

分数阶振子方程基于变分迭代的 近似解析解序列*

鲍四元¹, 邓子辰²

(1. 苏州科技学院 土木工程学院 工程力学系, 江苏 苏州 215011;
2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(我刊编委邓子辰来稿)

摘要: 在粘弹性介质中的阻尼振动中引入分数阶微分算子,建立分数阶非线性振动方程.使用了分数阶变分迭代法(FVIM),推导了Lagrange乘子的若干种形式,对线性分数阶阻尼方程,分别对齐次方程和正弦激励力的非齐次方程应用FVIM得到近似解析解序列.以含激励的Bagley-Torvik方程为例,给出不同分数阶次的位移变化曲线.研究了振子运动与方程中分数阶导数阶次的关系,这可由不同分数阶次下记忆性的强弱来解释.计算方法上,与常规的FVIM相比,引入小参数的改进变分迭代法能够大大扩展问题的收敛区段.最后,以一个含分数导数的Van der Pol方程为例说明了FVIM方法解决非线性分数阶微分问题的有效性和便利性.

关键词: Caputo 分数阶微分; 非线性动力学; 分数阶振子方程; 分数阶变分迭代法; 近似解析解

中图分类号: O175.14; O321 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.004

引 言

到目前为止,受许多物理现象的启发,大量的研究使用了分数阶微分来模拟自然现象及工程问题,世界范围内的学者们应用含分数阶导数的本构关系和分数阶系统方程在不同领域做出了越来越多的贡献,这些新模型在特定领域比起经典的整数阶模型更胜一筹^[1-4].如许多文献均使用了分数阶微分作为粘弹性材料的数学模型,这主要归功于分数阶材料在工程领域的广泛应用.又如,分数阶微分在保密通信、工程控制、图像处理等方面获得可喜的发展及广泛的关注.

分数阶导数和积分为描述不同事物的记忆性和遗传性提供了一个有力的工具,这是分数阶模型最明显的特征之一.但是大多数分数阶微分方程没有精确的解析解,因此众多学者致力于求解分数阶微分方程的功能强大且稳定的数值或解析方法.专著[2,4]作了较为全面的介绍,这些方法包括差分法、同伦分析法(HAM)、Adomian分解法、同伦摄动法、变分迭代法

* 收稿日期: 2014-05-30; 修订日期: 2014-11-27

基金项目: 国家自然科学基金(11202146);江苏省青蓝工程;江苏省高校优势学科建设工程

作者简介: 鲍四元(1980—),男,安徽人,副教授(通讯作者. E-mail: bsiyuan@126.com);

邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

(VIM)等,文献[5-7]对其中若干方法做了综述.在寻求线性和非线性问题的近似解时变分迭代法是一种有效的方法,所得解析解的序列能够不断逼近真实解.许多学者使用 VIM 解决问题时提出改进方法,如文献[8-12]讨论了变分迭代法针对计算量、初值选取、迭代格式(尤其是其中拉氏乘子的确定)等方面的若干改进方法.文献[8]基于 He 多项式对 Van der Pol 整数阶非线性方程进行了研究,所得方法可消除长期项的影响,且方法的精度很高.文献[9-10]在常规的变分迭代格式中引入小参数,从而大大延长了收敛区间,作者还基于不动点定理给出该法收敛性的证明.文献[11]给出一种在计算上能够减少产生不必要的高次项解的方法.这些都显示了变分迭代法具有极大的发展和应用潜力.

就分数阶问题而言,文献[13]基于 GL 分数阶导数的定义研究了分数阶 Bagley-Torvik 方程的数值计算方法.已有学者^[14-15]基于数值方法,如差分方法、Runge-Kutta(龙格-库塔)法等对含分数阶导数的动力学问题进行了若干研究.文献[16]在状态空间中对分数阶系统进行了研究,使用的数值方法是分数阶线性多步法.注意到文献[13-16]均使用了 RL(GL)定义,因为该定义便于进行数值计算.但工程实际中更多使用 Caputo 分数阶导数,因为它具有明确的物理意义^[2,17].

申永军等^[18]以含分数阶微分项的 Duffing 振子为对象,通过平均法得到了系统的一阶近似解,研究分数阶微分项中的系数和阶次对 Duffing 振子超谐共振的影响.Pálfalvi^[19]基于 Adomian 分解法给出含分数阶导数且具有正弦激励的振动问题的解析解,但其表达式相对复杂.文献[20]利用微分方程的特征方程和特征根给出 Bagley-Torvik 方程的一种解形式.刘艳芹^[21]进一步采用 Adomian 法研究了非线性振子方程.但对含分数阶微分项的振子方程,至今还未发现使用变分迭代法进行研究的文献.

处理分数阶问题时,分数阶变分迭代法^[22-23]相对其它解析方法具有较大的优势,即过程简洁,易于编程,计算量相对于 Adomian 分解法或其它迭代法较小,且迭代一定次数后能够收敛于准确解,其收敛性的证明参见文献[24-25].最近的研究还表明,变分迭代法可以从 Green 函数和不动点迭代角度理解^[26].使用分数阶变分迭代法的一个要点在于分数阶变分迭代格式中的 Lagrange 因子的确定.

本文基于分数阶变分迭代法研究含有 Caputo 分数阶导数的振子方程.鉴于分数阶导数在振子运动研究中的重要性,本文将分数阶导数引入到黏弹性阻尼介质的振子运动中^[21]建立模型,具体如下:

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) + g(u(t))D_t^\beta u(t) + u(t) = f(t), \\ u(0) = a, u'(0) = b, \end{cases} \quad (1)$$

其中,位移 u 是时间 t 的函数, $g(u(t))$ 为振子系统的非线性项, a, b 表示初始位移和速度, $f(t)$ 为外部力. $D_t^\alpha u(t)$ 表示对时间 t 的 α 阶 ($1 < \alpha \leq 2$) 的 Caputo 分数阶导数,具体参见下面的定义 2. 分数阶导数常见的定义还有 RL(或 GL)定义.

