

基于不动点方法求解非线性 Falkner-Skan 流动方程*

许 丁¹, 谢公南²

(1. 机械结构强度与振动国家重点实验室(西安交通大学), 西安 710049;
2. 西北工业大学 工程仿真与宇航计算实验室, 西安 710072)

(本刊编委谢公南来稿)

摘要: Falkner-Skan 流动方程描述绕楔面的流动, 该方程具有很强的非线性. 首先通过引入变换式, 将原半无限大区域上的流动问题转化为有限区间上的两点边值问题. 接着基于泛函分析中的不动点理论, 采用不动点方法求解两点边值问题从而得到 Falkner-Skan 流动方程的解. 最后将不动点方法给出的结果和文献中的数值结果相比较, 发现不动点方法得到的结果具有很高的精度, 并且解的精度很容易通过迭代而不断得到提高. 表明不动点方法是一种求解非线性微分方程行之有效的方法.

关键词: Falkner-Skan 流动; 不动点方法; 非线性微分方程; 边值问题

中图分类号: O351; TB126 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.007

引 言

描述流体运动的 Navier-Stokes 方程是一组非线性偏微分方程组, 寻求其一般意义下的解析封闭解非常困难, 目前只针对一些几何边界简单的流动找到了封闭解. 但是 Navier-Stokes 方程在一些情况下可以通过引入相似变换将其变为非线性常微分方程, 对应的解称为相似解^[1-2]. 这些相似解在很大程度上可以帮助人们深入理解 Navier-Stokes 方程的数学物理特点, 并且可以作为标准算例来检验数值方法的准确性.

在众多相似流动当中, Falkner 与 Skan^[3] 最早讨论了不可压缩粘性层流流过楔面的流动, 并得到了现在以他们名字命名的 Falkner-Skan 流动方程^[4-5], 对应流动示意图见图 1.

Falkner-Skan 流动方程可以写成下面的形式^[4-5]:

$$\mathcal{A}_f[f; \beta] = f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{A}_f[\cdot]$ 为一算子, f' 代表函数 $f(\eta)$ 对 η 求导. 方程(1)对应的边界条件为

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(+\infty) = 1. \quad (2)$$

易看出 Falkner-Skan 流动方程是一个 3 阶非线性微分方程的两点边值问题.

从几何上来说, 参数 β 与楔面夹角 θ 相联系,

* 收稿日期: 2014-07-16

基金项目: 国家自然科学基金(11102150); 中央高校基本科研业务费专项资金

作者简介: 许丁(1980—), 男, 西安人, 讲师, 博士(通讯作者). E-mail: dingxu@mail.xjtu.edu.cn.

$$\theta = \beta\pi, \tag{3}$$

因此参数 β 的取值范围为

$$0 \leq \beta \leq 2, \tag{4}$$

其中, $\beta = 0$ 与 $\beta = 1$ 分别对应著名的 Blasius 平板边界层^[4, 6] 与二维驻点流动^[4, 7]. 物理上, 参数 β 与压力梯度相关, β 越大顺压梯度越大, 从而边界层越薄. 而在数学上, 考虑方程(1) 在 $\eta = 0$ 处, 结合边界条件(2), 得

$$\beta = -f'''(0). \tag{5}$$

方程(1) 及边界条件(2) 具有下述两个特点: 一是问题定义域为半无限大的区域 $\eta \in [0, +\infty)$; 二是方程的一个边界条件 $f'(+\infty) = 1$ 定义在无穷远, 是一个渐近边界条件. 这两个特点给该方程无论是解析求解还是数值求解都带来了很大的困难.

