

Sakiadis 流动的一致有效级数解*

许 丁

(机械结构强度与振动国家重点实验室(西安交通大学);
西安交通大学 航天航空学院, 西安 710049)

摘要: 通过引入一个变换式,克服了 Sakiadis 流动中半无限大流动区域以及无穷远处渐近边界条件所带来的数学处理上的困难.基于泛函分析中的不动点理论,采用不动点方法求解了变换后的非线性微分方程,获得了 Sakiadis 流动的近似解析解.该近似解析解用级数的形式来表达并在整个半无限大流动区域内一致有效.

关键词: Sakiadis 流动; 不动点方法; 边界层; 一致有效

中图分类号: O351; TB126 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.02.007

引 言

Sakiadis 流动^[1]描述的是静止流体在半无限大匀速移动平板带动下形成的层流边界层问题,见图 1.该流动作为 Prandtl 边界层理论一个经典案例及其在金属延伸等工业制造中的应用背景而备受重视^[2].Sakiadis 通过引入和 Blasius 流动中相同的相似变换,将流动控制方程化为和 Blasius 方程一样的形式,但是边界条件与 Blasius 流动不同,Sakiadis 给出了该方程的数值解.随后,该流动问题被不断拓展,更多的复杂因素被考虑进来,如引入温度边界层,环境流体与板之间的热辐射,变物性系数,纳米流体,壁面吹吸作用等^[3-13].

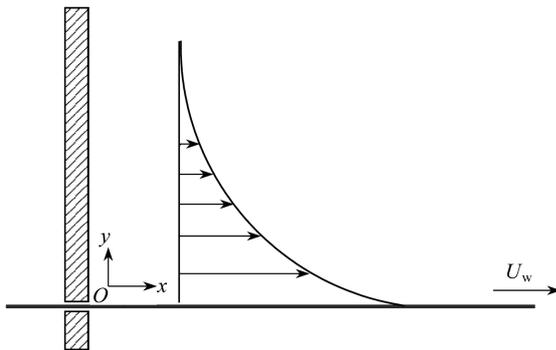


图 1 Sakiadis 流动示意图
Fig. 1 Schematic of the Sakiadis flow

无论是原始的 Sakiadis 流动还是上述推广形式流动,控制方程最终大都化简为一个非线性两点边值问题,同时该边值问题具有两个特点:首先,对应定义域为半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$;其次,一个边界条件施加在无穷远处,是渐近边界条件.这两个特点给控制方程无论是解析求解还是数值求解都带来了困难.文献中在处理该类边值问题时多采用打靶法、有限差分法等^[6-8, 11, 14-15].这些数值方法通常将原始半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 人为截断,用一个有限区域 $\eta \in [0, \eta_\infty]$ 来代替,将方程在这

* 收稿日期: 2014-04-03; 修订日期: 2014-11-17

基金项目: 国家自然科学基金(11102150); 中央高校基本科研业务费专项资金

作者简介: 许丁(1980—),男,西安人,副教授,博士(E-mail: dingxu@mail.xjtu.edu.cn).

个有限区域上进行积分,同时原来的渐近边界条件也改为施加在有限值 η_∞ 处.需要注意的是这种人为截断方法必须小心选择 η_∞ 值的大小.为了使数值解满足一定的精度要求,通常需要选用不同的 η_∞ 值进行试算.

为了获得 Sakiadis 流动在半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 上一致有效的解,并满足无穷远处的渐近边界条件,本文引入了一个变换,将原始区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 变换到有限区域 $-1 \leq \zeta \leq 1$.接下来利用不动点方法^[16]求解变换后的非线性微分方程,最后获得了 Sakiadis 流动的近似解析解.该近似解析解用级数的形式来表达并在整个半无限大流动区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 内一致有效.

1 控制方程

Sakiadis 流动没有几何特征长度,流动具有相似性,满足和 Blasius 流动一样的相似方程^[2]:

$$\mathcal{A}_f[f] = \frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad (1)$$

但是 Sakiadis 流动对应的边界条件为

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 0. \quad (2)$$

其中函数 $f(\eta)$ 代表无量纲流函数,与有量纲流函数 $\psi(x, y)$ 之间的关系为

$$\psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{\nu x U_w}, \quad (3)$$

U_w 为平板的移动速度, η 为相似自变量,由下式定义:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_w}{\nu x}}. \quad (4)$$

速度分量 (u, v) 与 $f(\eta)$ 之间满足

$$\begin{cases} u = U_w f'(\eta), \\ v = \frac{1}{2} (\eta f' - f) \sqrt{\nu U_w / x}. \end{cases} \quad (5)$$

由式(1)可以看出, Sakiadis 流动所满足的控制方程为一个非线性两点边值问题.需要注意的是流动区域为半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$, 并且一个边界条件关于一阶导数 $f'(\eta)$ 施加在无穷远处,是一个渐近边界条件.上述这两点给该方程无论是采用数值法还是分析法求解皆带来了很大的困难.为此,尽管该方程形式简单,但是自 1961 年 Sakiadis^[1] 提出至今已过去半个世纪仍未找到该问题封闭形式的解析解,并且人们仍在不断探索新的方法来处理该问题.

