

反演二维瞬态热传导问题随 温度变化的导热系数*

周焕林, 徐兴盛, 李秀丽, 陈豪龙

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

(本刊编委周焕林来稿)

摘要: 基于边界元法反演二维瞬态热传导问题随温度变化的导热系数.采用 Kirchhoff 变换将非线性的控制方程转变为线性方程.边界元法用于构建二维瞬态热传导问题的数值分析模型.将反演参数作为优化变量,测点温度计算值与测量值之间的残差平方和作为优化目标函数.引入复变量求导法求解目标函数的梯度矩阵,梯度正则化法用于优化目标函数获得反演结果.探讨时间步长、测点数量和随机偏差对反演结果的影响.减小步长、增加测点数量收敛速度加快,降低了随机偏差,计算结果更精确.算例证明了算法的有效性与稳定性.

关键词: 边界元法; 反问题; 瞬态热传导; 导热系数; 梯度正则化法

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.006

引言

热传导反问题广泛应用于航天、化工、动力工程、材料加工处理、冶金工程、生物工程、无损探伤等工程领域,主要是利用实验手段测得物体内部或边界上某些点的温度及其随时间的变化历程,通过求解传热微分方程来反演物体边界热流、材料热传导系数或物体内部的热源分布等参数.针对热传导反问题,国内外学者已经做了大量的研究工作.Huang 等^[1]利用共轭梯度法反演一维非线性瞬态热传导问题中的导热系数和热容量,且进一步反演了二维非均质材料的热传导系数^[2].Cui 等^[3]运用有限差分法和复变量求导法反演随温度变化的导热系数和热扩散系数.贺国强等^[4]提出正则化 Newton 型迭代法求解热传导反问题,对照 Tikhonov 方法和 Bakushiskii 方法进行了数值实验.Lesnic 等^[5]基于边界元法对一维瞬态热传导问题中随温度变化的导热系数和热容量进行识别.薛齐文等^[6]引入同伦算法对多宗量瞬态热传导反问题求解,对导热系数和边界条件等多宗量进行有效的组合识别.唐中华等^[7]将热传导系数按温度区间分段离散,采用遗传算法和伴随方程法反演各温度区间的热传导系数.Zhang 等^[8]将实验测量得到的铸件和金属表面温度作为测点数据,反演叶片熔铸过程中界面传热系数.Chang 等^[9]提出了一种半离散方法反演一维热传导域中关于温度和时间函数形式的导热系数.王登刚等^[10]把混沌优化方法和梯度正则化法结合,构成一种混沌正则化方法求解非线性二维导热反问题

* 收稿日期: 2014-07-23; 修订日期: 2014-10-25

基金项目: 国家自然科学基金(11072073)

作者简介: 周焕林(1973—),男,安徽人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhouhl@hfut.edu.cn).

的导热系数.程荣军等^[11]基于无网格有限点法反演一维热传导问题的源参数.钱炜祺等^[12]基于有限体积法利用表面温度来反演三维非稳态热传导问题的热源项.张涛等^[13]采用自适应蚁群算法反演二维稳态热传导问题的热源强度、热源位置等参数,并探讨测量信息对反演结果的影响.

求导是反演计算的重要组成部分,求导的精度极大地影响反演的求解精度.通常求导采用有限差分法,对于复杂的系统或函数,差分法很难满足计算精度的要求.复变量求导法最早由 Lyness 和 Moler^[14]提出,把偏导数的计算转化为复域函数的计算,是一种使用方便、计算结果精确的函数偏导数数值计算方法.

对于材料导热系数随温度变化的情况,实际工程中导热系数随温度变化的函数形式是已知的,而函数的各个参数是未知的.本文基于边界元法反演已知函数形式的导热系数,得到导热系数的具体表达式.通过两个算例验证了本文方法的有效性和稳定性.

