文章编号:1000-0887(2014)12-1392-06

双参数对广义 Hamilton 系统稳定性的影响*

陈向炜[1], 李彦敏[1], 梅凤翔[2]

(1. 商丘师范学院 物理与电气信息学院, 河南 商丘 476000;
2. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081)

摘要: 研究双参数对带附加项的广义 Hamilton 系统稳定性的影响.首先将该系统在一定条件下化成梯度系统.其次利用梯度系统的特性来研究这类系统的稳定性及其对双参数的依赖关系.再次在参数平面给出稳定性区域.结果表明,该系统的平衡稳定性随双参数变化可能是稳定的,或渐近稳定的,也可能是不稳定的,相应给出各种稳定性对应的参数变化范围.

关 键 词: 广义 Hamilton 系统; 梯度系统; 稳定性; 参数平面

中图分类号: O316 **文献标志码:** A

doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.011

引 言

1953 年物理学家 Pauli 在研究非局部场论的量子化问题时,发现了 Hamilton 力学对非正则变量的一种推广[1].1959 年 Martin 在试图推广 Hamilton 方法,以便将其应用于不存在 Lagrange 函数的系统时,得到了类似结果[2],从而建立了广义 Hamilton 系统动力学.近年来,广义 Hamilton 系统的研究已经成为一个热门课题,在理论和应用方面都得到了广泛的发展,且已取得一系列重要成果[3-16].梯度系统特别适合研究稳定性[17].如果一个力学系统可以化成梯度系统,那么就可以利用梯度系统的性质来研究力学系统的稳定性.广义 Hamilton 系统是一类斜梯度系统,一般不是一个梯度系统,在极其严格的条件下才能成为梯度系统[18].Euler 情形下重刚体绕定点运动的方程,在适当选取变量下可成为广义 Hamilton 方程[12].此时,若刚体受有非零外力矩,方程可表为带附加项的广义 Hamilton 方程.这类方程比广义 Hamilton 方程更容易化成梯度系统的方程.本文给出带附加项的广义 Hamilton 方程可以成为梯度系统的条件,通过梯度系统的性质来研究这类系统的稳定性及其对双参数的依赖关系.

1 系统的微分方程

广义 Hamilton 方程有形式

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (i,\ j = 1,2,\cdots,m), \tag{1}$$

* 收稿日期: 2014-07-28; 修订日期: 2014-09-16
基金项目: 国家自然科学基金(11372169;10932002;11272050);河南省自然科学基金(112300410269)
作者简介: 陈向炜(1967—),男,河南人,教授,博士(通讯作者. E-mail: hnchenxw@163.com).

其中 $H=H(\boldsymbol{x})$,m 为任意整数,而 $J_{ij}=J_{ij}(\boldsymbol{x})$ 满足

$$J_{ij}(\boldsymbol{x})=J_{ji}(\boldsymbol{x}),\ J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}=0 \qquad (i,\ j,k,l=1,2,\cdots,m). \tag{2}$$

对方程(1)右端施加附加项 $\Lambda_i=\Lambda_i(\boldsymbol{x})$, 则有

$$\dot{x}_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+\Lambda_i. \tag{3}$$

2　梯度系统

梯度系统的微分方程为

$$\dot{x}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{4}$$

其中 $V=V(\boldsymbol{x})$ 称为势函数,并不是力学中的势能.梯度系统有如下重要性质[17]:

性质 1　如果 V 是系统的一个 Lyapunov 函数,并且 $\dot{V}=0$,当且仅当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是一个平衡点;

性质 2　对梯度系统(4),任一平衡点处的线性化系统都只有实特征值.

以上两条性质可用来研究化成梯度系统的力学系统的稳定性以及参数对稳定性的影响.

3　系统的梯度表示

对系统(3),如果满足如下条件:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+\Lambda_i\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(J_{kj}\frac{\partial H}{\partial x_j}+\Lambda_k\right)=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,2,\cdots,m). \tag{5}$$

那么,可找到势函数 $V=V(\boldsymbol{x})$,使得

$$J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+\Lambda_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i,\ j=1,2,\cdots,m), \tag{6}$$

此时系统(3)成为一个梯度系统.于是有:

命题 1　带附加项的广义 Hamilton 系统(3)在满足条件(5)的情况下,就化成了一个梯度系统.

4　系统的稳定性

带附加项的广义 Hamilton 系统(3)化成梯度系统后,便可利用梯度系统的性质来研究系统的平衡稳定性及其对参数的依赖关系.由于梯度系统平衡点处的线性化系统都只有实特征根,因此,特征根可为负,可为正,亦可为 0.由 Lyapunov 一次近似理论可得:

命题 2　如果一次近似特征方程的根皆为负,则平衡是渐近稳定的;如果有正根,则是不稳定的;如果有零根,且是单根,其余无正根,则是稳定的,但非渐近稳定;如果零根为重根,则是不稳定的.