虽然上述方程解的具体形式是未知的,但是该解所具有的渐近特性很容易得到

$$\begin{cases} f \sim \eta + f''(0) \eta^2 / 2, & \text{as } \eta \rightarrow 0, \\ f \sim M, & \text{as } \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (6)$$

其中 M 为一常数, $M \approx 1.6159$ ^[2]. $f''(0)$ 具有明确的物理意义,代表平板受到流体作用的无量纲剪切力, $f''(0) \approx -0.4438$ ^[2].

2 不动点方法在 Sakiadis 流动中的应用

泛函分析中不动点 (fixed point) 概念^[17] 被广泛用来探讨方程解的存在性和唯一性.如非线性代数方程求解的 Newton (牛顿) 切线法就是基于 Banach 不动点定理.近来,不动点的概念

被进一步拓展,提出了用来获得微分方程显式近似解析解的不动点方法(fixed point method, FPM)^[16].这里本文将采用不动点方法来分析 Sakiadis 流动,并将获得整个流动区域上一致有效的级数解.

2.1 变换式

为了克服半无限大定义域 $\eta \in [0, +\infty)$ 以及渐近边界条件 $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 0$ 所带来的数学处理的困难,这里关于自变量 η 与函数 $f(\eta)$ 同时引入下述变换式:

$$\begin{cases} \zeta = (\eta - 1)/(\eta + 1), \\ g(\zeta) = (\eta + f)/(\eta + 1). \end{cases} \quad (7)$$

那么原方程(1)变为关于函数 $g(\zeta)$ 的方程:

$$\mathcal{A}_g[g] = (1 - \zeta)^3 g''' - [1 + 3(1 - \zeta)^2 + \zeta - 2g]g'' = 0, \quad (8)$$

其中右上角标'代表对 ζ 求导. $g(\zeta)$ 所满足的边界条件为

$$g(-1) = 0, \quad g'(-1) = 1, \quad g(1) = 1. \quad (9)$$

可以看出变换式(7)的引入将原来半无限大定义域 $\eta \in [0, +\infty)$ 变换到有限区域 $-1 \leq \zeta \leq 1$,同时渐近边界条件 $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 0$ 变为

$$g(1) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta + f}{\eta + 1} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1 + f'(\eta)}{1} = 1. \quad (10)$$

这将为获得整个流动区域上的一致有效解带来便利.

前已述及 $f''(0)$ 代表无量纲剪切力,在本问题中具有非常重要的意义.考虑到变换式(7), $f''(0)$ 可以用 $g''(-1)$ 表达:

$$f''(0) = 4g''(-1). \quad (11)$$

2.2 不动点方法的基本思想

按照不动点方法^[16],针对上述方程(8)引入一个压缩映射 $\mathcal{T}_g[g]$:

$$\mathcal{T}_g[g] = g - \varpi \cdot \mathcal{L}_c^{-1}[\mathcal{A}_g[g]], \quad (12)$$

其中, $\mathcal{L}_c[\cdot]$ 是一个线性双射算子,在不动点方法里被称为线性特征算子. $\mathcal{L}_c^{-1}[\cdot]$ 是 $\mathcal{L}_c[\cdot]$ 的逆算子.根据式(12)中的压缩映射,可以建立如下迭代式:

$$\begin{cases} g_{n+1} = \mathcal{T}_g[g_n] = g_n - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{L}_c^{-1}[\mathcal{A}_g[g_n]], \\ g_{n+1}(-1) = 0, \quad g'_{n+1}(-1) = 1, \quad g_{n+1}(1) = 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_c[g_{n+1}] = \mathcal{L}_c[g_n] - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{A}_g[g_n], \\ g_{n+1}(-1) = 0, \quad g'_{n+1}(-1) = 1, \quad g_{n+1}(1) = 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

迭代式(14)中的非0实参数列 $\{\varpi_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 称为松弛因子.文献[16]指出松弛因子的适当选取可以加快迭代收敛速度、改善迭代稳定性,但是松弛因子的确定依赖于问题本身.关于如何确定松弛因子将在2.5小节中给予讨论.求解迭代式(14)可以得到解的序列 $\{g_n \mid n = 1, 2, \dots\}$.当迭代式(14)收敛,对其两边同时取极限,所得极限值 g^* 满足原方程(8)和边界条件(9),即

$$\begin{cases} \mathcal{A}_g[g^*] = 0, \\ g^*(-1) = 0, \quad g'^*(-1) = 1, \quad g^*(1) = 1. \end{cases} \quad (15)$$

通常也称极限值 g^* 为压缩映射 $\mathcal{T}_g[g]$ 的不动点.

2.3 线性特征算子

在文献[16]中指出了不动点方法中线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 不是唯一的,并给出了选择 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 的一般性原则.线性特征算子的不唯一性给线性特征算子的选择提供了较大的自由空间,这反映出不动点方法的灵活性.这里注意到原方程(8)的形式,本问题的线性特征算子采用下述形式:

$$\mathcal{L}_C[g] = d^3g/d\zeta^3 = g''' . \quad (16)$$

在不动点方法中,线性方程 $\mathcal{L}_C[\cdot] = 0$ 的通解被称为线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 的核函数.容易得到本问题的核函数为 $1, \zeta$ 和 ζ^2 , 即

$$\mathcal{L}_C[C_1 + C_2\zeta + C_3\zeta^2] = 0, \quad (17)$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 为任意常数.