1 正问题

1.1 边界积分方程

当热传导系数 k 随温度 T 变化时,二维瞬态热传导问题控制方程为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

其中, ρ 为密度, c 为比热容.

边界条件

$$\begin{cases} T = \bar{T} \in \Gamma_1, \\ k(T) \frac{\partial T}{\partial n} = -\bar{q} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2)$$

初始条件

$$T = T_i |_{t=0} \in \Omega. \quad (3)$$

采用 Kirchhoff 变换定义新变量 u , 使其满足

$$u = \int_{T_0}^T k(T) dT, \quad (4)$$

则

$$\frac{du}{dT} = k(T), \quad (5)$$

其中, T_0 为任意参考值,通常取 T_0 为 0.

控制方程式(1)经转化后为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6)$$

边界条件式(2)经转化后为

$$\begin{cases} u = \int_{T_0}^{\bar{T}} k(T) dT \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\bar{q} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

初始条件式(3)经转化后为

$$u = u_0 = \left[\int_{T_0}^{T_i} k(T) dT \right]_{t=0}, \tag{8}$$

其中

$$a = \frac{k(T)}{\rho c}. \tag{9}$$

式(9)中热扩散系数 a 仍为随温度变化的函数,但在实际问题中, a 随 T 变化远较 k 随 T 的变化小,因此在实际处理时,通常将 a 在短时间段内视为常数.

式(6)~(8)通过加权余量法,可得到边界积分方程为

$$C_i u_i + a \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma dt = a \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma dt + \left[\int_{\Omega} u_0 u^* d\Omega \right]_{t=t_1}, \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} u^* = \frac{1}{4\pi a(t_2 - t)} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t_2 - t)}\right), \\ q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{D}{8\pi a^2(t_2 - t)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t_2 - t)}\right), \end{cases} \tag{11}$$

式中, D 为源点 i 到边界单元的垂直距离.

1.2 边界积分方程的离散

首先要对时间域划分,假设函数 u 和 q 随时间变化,由于 u 和 q 比 u^* 和 q^* 的变化要慢得多,由此近似认为在短时间段内为常数,式(10)可变为

$$C_i u_i + a \int_{\Gamma} u \int_{t_1}^{t_2} q^* dt d\Gamma = a \int_{\Gamma} q \int_{t_1}^{t_2} u^* dt d\Gamma + \left[\int_{\Omega} u_0 u^* d\Omega \right]_{t=t_1}. \tag{12}$$

对时间内层求积分

$$\begin{cases} q_i^* = \int_{t_1}^{t_2} q^* dt = -\frac{D}{2\pi a r^2} e^{-b}, \\ u_i^* = \int_{t_1}^{t_2} u^* dt = \frac{1}{4\pi a} \int_b^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$b = \frac{r^2}{4a(t_2 - t_1)}, \tag{14}$$

$$\int_b^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = -E - \ln b + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{b^k}{k \cdot k!}, \tag{15}$$

其中 E 为 Euler(欧拉)常数, $E = 0.577\ 215\ 66$.

边界 Γ 划分成 N 个单元,空间域 Ω 划分成 M 个单元,则有

$$C_i u_i^{t_2} + a \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_j^{t_2} q_i^* d\Gamma = a \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q_j^{t_2} u_i^* d\Gamma + \sum_{k=1}^M \int_{\Omega_k} u^{t_1} u^* d\Omega. \tag{16}$$

假定 u 和 q 在每个单元上是线性变化的,那么节点取在每个单元的端点,单元内任意一点的 u 和 q 可以由单元端点的值通过线性插值来确定,插值函数为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \\ \varphi_2 = \frac{1 + \xi}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

整理式(16)可得

$$C_i u_i^{t_2} + \sum_{j=1}^N [h_{ij}^{(1)} \cdot u_j^{t_2} \quad h_{ij}^{(2)} \cdot u_{j+1}^{t_2}] = \sum_{j=1}^N [g_{ij}^{(1)} \cdot q_j^{t_2} \quad g_{ij}^{(2)} \cdot q_{j+1}^{t_2}] + \sum_{k=1}^M \int_{\Omega_k} u^{t_1} u^* d\Omega, \quad (18)$$