首先给出 4 个相关的基本定义.

定义 1 关于函数 $f(t)$ 的分数阶积分的定义如下:

$$I_{a,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

定义 2 关于函数 $f(t)$ 的 Riemann-Liouville 型分数阶导数的定义如下:

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$t > a, m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbf{N},$$

式中, ${}^R D_t^\alpha$ 是分数阶 RL 导数算子, α 是阶次, 且 $\alpha > 0$, Γ 是 Gamma 函数.

定义 3 关于函数 $f(t)$ 的 Caputo 型分数阶导数的定义如下:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad t > a, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbf{N}, \quad (4)$$

式中, ${}^C D_t^\alpha$ 是分数阶 Caputo 导数算子.

定义 4 对 ${}^C D_t^\alpha u$ 的拉氏变换如下:

$$L[{}^C D_t^\alpha u] = s^\alpha \bar{u}(s) - \sum u^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k}, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (5)$$

其中, L 是拉氏算子, 且 $\bar{u}(s) = L[u(t)]$.

实际应用中, 定义式(3), (4)中积分的下限一般取 $a = 0$. 函数的 RL 分数阶导数与 Caputo 分数阶导数在一定程度上可以等效, 其前提条件参见文献[2]. 两者也有明显区别, 如常数的两种导数值不等, 另外两种定义的拉氏变换结果也不同^[2].

1 分数阶变分迭代法中 Lagrange 乘子的表达式

假设作拉氏变换时, $\bar{h}(s) = L[h(t)]$, 且 $\bar{g}(s) = L[g(t)]$, 则卷积定理如下:

$$h(t) * g(t) = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau) d\tau, \quad (6)$$

且

$$\bar{h}(s)\bar{g}(s) = L[h(t) * g(t)]. \quad (7)$$

考虑如下的分数阶微分方程:

$${}^C D_t^\alpha u + R[u] + N[u] = f(\tau), \quad (8)$$

其中, $R[u]$ 是线性项, 而 $N[u]$ 是非线性项.

通过 RL 积分得到式(8)对应的校正泛函是

$$u_{n+1} = u_n + {}_0 I_t^\alpha \lambda(t, \tau) [{}^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)], \quad (9)$$

其中, $R[u_n], N[u_n]$ 都是限制性变分.

对式(9)两边同时取拉氏变换式如下:

$$\bar{u}_{n+1}(s) = \bar{u}_n(s) + L[{}_0 I_t^\alpha \lambda(t, \tau) ({}^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau))]. \quad (10)$$

注意到 RL 积分项 ${}_0 I_t^\alpha \lambda(t, \tau) {}^C D_t^\alpha u_n$ 可理解为一种卷积, 令校正泛函式(10)关于 $\bar{u}_n(s)$ 具有驻值, 即通过变分运算^[22-23], 确定 Lagrange 乘子如下:

$$\lambda(t, \tau) = -1. \quad (11)$$

式(11)代入式(9)得

$$u_{n+1} = u_n - {}_0 I_t^\alpha [{}^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)]. \quad (12)$$

实际上, 变分迭代关系式(12)可化为常规的 Riemann 积分, 即

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \lambda(t, \tau) [{}^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)] d\tau \quad (t > 0, \alpha > 0), \quad (13)$$

其中, $R[u_n], N[u_n]$ 对应于限制性变分, 且 Lagrange 乘子由下式确定:

$$\lambda(t, \tau) = \frac{(-1)^\alpha (\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (14)$$

结论式(13)和(14)适用于 α 为任意正实数.

依照式(13)迭代, 当迭代次数趋近无穷时, 会得到精确解, 即 $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$.

文献[27]给出 $R[u_n]$ 中含有更多项(即求泛函驻值时这些项需参与变分)时对应的拉氏乘子.如对于多阶分数阶微分方程:

$${}_0^C D_t^\gamma u + {}_0^C D_t^\beta u + f(t, u) = 0 \quad (0 < t, 0 < \beta < \gamma), \tag{15}$$

其变分迭代格式可采用

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t (t - \tau)^{\gamma-1} E_{\gamma-\beta, \gamma}(- (t - \tau)^{\gamma-\beta}) [{}_0^C D_\tau^\gamma u + {}_0^C D_\tau^\beta u + f(\tau, u)] d\tau, \tag{16}$$

其中 $E_{\alpha, \beta}(z)$ 为双变量 Mittag-Leffler 函数, 即

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

式中 α, β 是常数.

以上述变分迭代格式为基础, 引入小参数 γ 改进, 得到对应于式(13)的改进变分迭代格式^[9-10]为

$$u_{n+1} = u_n + \gamma \int_0^t \lambda(t, \tau) [{}_0^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)] d\tau \quad (t > 0, \alpha > 1), \tag{17}$$

并给出收敛性证明.其中小参数 γ 一般取 $0 < \gamma < 1$, 但 γ 并非越小越好, 因为 γ 过小会引起收敛很慢.

2 含分数阶导数项的微分方程的近似解析解

2.1 齐次方程

为了研究含分数阶导数项的微分方程, 用变分迭代法讨论如下简单的分数阶自由阻尼振子方程:

$$\begin{cases} u_{tt} + {}_0^C D_t^\alpha u + u = 0 & (1 \leq \alpha < 2), \\ u(0) = a, u'(0) = b. \end{cases} \tag{18}$$

式(18)中最高微分项次数是2, 选 u 和 ${}_0^C D_t^\alpha u$ 为限制性变分项, 由式(14)和(15)知变分迭代格式是

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t (t - \tau) [u_{n\tau\tau}(\tau) + {}_0^C D_\tau^\alpha u_n(\tau) + u(\tau)] d\tau. \tag{19}$$

设初始条件式(18)中 $a = 1, b = 0$.