虽然到目前为止还未找到该方程的封闭解, 但是该解的渐近特性易从原方程与边界条件得出,

$$\begin{cases} f \sim f''(0)\eta^2/2 - \beta\eta^3/6, & \text{as } \eta \rightarrow 0, \\ f \sim \eta - M(\beta), & \text{as } \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \tag{6}$$

这里 $f''(0)$ 具有明确的物理意义, 代表壁面无量纲剪切力. 数学上 $M(\beta)$ 代表曲线 $f(\eta)$ 的渐近线与横轴的交点, 后文将指出 $M(\beta)$ 的物理意义为边界层位移厚度 δ^* . $f''(0)$ 与 $M(\beta)$ 这两个值具有重要的工程实际意义.

现有文献中在数值求解该方程时的做法大多是将原始半无限大区域 $\eta \in [0, +\infty)$ 人为截断为 $\eta \in [0, \eta_\infty]$, 将渐近边界条件转变为 $f'(\eta_\infty) = 1$, 并在有限区间 $\eta \in [0, \eta_\infty]$ 上进行求解. 这种处理方法带有一定的人为性, 合适 η_∞ 值的选择需要通过不断试算来确定. Hartree^[8] 首先采用打靶法给出了该方程较为精确的数值解. Asaithambi^[9] 采用有限差分方法再次数值求解了该方程. Fazio^[10] 采用 Töpfer 方法将该方程从边值问题转化为初值问题并得到了数值解. 关于该方程当 $\beta = 0$ 时的特殊形式, 即 Blasius^[6] 平板边界层流动方程的研究更是吸引了众多的学者, 这方面的参考文献很多, 可以参见相关综述文献[11-12]. 另外, 还有很多学者尝试给出 Falkner-Skan 方程的近似形式的解析解^[13-16].

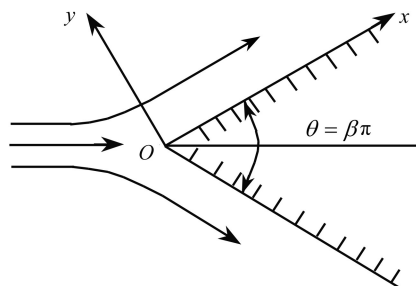


图 1 绕楔面的流动
Fig. 1 Schematic of wedge flow

1 变换式

前文述及非线性 Falkner-Skan 方程的求解困难主要来源于半无限大定义域以及无穷远处的渐近边界条件. 为了克服上述困难, 这里对自变量 η 及函数 $f(\eta)$ 同时进行变换,

$$\begin{cases} \zeta = (\eta - L)/(\eta + L), \\ g(\zeta) = (f - \eta)/(\eta + L), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $L = L(\beta)$ 为一尺度因子, 只与 β 相关. 在该变换式下, 原方程(1) 变为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g[g; \beta] &= \frac{(1 - \zeta)^5}{L^2} g''' + (1 - \zeta)^2 \left[2(1 + \zeta + 2g) - \frac{3}{L^2}(1 - \zeta)^2 \right] g'' - \\ & 4\beta(1 - \zeta) [(1 - \zeta)g' + 2(1 + g)]g' - 4\beta g(g + 2) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

当 $\beta = 0$ 时对应 Blasius 平板边界层问题, 式(8) 可以进一步化简为

$$\mathcal{A}_g[g; 0] = \frac{(1 - \zeta)^3}{L^2} g''' + \left[2(1 + \zeta + 2g) - \frac{3}{L^2}(1 - \zeta)^2 \right] g'' = 0, \tag{9}$$

其中 g' 代表函数 $g(\zeta)$ 对新自变量 ζ 求导. 相应边界条件为

$$g(-1) = 0, g'(-1) = -1/2, g(1) = 0. \quad (10)$$

易看出,变换式(7)的引入将原半无限大定义域 $\eta \in [0, +\infty)$ 变为有限区间 $\zeta \in [-1, 1]$,同时原无穷远处渐近边界条件 $f'(+\infty) = 1$ 变为

$$g(1) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f - \eta}{\eta + L} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f'(\eta) - 1}{1} = 0, \quad (11)$$

这将对 Falkner-Skan 方程的求解带来极大的便利.