式中

$$\begin{cases} h_{ij}^{(1)} = a \int_{\Gamma_j} \varphi_1 q_i^* d\Gamma, \\ h_{ij}^{(2)} = a \int_{\Gamma_j} \varphi_2 q_i^* d\Gamma, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} g_{ij}^{(1)} = a \int_{\Gamma_j} \varphi_1 u_i^* d\Gamma, \\ g_{ij}^{(2)} = a \int_{\Gamma_j} \varphi_2 u_i^* d\Gamma, \end{cases} \quad (20)$$

$$P_i = \sum_{k=1}^M \int_{\Omega_k} u^{t_1} u^* d\Omega. \quad (21)$$

将式(18)写成矩阵形式,即

$$HU^{t_2} = GQ^{t_2} + P. \quad (22)$$

通过式(22)可以求得边界节点处的 u 和 q , 由 Kirchhoff 反变换:

$$T = k^{-1}(u) \quad (23)$$

求得边界节点处的温度.取 $C_i = 1$, 由式(10) 和式(16) 求得内点 u , 反变换求得内点温度.

2 反问题

2.1 目标函数

在本文的反问题中,导热系数的函数形式是已知的,其函数的各个参数是未知的,其它条件与正问题相同,所需要的额外信息是测点的温度.与反问题对应的优化目标函数为

$$J(\mathbf{p}) = \| \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{F}^*(t) \|^2, \quad (24)$$

其中, $\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = [F_1(\mathbf{p}, t) \quad F_2(\mathbf{p}, t) \quad \cdots \quad F_m(\mathbf{p}, t)]^T$ 为测点的计算值, $\mathbf{F}^*(t) = [F_1^*(t) \quad F_2^*(t) \quad \cdots \quad F_m^*(t)]^T$ 为测点的测量值, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_l)^T$ 为反演参数, m 为测点数量, l 为反演参数的个数.

2.2 复变量求导法

对于任意一个实函数 $f(x)$, 将函数的变量 x 施加一个很小的虚步 h , 并将其展开成 Taylor (泰勒) 级数形式:

$$f(x + ih) = f(x) + ih \frac{df}{dx} - \frac{h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} + o(h^3). \quad (25)$$

当 h 取极小值时, 通常可以忽略三阶以上的无穷小量, 分别比较虚部和实部可得

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = \frac{\text{Im}(f(x + ih))}{h}, \\ \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2[f(x) - \text{Re}(f(x + ih))]}{h^2}. \end{cases} \quad (26)$$

使用复变量求导法求导的精度远远大于普通的差分法, 当函数复杂时, 这种优势更加明

显.复变量求导法是求解梯度矩阵的一个有效方法,在复杂函数的数值求导计算中非常有效.

下面验证复变量求导法比有限差分法的优越性.设原函数的表达形式为

$$f(x) = xe^{-x}. \quad (27)$$

导数的表达式为

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}. \quad (28)$$

有限差分法求导公式为

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (29)$$

当 $x = 0.5$ 时,求导的精确解为 0.303 265 33.有限差分法和复变量求导法求导的结果见表 1,由此可以看出,有限差分法的计算结果依赖于步长 h ,当 h 小于 10^{-14} ,有限差分法的计算结果失效,而运用复变量求导法,当 $h = 10^{-30}$ 仍能得到高精度的结果.