2.4 初始值

在不动点方法中迭代初始值 g_0 的选取也具有较大的自由,通常初值 g_0 越逼近于极限值 g^* , 迭代式(14)收敛得越快.对于本问题,这里给出一种较为方便的选择,要求 g_0 满足下面的方程:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C[g_0] = 0, \\ g_0(-1) = 0, g_0'(-1) = 1, g_0(1) = 1. \end{cases} \quad (18)$$

从而迭代初始值 g_0 为

$$g_0(\zeta) = \frac{3}{4} + \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{4}. \quad (19)$$

2.5 松弛因子的确定

适当的松弛因子 $\{\omega_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 可以用来改善迭代的稳定性,加快迭代的收敛速度,但是松弛因子的确定依赖于问题本身时,不同问题的松弛因子可以相差很大.这里通过使对应的残差最小的方式来确定最优松弛因子.

首先,引入 n 阶近似解 $f_n(\eta)$ 所对应的残差 \mathcal{R}_n :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \mathcal{R}_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{A}_f[f_n])^2 d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} (1 - \zeta)^2 (\mathcal{A}_g[g_n])^2 d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

\mathcal{R}_n 可以用来衡量近似解 $f_n(\eta)$ 的精确程度.

接下来,最优松弛因子的选取是使上述残差获得最小值.例如,当 $n = 1$ 时, $\mathcal{R}_1(\omega_1)$ 只是 ω_1 的函数,最优松弛因子 $\omega_{1, \text{opt}}$ 可以通过求解下述代数方程来获得:

$$d\mathcal{R}_1/d\omega_1 = 0. \quad (21)$$

当考虑 $n = 2$ 时,对应残差 $\mathcal{R}_2(\omega_1, \omega_2)$ 依赖于 ω_1 和 ω_2 . 由于 $\omega_{1, \text{opt}}$ 已在前一步确定,那么最优松弛因子 $\omega_{2, \text{opt}}$ 满足下述代数方程:

$$d\mathcal{R}_2/d\omega_2 = 0. \quad (22)$$

类似地,对第 n 阶近似解,对应残差 \mathcal{R}_n 实际上只依赖于 ω_n , 于是 $\omega_{n, \text{opt}}$ 的确定是使 \mathcal{R}_n 取得最小值,即

$$d\mathcal{R}_n/d\omega_n = 0. \quad (23)$$

可以看到,所有松弛因子 $\{\omega_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 都将较容易地按照这种方式相继确定.

2.6 各阶近似解 $f_n(\eta)$ 的确定

下面以 $n = 1$ 为例,详细给出一阶近似解 $f_1(\eta)$ 的求解过程.首先,根据迭代式(14), $g_1(\zeta)$ 满足的方程为

$$\begin{cases} g_1''' = \frac{\varpi_1}{4}(5 - 12\zeta + 7\zeta^2), \\ g_1(-1) = 0, g_1'(-1) = 1, g_1(1) = 1. \end{cases} \quad (24)$$

求解方程(24)可得一阶近似解 $g_1(\zeta)$:

$$\begin{aligned} g_1(\zeta) = & \frac{3}{4} + \frac{47\varpi_1}{120} + \frac{\zeta}{80}(40 + 19\varpi_1) - \frac{\zeta^2}{60}(15 + 31\varpi_1) - \\ & \frac{5\varpi_1}{24}\zeta^3 + \frac{\varpi_1}{8}\zeta^4 - \frac{7\varpi_1}{240}\zeta^5, \end{aligned} \quad (25)$$

$g_1(\zeta)$ 显式依赖于松弛因子 ϖ_1 , 即 ϖ_1 的引入实际上提供了一族解 $g_1(\zeta; \varpi_1)$. 下面采用 2.5 小节介绍的方法来确定最优松弛因子 $\varpi_{1,\text{opt}}$. 首先按照式(20) 计算一阶近似解 $f_1(\eta)$ 对应的残差 $\mathcal{R}_1(\varpi_1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\varpi_1) = & \int_0^{+\infty} (\mathcal{A}_f[f_1])^2 d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} (1 - \zeta)^2 (\mathcal{A}_g[g_1])^2 d\zeta = \\ & 4.866\ 667 - 78.553\ 39\varpi_1 + 370.265\ 0\varpi_1^2 - \\ & 0.836\ 191\ 6\varpi_1^3 + 0.056\ 171\ 32\varpi_1^4. \end{aligned} \quad (26)$$

接下来寻求 $\varpi_{1,\text{opt}}$ 使 $\mathcal{R}_1(\varpi_1)$ 达到最小值,可得

$$\varpi_{1,\text{opt}} = 0.106\ 115\ 0, \min \mathcal{R}_1 = 0.699\ 312\ 0. \quad (27)$$

最后将式(27)中得到的 $\varpi_{1,\text{opt}}$ 代入到式(25)中,同时考虑到变换式(7),可得一阶近似解 $f_1(\eta)$ 为

$$f_1(\eta) = (\eta + 1)g_1(\zeta) - \eta, \zeta = (\eta - 1)/(\eta + 1), \quad (28)$$

其中 $g_1(\zeta)$ 为

$$\begin{aligned} g_1(\zeta) = & 0.791\ 561\ 7 + 0.525\ 202\ 3\zeta - 0.304\ 826\ 1\zeta^2 - \\ & 0.022\ 107\ 30\zeta^3 + 0.013\ 264\ 38\zeta^4 - 0.003\ 095\ 021\zeta^5. \end{aligned} \quad (29)$$

可以看出 $g_1(\zeta)$ 可以表达成关于 ζ 的幂级数.