当函数 $g(\zeta)$ 获得后,根据变换式(7)可得

$$f(\eta) = \eta + (\eta + L)g(\zeta), \zeta = (\eta - L)/(\eta + L). \quad (12)$$

另外,壁面无量纲剪切力也可由下式得到:

$$f''(0) = 4g''(-1)/L. \quad (13)$$

在文献[17]中用不动点方法讨论了 Blasius 平板边界层问题,发现调节 $L(0)$ 取值可以改变迭代收敛速度,指出尺度因子 $L(0)$ 的物理意义是边界层厚度 δ ,并选取 $L(0) = 5$.对于 Blasius 方程的推广形式 Falkner-Skan 方程,当 β 越大,顺压梯度越强,边界层厚度越小.另外,文献[17]中还指出 $L(0)$ 只要具有与边界层厚度相当的量级,迭代最终收敛结果并不依赖于具体的 $L(0)$ 取值.鉴于此,本文这里直接选取

$$L(\beta) = 5. \quad (14)$$

2 基于不动点方法求解 Falkner-Skan 流动方程

2.1 不动点方法(fixed point method, FPM)的基本思想

不动点(fixed point)是泛函分析中的一个非常重要的概念^[18],并被广泛用来探讨方程解的存在性和唯一性.如求解非线性代数方程的 Newton(牛顿)切线法就是基于 Banach 不动点定理.近来,不动点的概念被进一步发展并提出了用来获得微分方程近似解的不动点方法(fixed point method, FPM)^[17, 19-22].以下将采用不动点方法来求解非线性 Falkner-Skan 方程.

这里简要叙述下 FPM 方法求解非线性微分方程的思想和步骤.首先,考虑下面的非线性微分方程:

$$\begin{cases} \mathcal{A}[u] = 0, \\ \mathcal{B}_+[u] = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\mathcal{A}[\cdot]$ 是一个非线性算子, u 是待求解的未知函数, $\mathcal{B}_+[u] = 0$ 代表边界条件或初始条件.

接着,引入一个压缩映射 $\mathcal{T}[\cdot]$:

$$\mathcal{T}[u] = u - \omega \cdot \mathcal{L}_c^{-1}[\mathcal{A}[u]], \quad (16)$$

这里 $\mathcal{L}_c[\cdot]$ 是一个线性双射算子,在不动点方法里称为非线性算子 $\mathcal{A}[\cdot]$ 的线性特征算子,算子 $\mathcal{L}_c^{-1}[\cdot]$ 是 $\mathcal{L}_c[\cdot]$ 的逆算子.其中 ω 是非零自由参数,在不动点方法里称为松弛因子, ω 合适的取值可以改善 FPM 方法在求解时的稳定性和收敛性,不同问题 ω 的值不同^[19].

最后建立迭代式:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathcal{T}[u_n] = u_n - \omega_{n+1} \cdot \mathcal{L}_c^{-1}[\mathcal{A}[u_n]], \\ \mathcal{B}_+[u_{n+1}] = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_c[u_{n+1}] = \mathcal{L}_c[u_n] - \omega_{n+1} \cdot \mathcal{A}[u_n], \\ \mathcal{B}_+[u_{n+1}] = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

于是,解的序列 $\{u_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 可以从上述迭代式中获得.当解的序列 $\{u_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 收敛时,容易看出该序列的极限 u^* 正好是原非线性算子 $\mathcal{A}[\cdot]$ 的零点,即

$$\begin{cases} \mathcal{A}[u^*] = 0, \\ \mathcal{B}_+[u^*] = 0; \end{cases} \quad (19)$$

此时,极限 u^* 也称为压缩映射 $\varpi[u]$ 的不动点.