表 1 有限差分法和复变量求导法的对比

Table 1 Comparison between the finite difference method and the complex variable differentiation method

h	finite difference method	complex variable differentiation method
10^{-12}	0.303 257 42	0.303 265 33
10^{-13}	0.303 090 89	0.303 265 33
10^{-14}	0.305 311 33	0.303 265 33
10^{-15}	0.277 555 76	0.303 265 33
10^{-16}	0.555 111 51	0.303 265 33
10^{-17}	0.000 000 00	0.303 265 33
10^{-25}	0.000 000 00	0.303 265 33
10^{-30}	0.000 000 00	0.303 265 33

2.3 梯度正则化法

通常反问题的求解存在不适定性,因此需要对式(24)进行正则化,得到如下形式:

$$\min J_{\beta}(\mathbf{p}) = \min \{ \|\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{F}^*(t)\|^2 + \beta \|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\|^2 \}, \quad (30)$$

其中, β 为正则化参数, \mathbf{p}^* 为真实解的预估值.

将式(30)对 \mathbf{p} 求一阶导数并令其为 0,得

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{F}^*(t)) + \beta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) = 0. \quad (31)$$

将 $\mathbf{F}^{n+1}(\mathbf{p}, t)$ 在 \mathbf{p}^n 处写成 Taylor 展开形式,并略去高阶小量,得

$$\mathbf{F}^{n+1}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{F}^n(\mathbf{p}, t) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \Big|_n (\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n). \quad (32)$$

将式(32)代入式(31),并取 $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^n$, 整理得

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \Big|_n \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \Big|_n (\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n) + \mathbf{F}(\mathbf{p}^n, t) - \mathbf{F}^*(t) \right] + \beta(\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n) = 0. \quad (33)$$

令 \mathbf{G} 为梯度阵,即 $\mathbf{G} = \partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) / \partial \mathbf{p} \Big|_n$, 同时令 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n$, 将式(33)整理后得

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} + \mathbf{G} [\mathbf{F}(\mathbf{p}^n, t) - \mathbf{F}^*(t)] + \beta \Delta \mathbf{p} = 0. \quad (34)$$

最终可得到梯度正则化法求解非线性参数反演问题的迭代公式为

$$\begin{cases} [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{p} = -\mathbf{G}^T [\mathbf{F}(\mathbf{p}^n, t) - \mathbf{F}^*(t)], \\ \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p}. \end{cases} \quad (35)$$

2.4 反演算法求解流程

- 1) 给定待反演参数的初始解点 \mathbf{p}^0 , 正则化参数的初值 β^0 , 正则化参数的调整参数 $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$, 迭代终止收敛精度 ε , 迭代步 $n = 0$.
- 2) 根据正问题求解流程求得计算结果 $\mathbf{F}(\mathbf{p}^n, t)$, Jacobi(雅可比) 矩阵 \mathbf{G}^n , 若满足 $\|\Delta\mathbf{p}\| < \varepsilon$, 则终止计算, 此时得到的参数矢量 $\mathbf{p}^{(n)}$ 即为反演得到的正则解, 否则继续.
- 3) 令 $\beta^{n+1} = \beta^n / \gamma_1$, 令 $n = n + 1$.
- 4) 求解方程(35), 得到参量调整矢量 $\Delta\mathbf{p}$, 则 $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta\mathbf{p}$.
- 5) 根据正问题求解流程求得结果 $\mathbf{F}(\mathbf{p}^{n+1}, t)$, Jacobi 矩阵 \mathbf{G}^{n+1} , 若 $\|\mathbf{F}(\mathbf{p}^{n+1}, t) - \mathbf{F}^*(t)\|^2 > \|\mathbf{F}(\mathbf{p}^n, t) - \mathbf{F}^*(t)\|^2$, 令 $\beta^{n+1} = \beta^n \gamma_2$ 转至 4), 否则转 2).

3 算 例

算例 1 考虑一个 $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 的正方形区域瞬态热传导问题, 如图 1 所示, 导热系数满足 $k(T) = k_0 T$, $\rho = 9\,000\text{ kg/m}^3$, $c = 400\text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$, 边界 Γ_1 的温度为 200 °C , 边界 $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 的温度为 100 °C , 域内的初始温度为 100 °C . 将边界划分为 40 个线性单元, 域内划分为 100 个四边形单元. 已知域内测点温度的情况下反演系数 k_0 . 精确解 $k_0 = 400\text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$.