以 $u(t) = 1$ 为初值基于式(19)进行若干次迭代, 可得如下几组近似解:

$$\begin{cases} u_0(t) = 1, \\ u_1(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2, \\ u_2(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{\Gamma(5 - \alpha)} t^{4-\alpha}, \\ u_3(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{720} t^6 + \frac{1}{\Gamma(5 - \alpha)} t^{4-\alpha} - \\ \quad \frac{2}{\Gamma(7 - \alpha)} t^{6-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(7 - 2\alpha)} t^{6-2\alpha}, \\ \vdots \end{cases} \tag{20}$$

借助于符号运算软件, 可得更多次迭代后的近似解.

变分迭代时的拉氏乘子可作改变,如基于式(19)所选泛函式(可参考式(10))中线性项 u 参与变分,即仅有 ${}_0^C D_t^\alpha u$ 为限制性变分项,则变分迭代法中的 Lagrange 乘子为 $\lambda(t, \tau) = \sin(\tau - t)$, 相应的迭代格式为

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \sin(\tau - t) [u_{n\tau\tau}(\tau) + {}_0^C D_\tau^\alpha u_n(\tau) + u_n(\tau)] d\tau. \quad (21)$$

但是采用该积分格式时,不易得到其中类似 $\int_0^t \sin(\tau - t) \tau^{n-\alpha} d\tau$ (其中 n 为自然数)的积分结果的解析形式,故这里不再讨论.

2.2 含激励项的非齐次方程

首先考虑右端为正弦函数激励项的含分数阶导数的如下简单微分方程:

$$u_{tt} + {}_0^C D_t^\alpha u + u = \sin t, \quad (22)$$

其对应于式(13)的变分迭代格式为

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (\tau - t) [u_{n\tau\tau}(\tau) + {}_0^C D_\tau^\alpha u_n(\tau) + u(\tau) - \sin \tau] d\tau, \quad (23)$$

其中 Lagrange 乘子是 $\lambda(t, \tau) = \tau - t$.

为方便计算,设初值条件式为 $u_0(t) = u_0'(0) = 0$, 经计算得第一阶近似结果为

$$u_1(t) = t - \sin t. \quad (24)$$

根据 Taylor 展开公式把 $u_1(t)$ 写成如下多项式级数形式:

$$u_1(t) = \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \frac{t^9}{9!} + \dots + (-1)^{(k+1)/2} \frac{t^k}{k!} + \dots, \quad (25)$$

其中 k 为奇数.令

$$W_n(\tau) = u_{n\tau\tau}(\tau) + {}_0^C D_\tau^\alpha u_n(\tau) + u(\tau) - \sin \tau, \quad (26)$$

则

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t (t - \tau) W_n(\tau) d\tau. \quad (27)$$

把式(24)代入式(26),得到

$$W_1(\tau) = \tau - \sin \tau - {}_0^C D_\tau^\alpha (\sin \tau). \quad (28)$$

由于 $1 \leq \alpha < 2$, 故

$${}_0^C D_\tau^\alpha (\sin \tau) = \frac{\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{\tau^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} + \frac{\tau^{7-\alpha}}{\Gamma(8-\alpha)} - \frac{\tau^{9-\alpha}}{\Gamma(10-\alpha)} + \dots. \quad (29)$$

由式(27)、(28)和式(29),可得

$$u_2(t) = 2t - \frac{1}{6} t^3 - 2\sin t + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j \frac{1}{\Gamma(2j+4-\alpha)} t^{2j+3-\alpha}. \quad (30)$$

继续按照式(25)迭代得

$$u_3(t) = 3(t - \sin t) - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{120} t^5 + \sum_{j=2}^{(k+3)/2} b_j t^{2j+1-\alpha} + \sum_{j=3}^{(k+3)/2} a_j t^{2j+1-2\alpha}, \quad (31)$$

式中

$$a_j = (-1)^j \frac{1}{\Gamma(2j+2-2\alpha)}, \quad b_j = (-1)^{j-1} \frac{1}{\Gamma(2j+2-\alpha)}, \quad \text{且 } k = \infty.$$

但数值计算中 k 取为一个正整数.

而下一次迭代计算的结果是

$$u_4(t) = 4(t - \sin t) - \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{60}t^5 - \frac{t^7}{5\,040} + \sum_{j=1}^{(k+5)/2} e_{4j}t^{2j+3-\alpha} + \sum_{j=2}^{(k+5)/2} d_{4j}t^{2j+3-2\alpha} + \sum_{j=3}^{(k+5)/2} c_{4j}t^{2j+3-3\alpha}, \quad (32)$$

其中常数 c_{4j}, d_{4j}, e_{4j} 与式(25)中的 k 有关,可由程序得到,这里略去.