可以看出不动点方法的基本思想是通过引入压缩映射,将一个复杂的非线性问题转化为求解一系列简单的线性问题,从而逼近原非线性问题.由于不同问题非线性算子 $\mathcal{A}[\cdot]$ 差别很大,对应的线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 也不同,因此不动点方法在实施时具有很大的灵活性,恰恰是这种灵活性给不动点方法在使用时带来很大的自由空间,使我们总能通过选取适当的 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 使迭代式(18)收敛.另外,在不动点方法框架中,引入松弛因子序列 $\{\varpi_n | n = 1, 2, \dots\}$ 又进一步增加了方法的鲁棒性,通过选取合适的松弛因子序列 $\{\varpi_n | n = 1, 2, \dots\}$ 可以极大地改善迭代式(18)的收敛性和稳定性.这里采用残差最快下降搜索算法^[22]来确定松弛因子序列 $\{\varpi_n | n = 1, 2, \dots\}$.首先引入 n 阶近似解 u_n 所对应的残差 R_n :

$$R_n = R_n(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n) = \int_{\Omega} (\mathcal{A}[u_n])^2 d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

其中, Ω 为自变量的定义域.从 R_n 的定义形式易看出 R_n 是一种全局残差,可以用来衡量各阶近似解 u_n 的精度.最优松弛因子的选取是使该残差 R_n 获得最小值.

例如,当 $n = 1$ 时, $R_1(\varpi_1)$ 只是 ϖ_1 的函数,最优松弛因子 $\varpi_{1, \text{opt}}$ 可以通过求解下述方程来获得:

$$dR_1/d\varpi_1 = 0. \quad (21)$$

接下来考虑 $n = 2$ 时,对应残差 $R_2(\varpi_1, \varpi_2)$ 依赖于 ϖ_1 和 ϖ_2 .由于 $\varpi_{1, \text{opt}}$ 已在前一步确定,那么最优松弛因子 $\varpi_{2, \text{opt}}$ 满足下述方程:

$$dR_2/d\varpi_2 = 0. \quad (22)$$

类似地,对第 n 阶近似解,对应残差 R_n 实际上只依赖于 ϖ_n ,于是 $\varpi_{n, \text{opt}}$ 的确定是使 R_n 取得最小值,即

$$dR_n/d\varpi_n = 0. \quad (23)$$

可以看到,所有松弛因子 $\{\varpi_n | n = 1, 2, \dots\}$ 都将较容易地按照这种方式相继确定.

2.2 线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$

考虑到方程(8)最高阶导数为3阶,本文尝试选取下述线性特征算子:

$$\mathcal{L}_C[g] = d^3g/d\xi^3 = g''', \quad (24)$$

并且建立如下迭代式:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C[g_{n+1}] = \mathcal{L}_C[g_n] - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{A}_g[g_n], \\ g_{n+1}(-1) = 0, g'_{n+1}(-1) = -1/2, g_{n+1}(1) = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'''_{n+1} = g'''_n - \varpi_{n+1} \left\{ \frac{(1-\xi)^5}{L^2} g'''_n + \right. \\ \left. (1-\xi)^2 \left[2(1+\xi+2g_n) - \frac{3}{L^2}(1-\xi)^2 \right] g''_n - \right. \\ \left. 4\beta(1-\xi) [(1-\xi)g'_n + 2(1+g_n)] g'_n - 4\beta g_n(g_n+2) \right\}, \\ g_{n+1}(-1) = 0, g'_{n+1}(-1) = -1/2, g_{n+1}(1) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (26)$$

正如文献[19]指出,一个问题的线性特征算子不是唯一的,这里只是选用了其中一种.