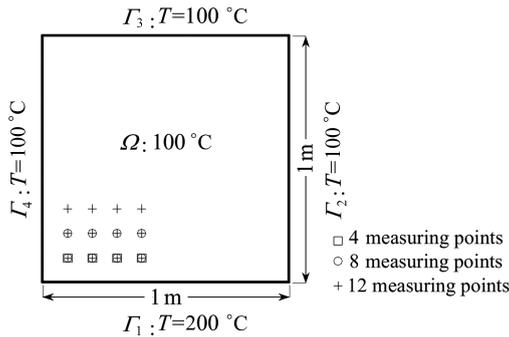


图 1 算例 1 的模型

Fig.1 The model of example 1

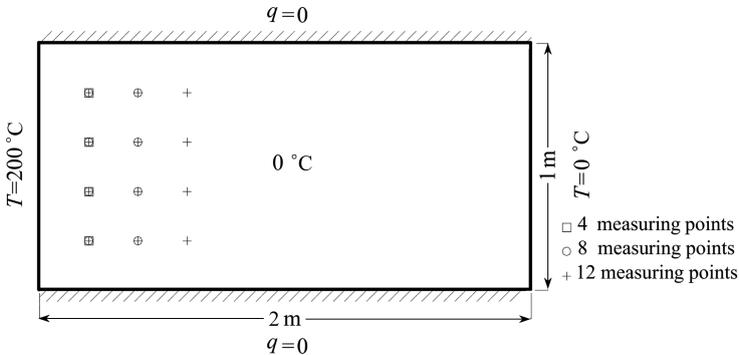


图 2 算例 2 的模型

Fig.2 The model of example 2

算例 2 考虑一个 $2\text{ m} \times 1\text{ m}$ 长方形平板区域瞬态热传导问题, 如图 2 所示, 平板上下绝热, 初始温度为 0 °C . 左侧边界的温度突然增加到 200 °C , 右边界始终保持在常温 0 °C . 平板比

热容 $c = 200 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, 密度 $\rho = 5\,000 \text{ kg}/\text{m}^3$. 将边界划分为 30 个线性单元, 域内划分为 50 个四边形单元. 导热系数满足 $k(T) = k_0(1 + \lambda T/10\,000)$. 已知域内测点温度的情况下反演系数 k_0 和 λ . 精确解 $k_0 = 400 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $\lambda = 5.0 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

图 1 和图 2 分别显示了算例 1, 2 中 4, 8 和 12 个域内测点的位置.

算例 1 中, 选取时间步长 $\Delta t = 1 \text{ s}$, $\beta^0 = 1.0\text{E} - 2$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 2$, $\varepsilon = 1.0\text{E} - 4$, 选取 4 个测点在时刻 $t = 2 \text{ s}$ 时的测量值作为已知数据. 图 3 为选取 k_0 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 时得到的收敛过程. 收敛终止时目标函数达到 $1.34\text{E} - 5$. 从图 3 可以看出, 参数 k_0 能够很好地收敛到精确解.

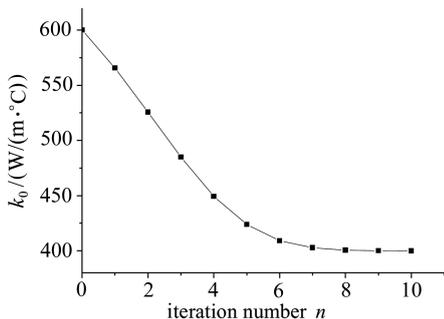


图 3 k_0 的反演结果

Fig.3 Inverse results of k_0

算例 2 中, 选取时间步长 $\Delta t = 50 \text{ s}$, $\beta^0 = 1.0$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 2$, $\varepsilon = 1.0\text{E} - 4$, 选取 4 个测点在时刻 $t = 100 \text{ s}$ 时的测量值作为已知数据. k_0 的初值为

$600 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, λ 的初值为 $8 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, 图 4 和图 5 分别为 k_0 和 λ 的收敛过程. 收敛终止时目标函数达到 $6.18\text{E} - 5$. 从图中可以看出参数 k_0 和 λ 都能够很好地收敛到精确解.