对于更高阶的近似解 $f_n(\eta) = (\eta + 1)g_n(\zeta) - \eta$, 可仿照上述推导一阶近似解 $f_1(\eta)$ 的过程来获得,并且该求解过程可以采用符号计算软件,如 MAXIMA, MAPLE 或 MATHEMATICA 编程进行自动求解.程序计算表明,各阶 $g_n(\zeta)$ 都可以表达成关于 ζ 的幂级数形式:

$$g_n(\zeta) = \sum_k a_{n,k} \zeta^k. \quad (30)$$

图 2 给出近似解 $f_n(\eta)$ 所对应残差 \mathcal{R}_n 的收敛曲线,可以看出随着迭代的进行残差迅速下降,这表明近似解 $f_n(\eta)$ 的精度随着迭代不断得到改善.

3 讨论与结果

3.1 推广变换式

在变换式(7)中,可以看到原半无限大定义域 $\eta \in [0, +\infty)$ 在 $\eta = 1$ 处被分割为两部分 $0 \leq \eta < 1$ 和 $\eta > 1$, 它们分别映射为变换后的区域 $-1 \leq \zeta < 0$ 和 $0 < \zeta \leq 1$.

下面通过引入一特征长度 $L (> 0)$ 对变换式(7)进行推广:

$$\begin{cases} \zeta = (\eta - L)/(\eta + L), \\ g(\zeta) = (\eta + f)/(\eta + L). \end{cases} \quad (31)$$

此时,原半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 变成在 $\eta = L$ 处被分割为两部分.后续讨论将指出 L 具有边界层厚度的物理意义.引入推广变换后,原方程(1)变为

$$\mathcal{A}_g[g] = \frac{1}{L^2}(1 - \zeta)^3 g''' - \left[1 + \frac{3}{L^2}(1 - \zeta)^2 + \zeta - 2g \right] g'' = 0, \quad (32)$$

$g(\zeta)$ 所满足的边界条件不变仍然为式(9).

采用推广变换式(31)后 $f''(0)$ 与 $g''(-1)$ 之间的关系变为

$$f''(0) = 4g''(-1)/L. \quad (33)$$

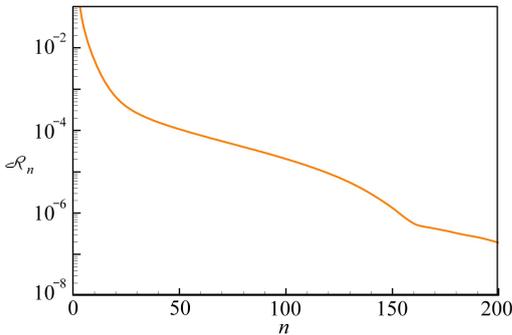


图2 残差 \mathcal{R}_n 的收敛曲线

Fig. 2 The convergence history of residual \mathcal{R}_n

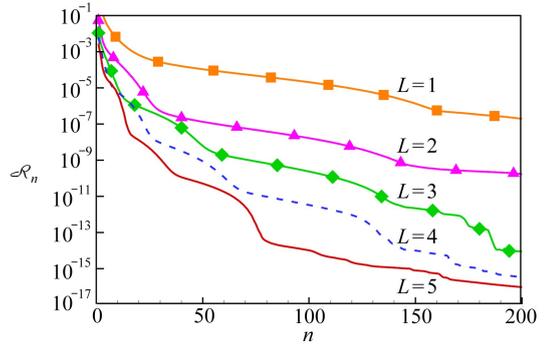


图3 不同 L 值下 \mathcal{R}_n 收敛曲线对比

Fig. 3 The influence of L value on the convergence history of residual \mathcal{R}_n

3.2 特征长度 L 的物理意义及对解的影响

为了揭示推广变换式(31)中特征长度 L 的物理意义,这里选取 $1, 2, \dots, 10$ 几个整数值作为 L 的值考虑不同 L 对结果的影响.

计算表明,当 $L \geq 6$ 时迭代式(14)不稳定甚至发散,而 $L \leq 5$ 时迭代收敛.图3给出 L 取不同值时残差 \mathcal{R}_n 的收敛曲线.从图中可以清楚看出在这5支曲线当中基于 $L = 5$ 时的 \mathcal{R}_n 下降最快.当迭代次数 $n = 200$ 时,基于 $L = 1$ 的 \mathcal{R}_n 下降到 10^{-7} 的量级,而基于 $L = 5$ 的 \mathcal{R}_n 达到 10^{-16} 的量级.另外,基于 $L = 4$ 和基于 $L = 5$ 的 \mathcal{R}_n 曲线在整个迭代过程中差别不大,尤其是当迭代次数 n 变大时,这种差异进一步减小.