本问题残差 R_n 具体形式为

$$R_n = R_n(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{A}_f[f_n])^2 d\eta = \begin{cases} \frac{L}{8} \int_{-1}^{+1} \frac{(\mathcal{A}_g[g_n; \beta])^2}{(1-\zeta)^2} d\zeta, & 0 < \beta \leq 2, \\ \frac{L}{8} \int_{-1}^{+1} (1-\zeta)^2 (\mathcal{A}_g[g_n; 0])^2 d\zeta, & \beta = 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

其中的松弛因子序列 $\{\varpi_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 可以按照 2.1 小节介绍的残差最快下降搜索算法来确定。

2.3 初值

在不动点方法中关于迭代初始值的选取具有较大的自由空间与灵活性. 针对本问题, 这里给出一种较为方便的选择,

$$g_0 = (\zeta^2 - 1)/4.$$

其满足下面的线性特征方程:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_c[g_0] = 0, \\ g_0(-1) = 0, g_0'(-1) = -1/2, g_0(1) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

3 计算结果的讨论

正如前文所述, 不动点方法的基本思想是通过引入压缩映射, 将一个复杂的非线性问题(8)转变为一系列简单线性问题(26)的求解. 线性问题(26)的求解过程可以采用符号计算软件, 如 MATHEMATICA 编程自动进行求解. 下面给出最后计算结果.

表 1 不同 β 所对应的 $f_n''(0)$

Table 1 Non-dimensional wall shear stress $f_n''(0)$ as a function of β

β	$f_n''(0)$					
	present			White ^[4]	Motsa et al. ^[14]	Hartree ^[8]
	$n = 50$	$n = 250$	$n = 500$			
0.0	0.468 980 8	0.469 599 8	0.469 600 0	0.469 6	0.469 600	0.469 6
0.2	0.686 673 9	0.686 708 2	0.686 708 2	0.686 7	0.686 708	0.686 9
0.4	0.854 423 4	0.854 421 2	0.854 421 2	0.854 4	0.854 421	0.854 2
0.6	0.995 834 3	0.995 836 4	0.995 836 4	0.927 7	0.995 836	0.996 0
0.8	1.120 275	1.120 268	1.120 268	1.120 3	1.120 268	1.120 0
1.0	1.232 582	1.232 588	1.232 588	1.232 6	1.232 588	1.232 6
1.2	1.335 723	1.335 721	1.335 721	1.335 7	1.335 721	1.336 0
1.4	1.431 583	1.431 585	1.431 585	-	-	-
1.6	1.521 515	1.521 514	1.521 514	1.521 5	1.521 514	1.521 0
1.8	1.606 480	1.606 480	1.606 480	-	-	-
2.0	1.687 218	1.687 218	1.687 218	1.687 2	1.687 218	1.687 0

图 2 给出的是不同 β 值下各阶近似解 $f_n(\eta)$ 所对应的残差 R_n 收敛曲线, 从图上可以清楚看出随着迭代步数 n 的增加, 残差在稳步降低. 壁面无量纲剪切力 $f_n''(0)$ 的收敛曲线见图 3, 可以看出随着迭代步数 n 的增加不同 β 值所对应的 $f_n''(0)$ 皆趋于一常值. 不同 β 值对应的 $f_n''(0)$ 列于表 1, 从表中可以看出和文献[4, 8, 14]中给出的结果符合得非常好, 当迭代次数 $n > 250$ 时, $f_n''(0)$ 精确到 7 位有效数字的值已不再随迭代次数变化.

图 4 给出的是不同 β 值下各阶近似解 $f_n(\eta)$, $f_n'(\eta)$ 和 $f_n''(\eta)$ 的曲线. 从图中的 $f_n'(\eta)$ 曲线

可以清楚看出随着 β 的增加(即顺压梯度增加), $f'_n(\eta)$ 趋于势流 1 值更快,说明边界层厚度减小.