推广以上若干次的迭代结果,可得第 i 次迭代解的一般形式如下:

$$u_i(t) = i(t - \sin t) + \sum_{j=1}^N b_{2j+1}t^{2j+1} + \sum_{j=1}^{N+(k-3)/2} a_{1,j}t^{2j+3-\alpha} + \sum_{j=2}^{N+(k-3)/2} a_{2,j}t^{2j+1-2\alpha} + \dots + \sum_{j=i}^{N+(k-3)/2} a_{i,j}t^{2j+3-i\alpha}, \quad (33)$$

或简记为

$$u_i(t) = N(t - \sin t) + \sum_{j=1}^{N-1} b_{2j+1}t^{2j+1} + \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=i}^{N+(k-3)/2} a_{i,j}t^{2j+3-i\alpha}. \quad (34)$$

式(34)中, N 表示迭代次数(为避免与式中求和的参数 i 混淆,式(34)右端采用 N 表示),而常数 k 表示 $\sin t$ 的 Taylor(泰勒)展开截取式的最高次数.如果 k 取 3,则第 4 次迭代解(迭代次数 $N = 4$)

$$u_4 = 4t - 4\sin t - \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{60} - \frac{t^7}{5\,040} + \frac{t^{9-3\alpha}}{\Gamma(10-3\alpha)} - \frac{t^{11-3\alpha}}{\Gamma(12-3\alpha)} + \frac{t^{7-2\alpha}}{\Gamma(8-2\alpha)} - \frac{2t^{11-2\alpha}}{\Gamma(12-2\alpha)} - \frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} + \frac{3t^{7-\alpha}}{\Gamma(8-\alpha)} - \frac{t^{9-\alpha}}{\Gamma(10-\alpha)} - \frac{t^{11-\alpha}}{\Gamma(12-\alpha)}. \quad (35)$$

如果 $\sin t$ 的 Taylor 展开项中 k 取 5,则

$$u'_4 = u_4 + \frac{t^{13-3\alpha}}{\Gamma(14-3\alpha)} + \frac{2t^{13-2\alpha}}{\Gamma(14-2\alpha)} + \frac{2t^{11-2\alpha}}{\Gamma(12-2\alpha)} + \frac{t^{13-\alpha}}{\Gamma(14-\alpha)} + \frac{2t^{11-\alpha}}{\Gamma(12-\alpha)} - \frac{3t^{9-\alpha}}{\Gamma(10-\alpha)}. \quad (36)$$

比较 u_4 和 u'_4 发现:采用变分迭代格式积分时,其中 $\sin t$ 需截取一定的项来近似,项数的改变会影响 u_4 中已经有的一些项,同时会新增加若干高次项.

2.3 非线性 Van der Pol 方程

考虑如下分数阶非线性 Van der Pol 振子方程:

$${}_0^c D_t^\alpha u - u + u^2 + (u_t)^2 - 1 = 0 \quad (1 < \alpha \leq 2), \quad (37)$$

初值条件 $u(0) = a, u'(0) = b$.

应用分数阶变分迭代法求解,初值选为 $u_0 = a + bt$.该问题的变分迭代格式如下:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t, \tau) [{}_0^c D_t^\alpha u_n(\tau) + u_n^2(\tau) + u_n^2(\tau) - u_n(\tau) - 1] d\tau, \quad (38)$$

其中,拉氏算子在计算时采用 $\lambda(t, \tau) = -\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.具体应用参见后面的算例 4.

3 算 例

3.1 算例 1

含正弦函数外载荷(激励)的分数阶振子,式(18)中取 $\alpha = 1.5, a = 1, b = 0$.

迭代计算的结果主要由 Taylor 展开截取式的次数(即指数) k 和迭代次数 N 共同决定.当 α

$\alpha = 1.5$ 时, 图 1 显示两组情况的结果如下: 1) $k = 7$, 迭代次数 $N = 12$ 至 32 次的结果; 2) $k = 17$, 迭代次数 $N = 26$ 至 32 次的结果. 图 2 给出不同迭代次数时解曲线的收敛过程, 其中 Taylor 展开式 (25) 中 $k = 17$.

图 2 显示: 当 $t < 3$ 时, 至少需要 10 次以上的迭代解能够趋近真实解; 而 $t < 5$ 时, 至少需要迭代 16 次, 所得解能够趋近真实解. 图 3 显示了不同 Taylor 展开项数时迭代解曲线的对比 (迭代次数均为 32), 可见 $k \geq 17$ 能够使所得解在 $t \in [0, 5]$ 时较好地逼近精确解.

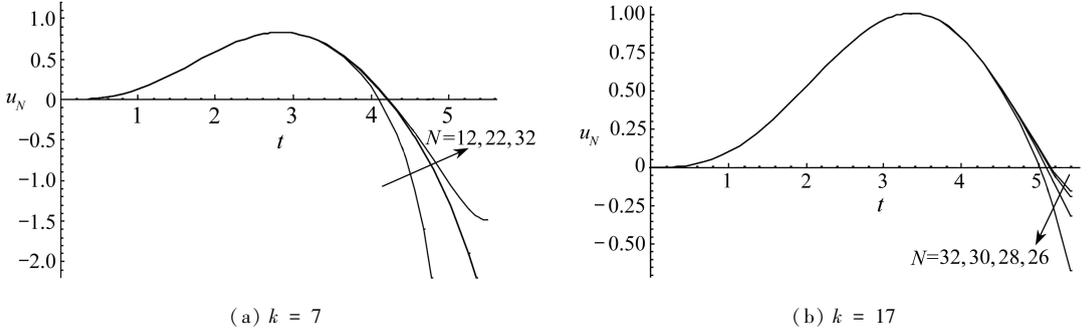


图 1 不同 Taylor 展开项数时解对应的曲线 ($\alpha = 1.5$)

Fig. 1 Curves of the solution for different numbers of terms in Taylor's expansion ($\alpha = 1.5$)

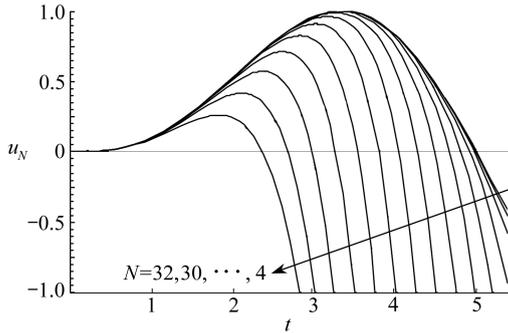


图 2 不同迭代次数解对应曲线的收敛 ($\alpha = 1.5, k = 17$)