下面尝试基于 Prandtl 边界层理论^[2] 所得的结果给出物理上的解释.对于 Sakiadis 流动,虽然从几何上考虑流动没有特征长度,但是考虑到其为粘性流动,依据 Prandtl 边界层理论,流动具有物理上的特征长度,即边界层厚度 δ : 当 $\eta < \delta$ 时,壁面附近粘性作用很重要;当 $\eta > \delta$ 时,粘性作用可以忽略,看成无粘流动.这启发我们推广变换式(31)中的特征长度 L 应该具有边界层厚度 δ 的物理意义,即 $L = \delta$.

基于上述这种认识,下面从渐近分析的角度给出流动边界层厚度 δ ,从而得出特征长度 L 的取值范围.虽然不知道解 $f(\eta)$ 的具体形式,但是根据流动物理上的分析,有足够的把握知道当 $\eta > \delta$ 时 $f'(\eta)$ 和 $f''(\eta)$ 趋于0,即它们的绝对值是一个很小的数,如:

$$|f'(\eta)| < 10^{-2}, \quad |f''(\eta)| < 10^{-2}, \quad \eta > \delta. \quad (34)$$

同时,由前文中式(6)给出的 $f(\eta)$ 当 η 较大时的渐近特性,可以将原方程(1)写成下述渐近的形式:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} M \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sim 0, \quad \eta > \delta. \quad (35)$$

式(35)等价于

$$\begin{cases} f' \sim -\frac{2C}{M} \exp(-M\eta/2), \\ f'' \sim C \exp(-M\eta/2), \end{cases} \quad \eta > \delta, \quad (36)$$

其中 C 为一积分常数.从式(36)可以估算出当 $\delta \approx 4 \sim 5$ 时式(34)可以得到满足,因此 $L = \delta \approx 4 \sim 5$.这和图3给出的结果一致.

前文已指出 $f''(0)$ 具有明确的物理意义,是本问题中一个非常重要的物理量.下面进一步考虑 L 的取值对 $f''_n(0)$ 收敛的影响,见图4.Andersson等^[7]的结果 $f''(0) = -0.4437483$ 也一并绘在图上.可以看出,图4中5支曲线都逐渐趋近于Andersson的结果 $f''(0) = -0.4437483$,并且它们之间的差异随着迭代次数 n 变大而迅速变小.这说明只要 L 为边界层厚度 δ 的量级,最终收敛解对于 L 的具体取值不是十分敏感.

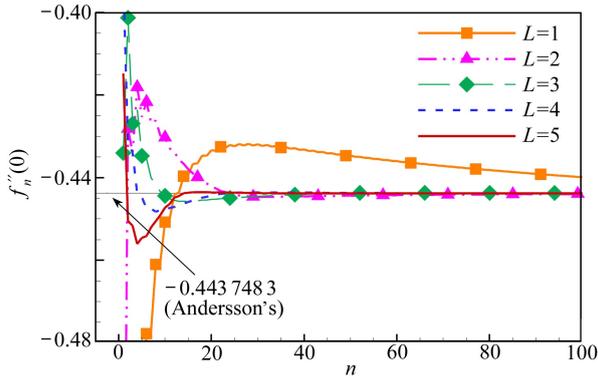


图4 不同 L 值下 $f''_n(0)$ 收敛曲线对比

Fig. 4 The influence of L value on the convergence history of $f''_n(0)$

3.3 结果

鉴于上一小节的讨论,下述计算结果都是基于 $L = 5$ 的.通过符号计算软件编程得到了方程(1)的近似解 $f_n(\eta)$ 的显式表达式:

$$f_n(\eta) = (\eta + 1)g_n(\zeta) - \eta, \quad \zeta = (\eta - 1)/(\eta + 1), \quad (37)$$

其中 $g_n(\zeta)$ 表达成关于 ζ 的幂级数形式:

$$g_n(\zeta) = \sum_k a_{n,k} \zeta^k. \quad (38)$$

当后续需要对 $f_n(\eta)$ 进行求导、积分等运算时,如

$$f'_n(\eta) = g_n(\zeta) - 1 + (1 - \zeta)g'_n(\zeta), \quad (39)$$

$$f''_n(\eta) = \frac{1}{2L}(1 - \zeta)^3 g''_n(\zeta), \quad (40)$$

$$\mathcal{R}_n = \int_0^{+\infty} (\mathcal{A}_f[f_n])^2 d\eta = \frac{L}{8} \int_{-1}^{+1} (1 - \zeta)^2 (\mathcal{A}_g[g_n])^2 d\zeta, \quad (41)$$

可以看出无论是对 $f_n(\eta)$ 的求导还是积分, 最后都化成对关于 ζ 的幂级数的求导和积分, 这将使计算变得非常高效而准确. 为了和 Cortell^[8] 的计算结果进行比较, 近似解 $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ 和 $f''_n(\eta)$ 的数值被详尽地列于表 1 中. 可以看出随着迭代次数的增加, 近似解的精度在不断提高. 另外, 当 $n = 500$ 时的近似解 $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ 和 $f''_n(\eta)$ 绘于图 5. 可以清楚看出, 对于 Sakiadis 流动, 边界层大致位于 $\eta \approx 5$ 处.