从 $f(\eta)$ 的渐近关系式(6)可以得到

$$M(\beta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f). \tag{30}$$

那么 $M(\beta)$ 的近似值可以采用下面的式子来获得:

$$M(\beta) \approx \eta - f_n(\eta), \quad \text{当 } \eta \text{ 取较大值时.} \tag{31}$$

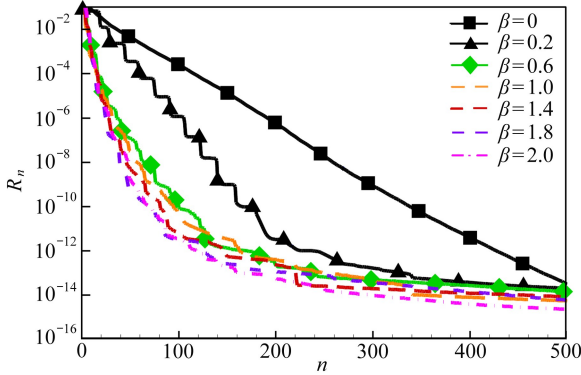


图 2 R_n 的收敛曲线

Fig. 2 The convergence history of R_n

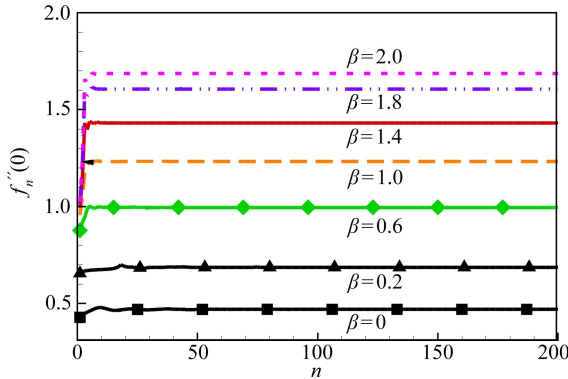


图 3 $f_n''(0)$ 的收敛曲线

Fig. 3 The convergence history of $f_n''(0)$

表 2 给出不同 β 值下式(31)给出的近似值 $M(\beta)$ 随着 η 的变化,可以清楚地看出当 $\eta \geq 5$ 时近似值 $M(\beta)$ 在 5 位有效数字内不再随 η 变化而改变,进一步当 $\eta \geq 7$ 时近似值 $M(\beta)$ 在 7 位有效数字内不再随 η 变化而改变.也就是说对于 Falkner-Skan 流动当 $\eta \geq 5$ 时可以认为流动对应为远场势流了.这也验证了在式(14) 里选取尺度因子 $L(\beta) = 5$ 的正确性.

边界层位移厚度 δ^* 和动量损失厚度 θ 有着明确的物理意义^[4]:

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f) = M, \tag{32}$$

$$\theta = \int_0^{+\infty} f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta = \frac{f''(0) - \beta \delta^*}{\beta + 1}. \tag{33}$$

从式(32)和(33)可以看出, δ^* 和 θ 最终只依赖于函数 $f(\eta)$ 的渐近特性(式(6)).表 3 给出 δ^* 和 θ 的数值,可以看出本文的结果与文献[23]中的结果吻合得很好.

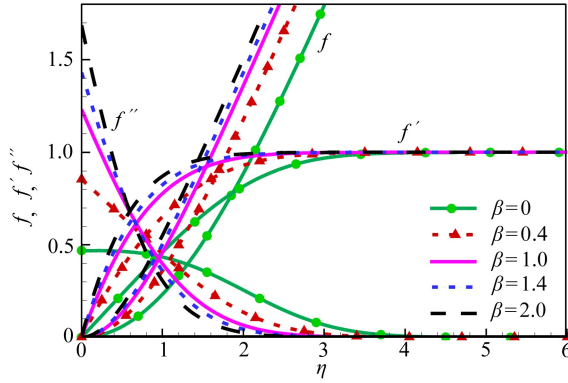
图4 $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ 和 $f''_n(\eta)$ 的分布曲线 ($n = 500$)Fig. 4 The distributions of $f_n(\eta)$, $f'_n(\eta)$ and $f''_n(\eta)$ ($n = 500$)