Fig. 2 Curves of the solution for different numbers of iteration times ($\alpha = 1.5, k = 17$)

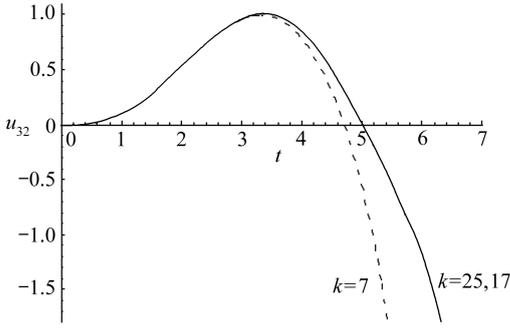
为了改善使用普通分数阶变分迭代法中所得收敛解的收敛区间较小的问题, 这里使用了引入小参数迭代格式的解 (u_{32}), 并对取不同项的 Taylor 展开形式 ($k = 17, 25, 33$) 作了比较. 可见使用小参数迭代格式能够使所得解的收敛区间扩展 2 倍, 即由 $t \in [0, 5]$ 拓展到 $t \in [0, 10]$, 其中 $\gamma = 0.15$. 图 4 还显示为了使迭代解能较好地逼近精确解, 相应的 Taylor 展开需要取更多的项, 如图中 k 取 25 的解较 k 取 17 精确, 而普通迭代格式收敛时 k 仅需不小于 17 (见图 4), 但其收敛于真解的区间较小.

引入小参数 $\gamma = 0.15$ 后, 在同等条件下 (即相同的迭代步数 N , 非齐次项 Taylor 展开时截取相同的次数 k), 新的迭代格式可大大扩大变分迭代解的收敛区间. 计算中发现: $\alpha = 1.5$ 时, 引入小参数后的迭代格式仅需 20 次可得无小参数格式 32 次迭代解的精度, 而且含小参数的迭代格式大大拓展了收敛区间, 这显示引入小参数后迭代格式更加强大和有效.

为研究不同分数阶次时的解, 这里把 α 的取值范围由 $1 \leq \alpha < 2$ 扩展为 $0 < \alpha < 2$, 易知对本算例, 迭代解的形式仍然可使用式 (34). 图 5 给出 α 从 0.5 以 0.25 递增到 1.75 时的 6 组曲线. 其中 $\alpha = 1$ 时微分方程式 (22) 转化为普通的整数阶微分方程, 易得其解析解的曲线与本文

方法所得曲线完全一致,这也验证了本文方法的一般性。

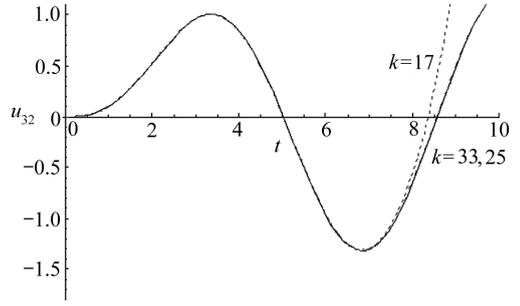
图 5 中曲线显示,对该振子受迫振动方程, α 越大,振子的振动剧烈程度越大,即影响越明显,或理解为位移响应受前一阶段的影响小,即记忆性越强。



$\alpha = 1.5, N = 32$

图 3 不同 Taylor 展开项数时解曲线的对比

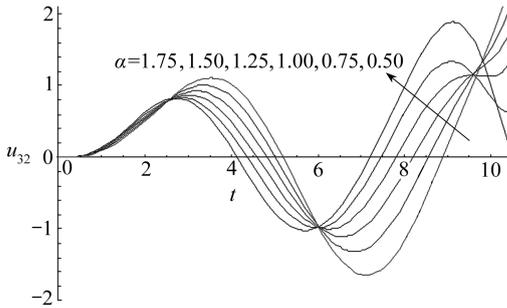
Fig. 3 Curves of the solution for different numbers of terms in Taylor's expansion



$\alpha = 1.5, \gamma = 0.15, N = 32$

图 4 引入小参数 ($\gamma = 0.15$) 迭代格式的解曲线

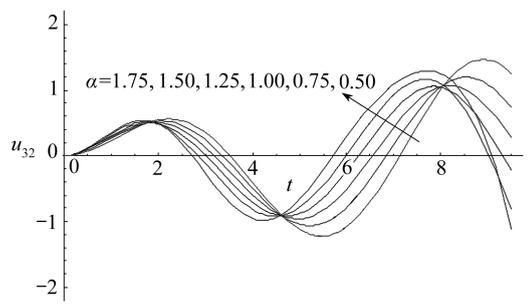
Fig. 4 Curves of the solution for the iteration scheme with a small parameter ($\gamma = 0.15$)



$\gamma = 0.15, k = 33, N = 32$

图 5 不同分数阶次时的解对应曲线

Fig. 5 Curves of the solution for different fractional orders



$\gamma = 0.15, k = 18, N = 32$

图 6 不同分数阶次时解对应的曲线

Fig. 6 Curves of the solution for different fractional orders

3.2 算例 2

微分方程(22)右端改为余弦函数激励项,即

$$u_{tt} + {}_0^C D_t^\alpha u + u = \cos t \quad (0 < \alpha < 2), \tag{39}$$

其中 $0 < \alpha < 2$, 初值条件仍采用 $u_0(t) = u_0(0) = 0$, 经计算得第一阶近似结果为

$$u_1(t) = 1 - \cos t. \tag{40}$$

根据 Taylor 展开公式把 $u_1(t)$ 写成如下多项式级数形式:

$$u_1(t) = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \frac{t^8}{8!} + \dots + (-1)^{(k/2)+1} \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (k = 2n). \tag{41}$$

迭代解的形式类似式(34),由符号运算软件得到,这里不再列出.迭代计算的结果主要由 Taylor 展开截取式的次数(即指数) k 和迭代次数 N 共同决定.图 6 显示了分数阶次 α 从 0.5 以级差 0.25 递增至 1.75 时的 6 组曲线,其中 Taylor 展开式(41)中 $k = 18$.