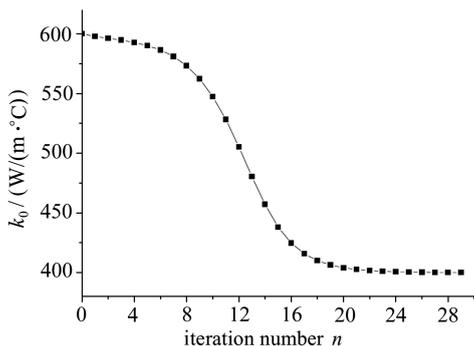


图 4 k_0 的反演结果

Fig.4 Inverse results of k_0

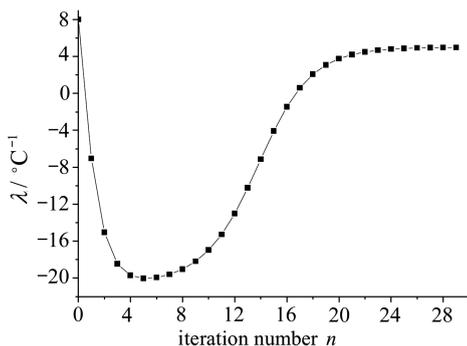


图 5 λ 的反演结果

Fig.5 Inverse results of λ

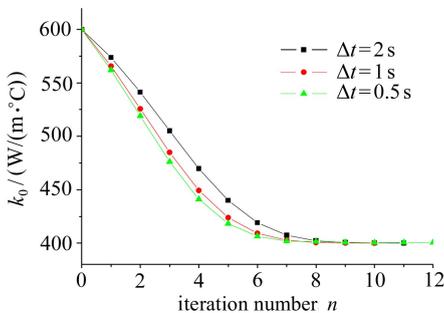


图 6 时间步长对 k_0 的影响

Fig.6 Effect of time steplength on k_0

3.1 时间步长对反演结果的影响

算例 1 中, 时间步长分别取为 $\Delta t \in \{2 \text{ s}, 1 \text{ s}, 0.5 \text{ s}\}$, 则 2 s 内分别可划为 1, 2, 4 个时

间段.选取 4 个测点在时间 $t = 2$ s 时的测量值作为已知数据.在反演过程中,令 $\beta^0 = 1.0E - 2, \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 2, \varepsilon = 1.0E - 4, k_0$ 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 时,图 6 为 k_0 的收敛过程.从图中可以看出,3 种情况 k_0 都能够很好地收敛到精确解.随着时间步长的减小收敛速度加快.