表2 解在远场的渐近特性

Table 2 The far field asymptotic property of the solution

β	$M(\beta) \approx \eta - f_n(\eta)$ ($n = 500$)						
	$\eta = 5$	$\eta = 6$	$\eta = 7$	$\eta = 8$	$\eta = 9$	$\eta = 10$	$\eta = 20$
0	1.216 765 0	1.216 780 0	1.216 781 0	1.216 781 0	1.216 781 0	1.216 781 0	1.216 781 0
0.2	0.984 155 4	0.984 158 5	0.984 158 5	0.984 158 5	0.984 158 5	0.984 158 5	0.984 158 5
0.4	0.852 633 2	0.852 634 2	0.852 634 2	0.852 634 2	0.852 634 2	0.852 634 2	0.852 634 2
0.6	0.763 971 4	0.763 971 8	0.763 971 8	0.763 971 8	0.763 971 8	0.763 971 8	0.763 971 8
0.8	0.698 680 1	0.698 680 2	0.698 680 2	0.698 680 2	0.698 680 2	0.698 680 2	0.698 680 2
1.0	0.647 900 3	0.647 900 5	0.647 900 5	0.647 900 5	0.647 900 5	0.647 900 5	0.647 900 5
1.2	0.606 898 1	0.606 898 1	0.606 898 1	0.606 898 1	0.606 898 1	0.606 898 1	0.606 898 1
1.4	0.572 867 7	0.572 867 7	0.572 867 7	0.572 867 7	0.572 867 7	0.572 867 7	0.572 867 7
1.6	0.544 021 8	0.544 021 8	0.544 021 8	0.544 021 8	0.544 021 8	0.544 021 8	0.544 021 8
1.8	0.519 158 2	0.519 158 2	0.519 158 2	0.519 158 2	0.519 158 2	0.519 158 2	0.519 158 2
2.0	0.497 433 7	0.497 433 7	0.497 433 7	0.497 433 7	0.497 433 7	0.497 433 7	0.497 433 7

表3 边界层位移厚度与动量损失厚度

Table 3 Displacement thickness δ^* and momentum thickness θ of the boundary layer

β	δ^*		θ	
	present ($n = 500$)	Zhao et al. ^[23]	present ($n = 500$)	Zhao et al. ^[23]
0	1.216 781 0	1.216 8	0.469 600 0	0.469 6
0.2	0.984 158 5	0.984 2	0.408 230 4	0.408 2
0.4	0.852 634 2	0.852 6	0.366 691 1	0.366 7
0.6	0.763 971 8	0.764 0	0.335 908 3	0.336 0
0.8	0.698 680 2	0.698 7	0.311 846 6	0.311 8
1.0	0.647 900 5	0.647 9	0.292 343 8	0.292 3
1.2	0.606 898 1	0.607 0	0.276 110 6	0.276 0
1.4	0.572 867 7	-	0.262 320 9	-
1.6	0.544 021 8	0.544 0	0.250 415 0	0.250 0
1.8	0.519 158 2	-	0.239 998 3	-
2.0	0.497 433 7	0.498 0	0.230 783 5	0.231 0

4 结 论

本文研究了 Falkner-Skan 流动方程.为了消除该问题半无限大定义域及渐近边界条件带来的求解困难,文中对自变量和函数同时引入变换式,从而将原无界区域问题转化为一个有限区间上的非线性两点边值问题.接下来采用 FPM 对该边值问题进行求解,得到原 Falkner-Skan 流动方程高精度的近似解,并且该近似解的精度在 FPM 框架下可以很容易地逐步提高.计算结果同时表明 FPM 是一种获得复杂非线性微分方程近似解的有效方法.