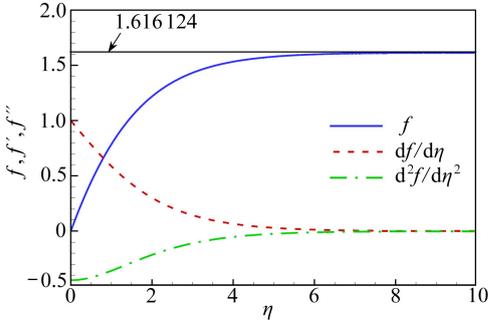


图 5 $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ 和 $f''_n(\eta)$ 的分布曲线 ($n = 500$)

Fig. 5 The distributions of $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ and $f''_n(\eta)$ ($n = 500$)

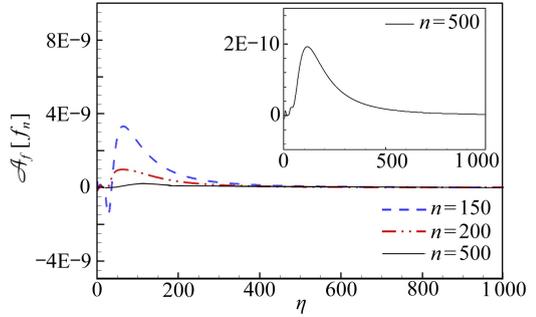


图 6 $\mathcal{A}_f[f_n]$ 分布曲线

Fig. 6 The residual error function $\mathcal{A}_f[f_n]$

表 1 不同阶数近似解 $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ 和 $f''_n(\eta)$

Table 1 Comparison of $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ and $f''_n(\eta)$ between FPM and Cortell

η	f			
	FPM			Cortell ^[8]
	$n = 150$	$n = 200$	$n = 500$	
	0	0	0	
0.1	0.097 782 2	0.097 782 2	0.097 782 2	0.097 782 2
0.2	0.191 139 5	0.191 139 5	0.191 139 5	0.191 139 5
0.3	0.280 103 9	0.280 103 9	0.280 103 9	0.280 103 9
0.4	0.364 726 7	0.364 726 7	0.364 726 7	0.364 726 6
0.5	0.445 077 3	0.445 077 3	0.445 077 3	0.445 077 2
0.6	0.521 241 2	0.521 241 2	0.521 241 2	0.521 241 1
0.7	0.593 318 4	0.593 318 4	0.593 318 4	0.593 318 2
0.8	0.661 421 0	0.661 421 0	0.661 421 1	0.661 420 7
0.9	0.725 671 8	0.725 671 8	0.725 671 8	0.725 671 4
1	0.786 201 9	0.786 202 0	0.786 202 0	0.786 201 5
1.5	1.038 013 0	1.038 013 0	1.038 013 0	1.038 012 0
2	1.218 553 0	1.218 553 0	1.218 553 0	1.218 552 0
3	1.432 731 0	1.432 732 0	1.432 732 0	1.432 730 0
4	1.533 082 0	1.533 083 0	1.533 083 0	1.533 080 0
5	1.578 846 0	1.578 846 0	1.578 847 0	1.578 844 0
10	1.615 462 0	1.615 464 0	1.615 466 0	1.615 463 0
15	1.616 108 0	1.616 111 0	1.616 113 0	1.616 112 0
20	1.616 117 0	1.616 122 0	1.616 124 0	1.616 112 0

