zhi-lun. *Elasticity*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

Optimal Design of Thin Solid Elastic Plates Under Thermal Load

NI Xiao-qin, CHENG Geng-dong

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology)*; *Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

(Contributed by CHENG Geng-dong, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Plates and shells constitute a large family of widely used structural elements. Under the action of thermal load, if the thermal expansion is restricted, membrane forces and bending moments will occur within the plate and shell structures and lead to large deformation which seriously affected normal service. Due to the particularity of thermal load, uniform increase of the plate or shell thickness can hardly reduce the thermal deformation and thermal stress effectively, and special experience and knowledge are required in thermal structural design. Thickness distribution optimization of the thin elastic plate structure with given material volume under thermal load was studied and aimed at reduction of thermal deformation. For the thickness distribution of the plate with given material volume, mathematical formulation of the optimization problem focused on minimum structural deformation energy was established. According to the formulation and with the variational method, the optimality criteria and the iterative scheme for modification of the thickness distribution were derived. And this optimization algorithm was implemented through secondary development in the commercial finite element programs. Results of the numerical examples show that, the presented method greatly reduces the thermal deformation of thin elastic plate structures through modification of the thickness distribution, and makes an effective optimization method for thermal structures.

Key words: thin plate; heat load; thickness; optimization criterion