参考文献(References):

- [1] Wang C Y. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1989, **42**(11S): S269-S282.
- [2] Wang C Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, **23**: 159-177.
- [3] Falkner V M, Skan S W. Some approximate solutions of the boundary layer equations[J]. *Philosophical Magazine*, 1931, **12**: 865-896.
- [4] White F M. *Viscous Fluid Flow*[M]. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [5] Schlichting H, Gersten K. *Boundary-Layer Theory*[M]. Springer Verlag, 2000.
- [6] Blasius H. Grenzsichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung[J]. *Z Math Phys*, 1908, **56**: 1-37.
- [7] Hiemenz K. Die grenzschicht an einem in den gleichformigen flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden kreiszylinder[J]. *Dinglers Polytech J*, 1911, **326**: 321-410.
- [8] Hartree D R. On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1937, **33**(2): 223-239.
- [9] Asaithambi A. A finite-difference method for the Falkner-Skan equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, **92**(2/3): 135-141.
- [10] Fazio R. Blasius problem and Falkner-Skan model: Töpfer's algorithm and its extension[J]. *Computers & Fluids*, 2013, **73**: 202-209.
- [11] Boyd J P. The Blasius function: computations before computers, the value of tricks, undergraduate projects, and open research problems[J]. *SIAM Review*, 2008, **50**(4): 791-804.
- [12] Boyd J P. The Blasius function in the complex plane[J]. *Experimental Mathematics*, 1999, **8**(4): 381-394.
- [13] LIAO Shi-jun. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **385**: 101-128.
- [14] Motsa S S, Sibanda P. An efficient numerical method for solving Falkner-Skan boundary layer flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, **69**(2): 499-508.
- [15] Marinca V, Ene R D, Marinca B. Analytic approximate solution for Falkner-Skan equation[J]. *The Scientific World Journal*, 2014, **2014**: 617453.
- [16] Yun B I. New approximate analytical solutions of the Falkner-Skan equation[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, **2012**: 170802.
- [17] XU Ding, XU Jing-lei, XIE Gong-nan. Revisiting Blasius flow by fixed point method[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, **2014**: 953151.
- [18] Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I: Fixed-Point Theorems* [M]. Springer, 1986.

- [19] XU Ding, GUO Xin. Fixed point analytical method for nonlinear differential equations[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2013, **8**(1): 011005.
- [20] XU Ding, GUO Xin. Application of fixed point method to obtain semi-analytical solution to Blasius flow and its variation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **224**: 791-802.
- [21] XU Ding, WANG Xian, XIE Gong-nan. Spectral fixed point method for nonlinear oscillation equation with periodic solution[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, **2013**: 538716.
- [22] 郭欣, 王娴, 许丁, 谢公南. 混合层无粘稳定性分析的 Legendre 级数解[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(8): 782-794. (GUO Xin, WANG Xian, XU Ding, XIE Gong-nan. A Legendre series solution to Rayleigh stability equation of mixing layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(8): 782-794. (in Chinese))
- [23] 赵学端, 廖其奠. 粘性流体力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1992. (ZHAO Xue-duan, LIAO Qidian. *Viscous Fluid Flow*[M]. Beijing: China Machine Press, 1992. (in Chinese))

Application of the Fixed Point Method to Solve the Nonlinear Falkner-Skan Flow Equation

XU Ding¹, XIE Gong-nan²

(1. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures

(Xi'an Jiaotong University), Xi'an 710049, P.R.China;

2. Engineering Simulation and Aerospace Computing (ESAC),

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

(Contributed by XIE Gong-nan, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The Falkner-Skan flow equation is a strongly nonlinear differential equation, which describes the flow around a wedge. In order to overcome the difficulties originated from the semi-infinite interval and asymptotic boundary condition in this flow problem, transformations were simultaneously conducted for both the independent variable and the corresponding function to convert the problem to a 2-point boundary value one within a finite interval. The deduced new-form nonlinear differential equation was subsequently solved with the fixed point method (FPM). The present analytical results obtained with the FPM agree well with the previous referential numerical ones. The accuracy of the present solution is conveniently improved through iteration under the FPM framework, which shows that the FPM makes a promising tool for nonlinear differential equations.

Key words: Falkner-Skan flow; fixed point method; nonlinear differential equation; boundary value problem

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11102150)