3.3 算例 3

考虑如下具有分数阶阻尼的振动方程^[19,28]:

$$D^2 x(t) + \frac{c}{m} {}_0^C D_t^\alpha x(t) + \frac{k}{m} x(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (0 < \alpha < 2), \tag{42}$$

$$x(0) = \frac{1}{4}, \quad x'(0) = 0, \quad (43)$$

其中 $D = d/dt$ 是微分算子, 方程(42)可转化为

$$D^2 x(t) + 2\mu\omega_n^{2-\alpha} {}_0^C D_t^\alpha x(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (0 < \alpha < 2), \quad (44)$$

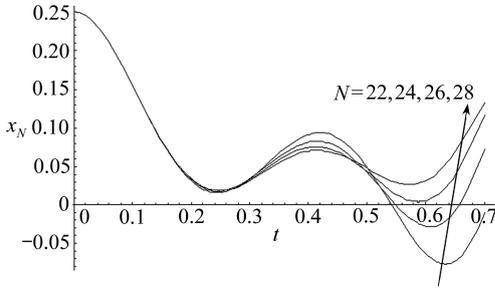
式中 $2\mu\omega_n^{2-\alpha} = \frac{c}{m}$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m} x(t)$.

参数值如下:

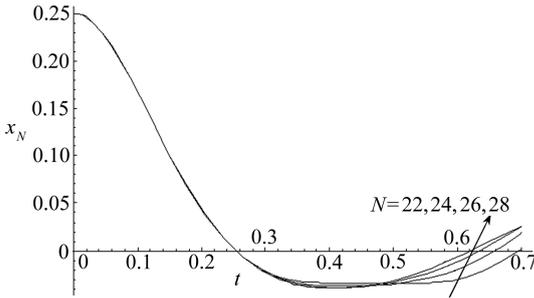
$$\mu = 0.5, \omega_n = 10, m = 1, f_0 = 1, \omega_e = 4\pi,$$

取 3 组 α 值: ① $\alpha = 0.5$; ② $\alpha = 1.0$; ③ $\alpha = 1.5$. 计算中使用了含有小参数的变分迭代格式, 其中 γ 取 0.16.

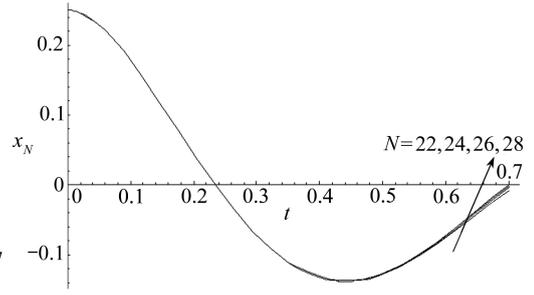
所得解的若干曲线见图 7、图 8. 注意, 所得曲线与已有文献的曲线变化趋势类似, 但具体值有所区别, 这是由于采用的分数阶导数定义不同所致. 文献[19, 28]中使用了便于数值计算的 RL 定义, 而本文采用的 Caputo 分数导数便于工程应用.



(a) $\alpha = 0.5$



(b) $\alpha = 1.0$



(c) $\alpha = 1.5$

图 7 $\alpha = 0.5, 1.0$ 和 1.5 时不同迭代次数解的曲线

Fig. 7 Curves of the solution for different numbers of iteration times, $\alpha = 0.5, 1.0$ and 1.5

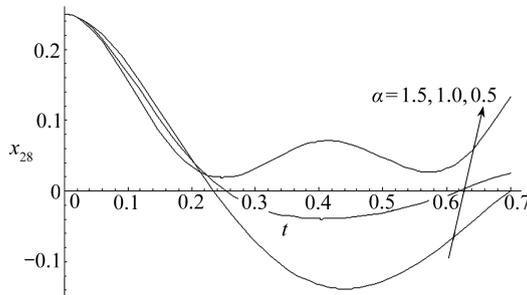


图 8 不同 α 时解的曲线

Fig. 8 The curves of $x(t)$ for different values of α

3.4 算例 4

考虑分数阶非线性 Van der Pol 振子方程式(37). 设初值条件中 $a = 2, b = 0$. 以 $u_0 = 2$ 为初值代入迭代公式(38). 基于自编的符号运算程序, 得到结果如下:

$$\begin{cases} u_1 = 2 - \frac{2t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \\ u_2 = 2 - \frac{2t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{3t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{\alpha^2 t^{3\alpha-2} \Gamma(2\alpha - 1)}{\Gamma^2(1 + \alpha) \Gamma(3\alpha - 1)} - \\ \frac{t^{3\alpha} \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(1 + \alpha) \Gamma(3\alpha + 1)}, \\ u_3 = 2 - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{9t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{5\alpha^2 t^{3\alpha-2} \Gamma(2\alpha - 1)}{\Gamma^2(1 + \alpha) \Gamma(3\alpha - 1)} - \frac{9t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \dots, \end{cases} \quad (45)$$

u_3 未完全罗列是由于项数较多,这里给出 $\alpha = 1.5$ 时解 u_3 小数形式的表达式:

$$\begin{aligned} u_3 = & 2 + 1.5t^3 + 1.096\ 65t^4 + 0.278\ 521t^5 + 0.123\ 522t^6 + 0.071\ 903\ 9t^7 + \\ & 0.002\ 508\ 73t^9 - (2.256\ 76t^{1.5} + 1.915\ 6t^{2.5} + 0.743\ 318t^{3.5} + \\ & 0.601\ 435t^{4.5} + 0.393\ 516t^{5.5} + 0.045\ 270\ 8t^{6.5} + \\ & 0.022\ 839\ 1t^{7.5} + 0.005\ 699\ 79t^{8.5} + 0.000\ 128\ 316t^{10.5}). \end{aligned} \quad (46)$$