当 Hamilton 函数 H 或附加项 Λ_i 出现某些参数时,系统的平衡性质会随参数变化而变化.如果参数是两个,那么可在参数平面上画出稳定性区域.

5　算　　例

例 1　三维广义 Hamilton 系统为

$$H=-\frac{1}{2}x_2^2\mu-2x_1x_2-\frac{1}{2}x_3^2\nu,$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1=-3x_1^2+x_3\nu,$$

$$\Lambda_2=-2x_2+x_1(2-\mu)-2x_3,$$

$$\Lambda_3=-4x_3-x_2(\mu+\nu),$$

其中μ,ν为参数.试研究系统的稳定性.

解 方程(3)给出

$$\dot{x}_1=-2x_1-x_2\mu-3x_1^2,$$

$$\dot{x}_2=-x_1\mu-2x_2-x_3\nu,$$

$$\dot{x}_3=-x_2\nu-2x_3.$$

这是一个梯度系统,平衡点为(0,0,0),其线性化系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & \mu & 0\\ \mu & \lambda+2 & \nu\\ 0 & \nu & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4-\mu^2-\nu^2)=0.$$

当$4-\mu^2-\nu^2>0$时,有3个负实根,平衡是渐近稳定的;当$4-\mu^2-\nu^2=0$时,有1个零根和3个负实根,平衡是稳定的;当$4-\mu^2-\nu^2<0$时,有1个正实根,平衡是不稳定的.因此,在参数平面μ,ν上以(0,0)为中心,以2为半径的圆内是平衡稳定区域.当参数变化由圆外到圆内时,平衡由不稳定变为渐近稳定.

例2 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=-x_1x_2,$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1=x_1-x_1(x_1-\mu)(2x_1-\nu),\ \Lambda_2=-2x_2,\ \Lambda_3=-x_1-x_2-x_3-x_3^5,$$

其中μ,ν为参数,试研究平衡稳定性对参数的依赖关系.

解 方程(3)给出

$$\dot{x}_1=-x_1(x_1-\mu)(2x_1-\nu),$$

$$\dot{x}_2=-x_2,$$

$$\dot{x}_3=-x_3-x_3^5.$$

它是一个梯度系统.平衡点的个数依赖于参数μ,ν.当$\mu=\nu=0$时,有1个平衡点(0,0,0);当$\mu=0,\nu\neq0$或$\mu\neq0,\nu=0$时,有2个平衡点(0,0,0),($\nu/2$,0,0)或(0,0,0),(μ,0,0);当$\mu\neq0,\nu\neq0$时,有3个平衡点(0,0,0),(μ,0,0),($\nu/2$,0,0).平衡稳定性依赖于参数μ,ν.下面分别研究3个平衡点的稳定性:

① 平衡点(0,0,0)

线性化方程为

$$\dot{x}_1=-\mu\nu x_1,\ \dot{x}_2=-x_2,\ \dot{x}_3=-x_3.$$

当$\mu\nu=0$时,特征根1个为0,2个为负,平衡是稳定的;当$\mu\nu>0$时,有3个负实根,平衡是渐

近稳定的;当 $\mu\nu < 0$ 时,有正实根,平衡是不稳定的.

② 平衡点 $(\mu,0,0)$

令 $x_1 = \xi_1 + \mu, x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3$, 线性化方程为

$$\dot{\xi}_1 = -\mu(2\mu - \nu)\xi_1,\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2,\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3.$$

当 $\mu(2\mu - \nu) = 0$ 时,有 1 个零根和 2 个负实根,平衡是稳定的;

当 $\mu(2\mu - \nu) > 0$ 时,有 3 个负实根,平衡是渐近稳定的;

当 $\mu(2\mu - \nu) < 0$ 时,有正实根,平衡是不稳定的.对固定的 μ 值,平衡依赖于参数 ν.

③ 平衡点 $(\nu/2,0,0)$

一次近似方程为

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{\nu}{2}(\nu - 2\mu)\xi_1,\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2,\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3.$$

可得

当 $\nu(\nu - 2\mu)/2 = 0$ 时,有 1 个零根和 2 个负实根,平衡是稳定的;

当 $\nu(\nu - 2\mu)/2 > 0$ 时,有 3 个负实根,平衡是渐近稳定的;

当 $\nu(\nu - 2\mu)/2 < 0$ 时, 有 1 个正实根, 平衡是不稳定的.对固定的 ν 值, 平衡依赖于参数 μ.

6 结　　论

带附加项的广义 Hamilton 系统在一定的条件下可化成梯度系统.当系统的 Hamilton 函数和附加项中出现参数时,可借助梯度系统的性质来研究这类系统的平衡稳定性以及参数对稳定性的影响.研究表明该系统的平衡稳定性随双参数变化可能是稳定的,或渐近稳定的,也可能是不稳定的,相应地可以求出各种稳定性或不稳定性对应的参数变化范围.对于三维广义 Hamilton 系统, 平衡点个数是 1 个或者 2 个, 也可能是 3 个, 平衡稳定性依赖于参数 μ, ν 的选取.