η	f'			Cortell ^[8]
	FPM			
	$n = 150$	$n = 200$	$n = 500$	
	1	1	1	
0.1	0.955 661 7	0.955 661 7	0.955 661 7	0.955 661 6
0.2	0.911 538 7	0.911 538 8	0.911 538 8	0.911 538 6
0.3	0.867 834 5	0.867 834 5	0.867 834 5	0.867 834 3
0.4	0.824 737 1	0.824 737 1	0.824 737 1	0.824 736 7
0.5	0.782 417 5	0.782 417 5	0.782 417 5	0.782 417 2
0.6	0.741 028 2	0.741 028 2	0.741 028 3	0.741 027 9
0.7	0.700 702 7	0.700 702 7	0.700 702 7	0.700 702 3
0.8	0.661 554 9	0.661 554 9	0.661 555 0	0.661 554 6
0.9	0.623 679 6	0.623 679 7	0.623 679 7	0.623 679 3
1	0.587 153 1	0.587 153 1	0.587 153 2	0.587 152 5
1.5	0.426 242 4	0.426 242 5	0.426 242 5	0.426 241 7
2	0.301 783 6	0.301 783 8	0.301 783 9	0.301 783 0
3	0.144 016 0	0.144 016 2	0.144 016 3	0.144 015 7
4	0.066 243 3	0.066 243 6	0.066 243 7	0.066 243 4
5	0.029 949 4	0.029 949 7	0.029 949 8	0.029 949 7
10	5.324 068E-4	5.326 908E-4	5.328 379E-4	5.329E-4
15	8.887 505E-6	9.174 255E-6	9.322 613E-6	9.4E-6
20	-3.241 474E-7	-3.733 526E-8	1.110 681E-7	1.0E-7
	$-f''$			
η	FPM			Cortell ^[8]
	$n = 150$	$n = 200$	$n = 500$	
	0.443 748 5	0.443 748 4	0.443 748 3	
0.1	0.442 656 8	0.442 656 8	0.442 656 7	0.442 655 7
0.2	0.439 462 9	0.439 462 9	0.439 462 8	0.439 461 7
0.3	0.434 308 1	0.434 308 0	0.434 307 9	0.434 306 8
0.4	0.427 355 1	0.427 355 1	0.427 355 0	0.427 353 9
0.5	0.418 782 9	0.418 782 8	0.418 782 8	0.418 781 6
0.6	0.408 780 1	0.408 780 1	0.408 780 0	0.408 778 7
0.7	0.397 540 4	0.397 540 4	0.397 540 3	0.397 539 0
0.8	0.385 257 5	0.385 257 4	0.385 257 4	0.385 256 1
0.9	0.372 120 9	0.372 120 8	0.372 120 8	0.372 119 5
1	0.358 312 9	0.358 312 9	0.358 312 8	0.358 311 4
1.5	0.284 776 1	0.284 776 1	0.284 776 0	0.284 774 9
2	0.214 505 8	0.214 505 8	0.214 505 8	0.214 504 7
3	0.109 835 0	0.109 835 0	0.109 834 9	0.109 834 3
4	0.052 159 8	0.052 159 8	0.052 159 8	0.052 159 4
5	0.023 922 8	0.023 922 8	0.023 922 8	0.023 922 6
10	4.305 247E-4	4.305 229E-4	4.305 220E-4	4.305E-4
15	7.576 84E-6	7.576 794E-6	7.576 768E-6	7.6E-6
20	1.334 392E-7	1.333 058E-7	1.332 913E-7	1.0E-7

代表壁面无量纲剪切力 $f''(0)$ 的值在表 2 中列出并和文献中其他学者的结果^[1, 5-8]进行了比较.当 $n \geq 300$ 时,本文得到精确到 7 位有效数字的 $f''_n(0) = -0.443\ 748\ 3$, 该值和 Andersson^[7] 的结果完全一致.

表 2 壁面无量纲剪切力 $f''(0)$
Table 2 The non-dimensional wall shear stress $f''(0)$

FPM		Sakiadis ^[1]	Andersson ^[7]	Cortell ^[8]	Pop ^[5]	Pantokratoras ^[6]
n	$f''_n(0)$					
1	-0.414 732 5					
25	-0.443 638 0					
50	-0.443 769 6					
100	-0.443 748 3					
150	-0.443 748 5	-0.443 75	-0.443 748 3	-0.443 747 33	-0.444 551 7	-0.443 8
200	-0.443 748 4					
300	-0.443 748 3					
400	-0.443 748 3					
500	-0.443 748 3					

$\mathcal{A}_f[f_n] = \frac{d^3 f_n}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_n \frac{d^2 f_n}{d\eta^2}$ 可用来反映近似解精确程度在整个定义域内的具体分布情况.这

里以 $\mathcal{A}_f[f_{150}]$, $\mathcal{A}_f[f_{200}]$ 和 $\mathcal{A}_f[f_{500}]$ 为例在图 6 绘出.可以看到 $|\mathcal{A}_f[f_{150}]|$ 最大值约为 $4E-9$, 而 $|\mathcal{A}_f[f_{500}]|$ 最大值仅约为 $2E-10$, 这充分说明随着迭代的进行, 近似解的精度在不断提高.而且, 从图 6 中可以清楚看出本文给出的近似解在整个定义域 $\eta \in [0, +\infty)$ 内一致有效.

下面考虑函数 $f(\eta)$ 的渐近特性, 由式(6)得到

$$M = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = f(\infty). \tag{42}$$

那么 M 的近似值可以用下式给出:

$$M \approx f_n(\eta), \quad \text{for large } \eta. \tag{43}$$

本文给出的 M 近似值与文献[2, 8]给出的结果列于表 3, 从该表可以看出, 当 $\eta \geq 20$ 时 $M \approx 1.616\ 124$, 其前 7 位有效数字不再改变.