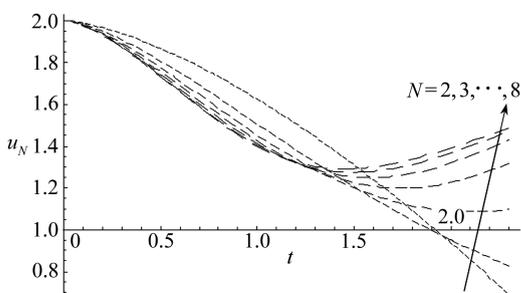


图 9 $\alpha = 1.5$ 时,不同迭代次数的解曲线的对比
Fig. 9 Comparison of the curves of $u(t)$ for different numbers of iteration times, $\alpha = 1.5$

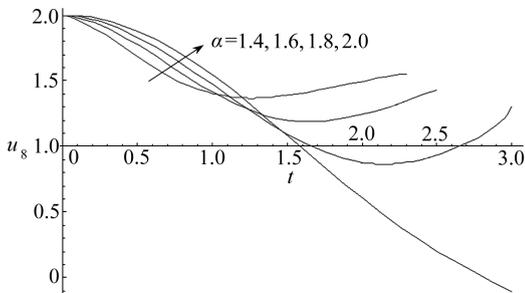


图 10 引入小参数迭代格式的解 u_8 对应曲线 ($\gamma = 0.5$)
Fig. 10 The curves of u_8 for the iteration scheme with a small parameter ($\gamma = 0.5$)

利用分数阶变分迭代法可以简单有效地得到分数阶非线性振子方程的近似解.图 9 比较了 $\alpha = 1.5$ 时该非线性方程不同迭代次数解曲线的形状.而图 10 给出 $\alpha = 1.8, 1.6, 1.4$ 和 $\alpha = 2$ 时,根据不同迭代次数的解得到振子的振动情况.图 10 中的结果采用了小参数迭代格式计算,其中 $\gamma = 0.5$,迭代次数均取 8.图 10 中曲线显示,对该非线性振子方程, α 越大,振子的振动剧烈程度越大,即影响越明显,或理解为分数阶导数阻尼的记忆性越大.

特别地,当 $\alpha = 2$ 时,满足初值条件的精确解^[27] 为 $u(t) = 1 + \cos t$.根据图 10 中对应曲线可知:使用小参数变分迭代若干次后所得解与精确解一致.

4 结 论

利用分数阶变分迭代方法求解了一类粘弹性介质中的分数阶非线性振动方程.求解了该类分数阶阻尼振动方程的近似级数解序列,形式上与已有解^[17] 相同,具体包括如下 3 类方程: 1) 齐次线性振动 Bagley-Torvik 方程; 2) 含正弦(余弦)激励项的线性振动方程; 3) Van der Pol 非线性振动方程.算例中研究了振子运动曲线,并给出振子运动与分数阶导数阶次的关系.

在解决粘弹性介质中的分数阶非线性振动问题中,含小参数变分迭代格式相对普通变分迭代格式更加有效,能够增大收敛区间,而计算量基本相同.该法也存在若干缺点,即其结果为级数形式,长时间振动后的级数解不易收敛,可以考虑对非齐次项进行分段拟合,也可考虑变

分迭代的其它改进方法.

参考文献 (References):

- [1] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [2] 陈文, 孙洪广, 李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (CHEN Wen, SUN Hong-guang, LI Xi-cheng. *Modeling Using the Fractional Derivative in Mechanics and Engineering Problems*[M]. Beijing: Science Press, 2010.(in Chinese))
- [3] 徐明瑜, 谭文长. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用[J]. 中国科学(G辑: 物理学、力学、天文学), 2006, **36**(3): 225-238. (XU Ming-yu, TAN Wen-chang. Intermediate processes and critical phenomena—the theory, method, development of fractional operator and its application in modern mechanics[J]. *Science in China(G Series: Physica, Mechanics & Astronomica)*, 2006, **36**(3): 225-238.(in Chinese))
- [4] 郭柏灵, 蒲学科, 黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解[M]. 北京: 科学出版社, 2011. (GUO Bo-ling, PU Xue-ke, HUANG Feng-hui. *Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions*[M]. Beijing: Science Press, 2011.(in Chinese))
- [5] LIAO Shi-jun. A short review on the homotopy analysis method in fluid mechanics[J]. *Journal of Hydrodynamics, Series B*, 2010, **22**(5): 882-884.
- [6] Duan J S, Rach R, Buleanu D, Wazwaz A M. A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations[J]. *Communications in Fractional Calculus*, 2012, **3**(2): 73-99.
- [7] HE Ji-huan, WU Xu-hong. Variational iteration method: new development and applications[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2007, **54**(7/8): 881-894.
- [8] Huang Y-J, Liu H-K. A new modification of the variational iteration method for Van der Pol equations[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(16/17): 8118-8130.
- [9] GENG Fa-zhan. A modified variational iteration method for solving Riccati differential equations[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **60**(7): 1868-1872.
- [10] Ghorbani A. Toward a new analytical method for solving nonlinear fractional differential equations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**(49/50): 4173-4179.
- [11] Abassy T A. Modified variational iteration method (non-homogeneous initial value problem)[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, **55**(3/4): 1222-1232.
- [12] Altıntan D, Uğur Ö. Solution of initial and boundary value problems by the variational iteration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics, Part B*, 2014, **259**: 790-797.
- [13] 沈淑君, 刘发旺. 解分数阶 Bagley-Torvik 方程的一种计算有效的数值方法[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2004, **43**(3): 306-311. (SHEN Shu-jun, LIU Fa-wang. A computationally effective numerical method for the fractional order Bagley-Torvik equation[J]. *Journal of Xiamen University (Natural Science)*, 2004, **43**(3): 306-311.(in Chinese))
- [14] 廖少锴, 张卫. 非线性分数阶微分振子的动力学研究[J]. 振动工程学报, 2007, **20**(5): 459-467. (LIAO Shao-kai, ZHANG wei. Dynamics of nonlinear fractional differential oscillator[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, **20**(5): 459-467.(in Chinese))
- [15] 曹军义, 谢航, 蒋庄德. 分数阶阻尼 Duffing 系统的非线性动力学特性[J]. 西安交通大学学报, 2009, **43**(3): 50-54. (CAO Jun-yi, XIE Hang, JIANG Zhuang-de. Nonlinear dynamics of Duff-