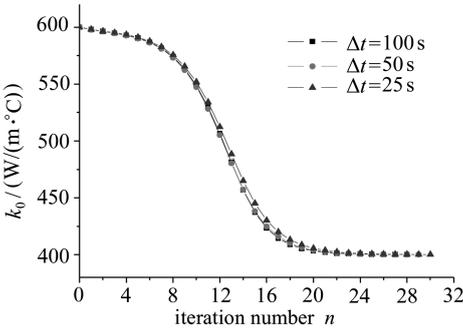


图 7 时间步长对 k_0 的影响

Fig.7 Effect of time steplength on k_0

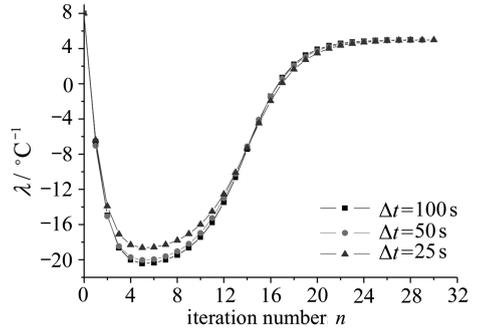


图 8 时间步长对 λ 的影响

Fig.8 Effect of time steplength on λ

算例 2 中,时间步长分别取为 $\Delta t \in \{100 \text{ s}, 50 \text{ s}, 25 \text{ s}\}$, 则 100 s 内分别可划为 1, 2, 4 个时间段.选取 4 个测点在时间 $t = 100$ s 时的测量值作为已知数据.在反演过程中,令 $\beta^0 = 1.0, \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 2, \varepsilon = 1.0E - 4$.其中, k_0 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, λ 的初值为 $8 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.图 7 和图 8 为选取不同时间步长得到的 k_0 和 λ 的收敛过程.从图中可以看出,上述 3 种情况下 k_0 和 λ 能够很好地收敛到精确解.

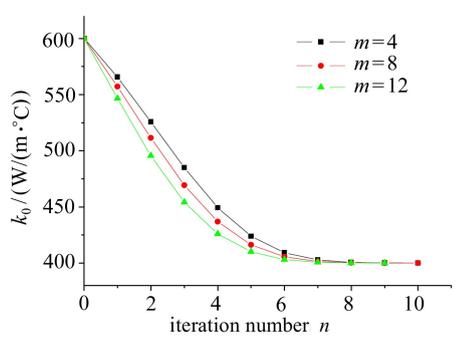


图 9 测点数量对 k_0 的影响

Fig.9 Effect of the number of measuring points on k_0

3.2 测点数量对反演结果的影响

算例 1 中,选取时间步长为 $\Delta t = 1 \text{ s}, \beta^0 = 1.0E - 4, \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 2, \varepsilon = 1.0E - 4$,选取测点数量为 $m \in \{4, 8, 12\}$,将测点在时刻 $t = 2$ s 时的测量值作为已知数据.其中, k_0 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 时,图 9 为选取不同测点数量得到的收敛过程.从图中可以看出,上述 3 种情况 k_0 能够很好地收敛到精确解.随着测点数量的增加收敛速度明显加快.

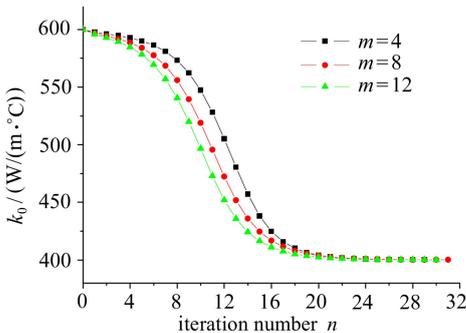


图 10 测点数量对 k_0 的影响

Fig.10 Effect of the number of measuring points on k_0

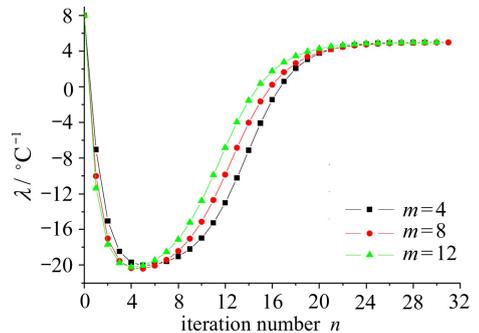


图 11 测点数量对 λ 的影响

Fig.11 Effect of the number of measuring points on λ

算例 2 中,选取时间步长 $\Delta t = 50 \text{ s}$, $\beta^0 = 1.0$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 2$, $\varepsilon = 1.0\text{E} - 4$, 选取测点数量 $m \in \{4, 8, 12\}$, 将测点在时刻 $t = 100 \text{ s}$ 时的测量值作为已知数据. 其中, k_0 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{C})$, λ 的初值为 8 C^{-1} . 图 10 和图 11 分别为选取不同测点数量得到的 k_0 和 λ 收敛过程. 从图中可以看出, 上述 3 种情况下 k_0 和 λ 能够很好地收敛到精确解. 随着测点数量的增加收敛速度加快.