表 3 函数 $f(\eta)$ 的渐近特性
Table 3 The asymptotic property of solution $f(\eta)$

FPM ($n = 500$)	Schlichting ^[2]	Cortell ^[8]
η	$M(\approx f_n)$	1.616 9
5	1.578 847	1.616 112 0
6	1.599 456	
7	1.608 685	
8	1.612 807	
9	1.614 646	
10	1.615 466	
15	1.616 113	
20	1.616 124	
25	1.616 124	
30	1.616 124	

边界层位移厚度 δ^* 和动量厚度 θ 有着明确的物理意义^[2], 在本问题中 δ^* 和 θ 分别定义为

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} f'(\eta) d\eta, \quad \theta = \int_0^{+\infty} [f'(\eta)]^2 d\eta. \tag{44}$$

考虑到原控制方程(1), δ^* 和 θ 可化简为

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} f'(\eta) d\eta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = M \approx 1.616\ 124, \quad (45)$$

$$\theta = \int_0^{+\infty} [f'(\eta)]^2 d\eta = -2f''(0) \approx 0.887\ 496\ 6. \quad (46)$$

最后考虑无穷远处流体法向速度 v_∞ , 由式(5)得

$$v_\infty = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}(\eta f' - f) \sqrt{\frac{\nu U_w}{x}} \right] = -\frac{1}{2}f(\infty) \sqrt{\frac{\nu U_w}{x}} \approx -0.808\ 062 \sqrt{\frac{\nu U_w}{x}} < 0. \quad (47)$$

上式在求极限时利用了式(36), 由于移动平板附近的流体被带动跟随平板一起运动形成空缺, 为了满足质量守恒定律, 远处的流体有向下的运动趋势来填补上述空缺, 因此无穷远处的流体 y 方向速度指向平板. 这和射流对周围环境流体形成的卷吸作用相类似.

4 结 论

1) 本文针对 Sakiadis 流动引入变换式, 该变换式可以克服流动半无限大定义域以及无穷远处渐近边界条件所带来数学处理上的困难;

2) 本文采用不动点方法对上述变换后的方程进行了求解, 得到了在整个流动区域内一致有效的近似解析解, 该近似解析解可以用级数的形式来表达;

3) 通过计算结果比较, 表明 FPM 是一种获得微分方程近似解析解的有效方法.

参考文献 (References):

- [1] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces—II: the boundary layer on a continuous flat surface[J]. *AIChE Journal*, 1961, **7**(2): 221-225.
- [2] Schlichting H, Gersten K. *Boundary-Layer Theory*[M]. Springer Verlag, 2000.
- [3] Tsou F K, Sparrow E M, Goldstein R J. Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1967, **10**(2): 219-235.
- [4] Takhar H S, Nitu S, Pop I. Boundary layer flow due to a moving plate: variable fluid properties[J]. *Acta Mechanica*, 1991, **90**(1/4): 37-42.
- [5] Pop I, Gorla R S R, Rashidi M. The effect of variable viscosity on flow and heat transfer to a continuous moving flat plate[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1992, **30**(1): 1-6.
- [6] Pantokratoras A. Further results on the variable viscosity on flow and heat transfer to a continuous moving flat plate[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(17/18): 1891-1896.
- [7] Andersson H I, Aarseth J B. Sakiadis flow with variable fluid properties revisited[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, **45**(2/8): 554-561.
- [8] Cortell R. A numerical tackling on Sakiadis flow with thermal radiation[J]. *Chinese Phys Lett*, 2008, **25**(4): 1340-1342.
- [9] Pantokratoras A. The Blasius and Sakiadis flow with variable fluid properties[J]. *Heat Mass Transfer*, 2008, **44**(10): 1187-1198.

- [10] Pantokratoras A. Asymptotic suction profiles for the Blasius and Sakiadis flow with constant and variable fluid properties[J]. *Arch Appl Mech*, 2009, **79**(5): 469-478.
- [11] Ahmad S, Rohni A, Pop I. Blasius and Sakiadis problems in nanofluids[J]. *Acta Mechanica*, 2011, **218**(3/4): 195-204.
- [12] Bataller R C. Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition[J]. *Appl Math Comput*, 2008, **206**(2): 832-840.
- [13] 梅金德 O D. 纳米流体在粘性耗散和 Newton 传热组合影响下的 Sakiadis 流动分析[J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(12): 1442-1450. (Makinde O D. Analysis of Sakiadis flow of nanofluids with viscous dissipation and Newtonian heating[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(12): 1442-1450. (in Chinese))
- [14] Salama A A, Mansour A A. Fourth-order finite-difference method for third-order boundary-value problems [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 2005, **47**(4): 383-401.
- [15] Salama A A. Higher-order method for solving free boundary-value problems[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 2004, **45**(4): 385-394.
- [16] Xu D, Guo X. Fixed point analytical method for nonlinear differential equations[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2013, **8**(1): 011005.
- [17] Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I (Fixed-Point Theorems)* [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

A Uniformly Valid Series Solution to Sakiadis Flow

XU Ding

(*State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures*
(*Xi'an Jiaotong University*); *School of Aerospace,*
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China)

Abstract: In order to overcome the major mathematical difficulties in Sakiadis flow due to the semi-infinite flow domain and the asymptotic far field boundary condition, transformations were introduced for both the related independent variables and functions simultaneously, to convert the semi-infinite domain to a finite one and the asymptotic boundary condition to a convenient form. Then, based on the fixed point theory in functional analysis, the deduced nonlinear differential equation was solved, and an approximate semi-analytical series solution to Sakiadis flow was obtained. The calculation results show that the solution is uniformly valid in the semi-infinite domain, and the fixed point method makes an effective way to achieve approximate analytical solutions to differential equations.

Key words: Sakiadis flow; fixed point method; boundary layer; uniformly valid

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11102150)