- ing system with fractional order damping[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2009, **43**(3): 50-54. (in Chinese))
- [16] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶系统状态空间描述的数值算法[J]. 控制理论与应用, 2005, **22**(1): 101-105, 109. (WANG Zhen-bin, CAO Guang-yi, ZHU Xin-jian. A numerical algorithm for the state-space representation of fractional order systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, **22**(1): 101-105, 109. (in Chinese))
- [17] LI Chang-pin, DENG Wei-hua. Remarks on fractional derivatives[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **187**(2): 777-784.
- [18] 申永军, 杨绍普, 邢海军. 分数阶 Duffing 振子的超谐波共振[J]. 力学学报. 2012, **44**(4): 762-768. (SHEN Yong-jun, YANG Shao-pu, XING Hai-jun. Super-harmonic resonance of fractional-order Duffing oscillator[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(4): 762-768. (in Chinese))
- [19] Pálfalvi A. Efficient solution of a vibration equation involving fractional derivatives[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45**(2): 169-175.
- [20] Wang Z H, Wang X. General solution of the Bagley-Torvik equation with fractional-order derivative[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, **15**(5): 1279-1285.
- [21] 刘艳芹. 一类分数阶非线性振子的特性研究[J]. 计算机工程与应用, 2012, **48**(16): 30-32. (LIU Yan-qin. Study on properties of fractional nonlinear oscillator equations[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2012, **48**(16): 30-32. (in Chinese))
- [22] 鲍四元, 邓子辰. 分数阶 Fornberg-Whitham 方程及其改进方程的变分迭代解[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(12): 1236-1246. (BAO Si-yuan, DENG Zi-chen. Variational iteration solutions for fractional Fornberg-Whitham equation and its modified equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(12): 1236-1246. (in Chinese))
- [23] WU Guo-cheng, Baleanu D. New applications of the variational iteration method-from differential equations to q -fractional difference equations[J]. *Advances in Difference Equations*, 2013, **21**: 1-16.
- [24] Tatari M, Dehghan M. On the convergence of He's variational iteration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **207**(1): 121-128.
- [25] WEN Zhi-wu, YI Jie, LIU Hong-liang. Convergence analysis of variational iteration method for Caputo fractional differential equations[C]//*Communications in Computer and Information Science*, AsiaSim 2012, 2012: 296-307.
- [26] Khuri S A, Sayfy A. Variational iteration method; Green's functions and fixed point iterations perspective[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, **32**: 28-34.
- [27] Barari A, Omidvar M, Ghotbi A R, Ganji D D. Application of homotopy perturbation method and variational iteration method to nonlinear oscillator differential equations[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2008, **104**(2): 161-171.
- [28] Merdan M, Gökdoğan A, Yildirim A. On numerical solution to fractional non-linear oscillatory equations[J]. *Meccanica*, 2013, **48**(5): 1201-1213.

The Approximate Analytical Solution Sequence for Fractional Oscillation Equations Based on the Fractional Variational Iteration Method

BAO Si-yuan¹, DENG Zi-chen²

(1. *Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011, P.R. China;*

2. *School of Mechanics and Civil. & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)*

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The fractional calculus was introduced to describe the damped oscillator in viscoelastic medium and the Caputo-type fractional nonlinear oscillation equations were established. The fractional variational iteration method (FVIM) was modified with a small parameter and the Lagrange multiplier was derived. For the linear fractional oscillation equations, both the homogeneous equations and the sinusoidal force-excited nonhomogeneous equations were analyzed with the FVIM to obtain the approximate analytical solution sequence. The varying curves of the displacement for different values of the fractional order were given in the case of the Bagley-Torvik equation. The relationship between oscillator motion and fractional derivative was also studied according to the extent of memorability for different fractional orders. Compared with the ordinary variational iteration method, the proposed FVIM modified with a small parameter expands the interval of convergence significantly for the solution. In the end, the Van der Pol equation with fractional derivative as an example illustrates the method's effectiveness and convenience to solve non-linear fractional differential problems.

Key words: Caputo fractional derivative; nonlinear dynamics; fractional oscillation equation; fractional variational iteration method; approximate analytical solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202146)