参考文献(References):

[1] Pauli W. On the Hamiltonian structure of non-local field theories[J]. *II Nuovo Cimento*, 1953, **10**(5): 648-667.

[2] Martin J L. Generalized classical dynamics and the ‘classical analogue’ of Fermi oscillator [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, *Series A*, *Mathematical and Physical Sciences*, 1959, **251**(1267): 536-542.

[3] Maschke B M J, Ortega R, Van der Schaft A J. Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation[C]//*Tampa*, *FL*: *Proceedings of CDC*, 1998: 3599-3604.

[4] CHENG Dai-zhan, XI Zai-rong, LU Qiang, MEI Sheng-wei. Geometric structure of a general Hamiltonian control system and its application[J]. *Science in China Series E*: *Technological Sciences*, 2000, **43**(4): 365-379.

[5] 张素英, 邓子辰. 广义 Hamilton 系统的保结构算法[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(1): 47-50. (ZHANG Su-ying, DENG Zi-chen. An algorithm for preserving structure of generalized Hamilton system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(1): 47-50.(in Chinese))

[6] 贾利群，郑世旺. 带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性[J]. 物理学报，2006，**55**(8)：3829-3832.(JIA Li-qun, ZHENG Shi-wang. Mei symmetry of generalized Hamilton systems with additional terms[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(8)：3829-3832.(in Chinese))

[7] 姜文安，罗绍凯. 广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量[J]. 物理学报，2011，**60**(6)：060201.(JIANG Wen-an, LUO Shao-kai. Mei symmetry leading to Mei conserved quantity of generalized Hamiltonian system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(6)：060201.(in Chinese))

[8] Jiang W A, Luo S K. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Hamiltonian system[J]. *Meccanica*, 2012, **47**(2)：379-383.

[9] Jiang W A, Luo S K. A new type of non-Noether exact invariants and adiabatic invariants of generalized Hamiltonian systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **67**(1)：475-482.

[10] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社，2004.(MEI Feng-xiang. *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems*[M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press, 2004.(in Chinese))

[11] 刘畅，刘世兴，梅凤翔，郭永新. 广义 Hamilton 系统的共形不变性与 Hojman 守恒量[J]. 物理学报，2008，**57**(11)：6709-6713.(LIU Chang, LIU Shi-xing, MEI Feng-xiang, GUO Yong-xin. Conformal invariance and Hojman conserved quantities of generalized Hamilton systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(11)：6709-6713.(in Chinese))

[12] 李继彬，赵晓华，刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，1994.(LI Ji-bin, ZHAO Xiao-hua, LIU Zheng-rong. *Theory and Application of the Generalized Hamilton System*[M]. Beijing：Science Press, 1994.(in Chinese))

[13] Olver P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*[M]. Berlin：Springer-Verlag, 1986.

[14] Marsden J E, Ratiu T S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*[M]. Berlin：Springer-Verlag, 1994.

[15] 梅凤翔. 广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报，2003，**52**(5)：1048-1050.(MEI Feng-xiang. Lie symmetry and the conserved quantity of a generalized Hamiltonian system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(5)：1048-1050.(in Chinese))

[16] SHANG Mei, MEI Feng-xiang. Integrals of generalized Hamilton systems with additional terms[J]. *Chinese Physics B*, 2005, **14**(9)：1707-1709.

[17] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*[M]. Singapore：Elsevier, 2008.

[18] 梅凤翔，吴惠彬. 广义 Hamilton 系统与梯度系统[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2013，**43**(4)：538-540.(MEI Feng-xiang, WU Hui-bin. Generalized Hamilton system and gradient system[J]. *Scientia Sinica：Pysica, Mechanica & Astronomica*, 2013, **43**(4)：538-540.(in Chinese))

Influence of Double Parameters on the Equilibrium Stability of Generalized Hamilton Systems

CHEN Xiang-wei[1], LI Yan-min[1], MEI Feng-xiang[2]

(1. *School of Physics and Electrical Infornation*, *Shangqiu Normal University*, *Shangqiu*, *Henan* 476000, *P.R.China*;
2. *School of Aerospace Engineering*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *P.R.China*)

Abstract: Influence of double parameters on the equilibrium stability of generalized Hamilton systems with additional terms was studied. Firstly, a generalized Hamilton system with additional terms was considered as a gradient system under certain conditions. Secondly, the characteristics of the gradient system was used to study the equilibrium stability and its dependance on the two parameters of the system. Thirdly, the stability domain was given in the parameter plane. The results show that the equilibrium of the system is likely to be stable, or asymptotically stable, or even unstable with the change of the two parameters, and the range of parameters corresponding to each equilibrium state is given.

Key words: generalized Hamilton system; gradient system; stability; parameter plane

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11372169; 10932002; 11272050)