3.3 随机偏差对反演结果的影响

在实际工程应用中, 必然存在测量数据的随机偏差, 因此在反演的过程中必须考虑已知数据的随机偏差对反演结果的影响.

算例 1 中, 选取时间步长 $\Delta t = 1 \text{ s}$, $\beta^0 = 1.0\text{E} - 2$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 2$, $\varepsilon = 1.0\text{E} - 4$, 对 $t = 2 \text{ s}$ 时 12 个测点的测量值分别施加 0%, 0.5%, 1% 的随机偏差. 选取 k_0 的初值为 $600 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{C})$. k_0 的反演结果见表 2. 从表 2 中可以看出, 在施加一定范围的随机偏差后, k_0 具有较好的收敛性和稳定性. 随机偏差越小计算结果越趋近于精确解.

算例 2 中, 令时间步长 $\Delta t = 50 \text{ s}$, $\beta^0 = 1.0$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 2$, $\varepsilon = 1.0\text{E} - 4$. 对 $t = 100 \text{ s}$ 时 12 个测点的测量值分别施加 0%, 0.5%, 1% 的随机偏差, 得到 k_0 和 λ 的反演结果见表 3. 从表 3 中可以看出, k_0 对随机偏差的敏感度较小, λ 对随机偏差的敏感度较大, 随机偏差越小, k_0 和 λ 的计算结果越趋近于精确解.

表 2 随机偏差对反演结果的影响

Table 2 Effect of random noise on the inverse results

random noise $\delta / \%$	$k_0 / (\text{W}/(\text{m} \cdot \text{C}))$	relative error $e / \%$	iteration number n	objective function $J(\mathbf{p})$
0	399.99	0	10	1.07E-5
0.5	403.05	0.76	25	3.87E-1
1	396.11	0.97	17	1.88

表 3 随机偏差对反演结果的影响

Table 3 Effect of random noise on the inverse results

random noises $\delta / \%$	$k_0 / (\text{W}/(\text{m} \cdot \text{C}))$	relative errors of k_0		relative errors of λ		iteration number n	objective function $J(\mathbf{p})$
		$e_{k_0} / \%$	λ	$e_\lambda / \%$			
0	400.04	0.01	4.99	0.20		30	5.75E-5
0.5	402.02	0.51	4.56	8.80		44	1.37E-1
1	403.51	0.88	4.07	18.60		44	1.83E-1

4 结 论

本文基于边界元法反演了二维瞬态热传导问题随温度变化的导热系数. 边界元法用于构建二维瞬态热传导问题的数值分析模型, 引入复变量求导法求解目标函数的梯度矩阵, 梯度正则化法用于优化目标函数获得反演结果. 算例表明二维瞬态热传导问题中反演随温度变化的导热系数的方法有效, 具有较高的精度和较好的稳定性. 选取不同的时间步长及测点数量, 反演参数都能有效收敛于精确解. 时间步长及测点数量会影响迭代的收敛速度, 时间步长越小、测点数量越多收敛速度越快. 随着测量数据的随机偏差逐渐减小, 相对误差逐渐降低, 计算结果更加精确.

参考文献 (References):

- [1] Huang C H, Yan J Y. An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent

- thermal conductivity and heat capacity[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, **38**(18): 3433-3441.
- [2] Huang C H, Chin S C. A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, **43**(22): 4061-4071.
- [3] Cui M, Gao X W, Zhang J B. A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2012, **58**: 113-119.
- [4] 贺国强, 孟泽红. 求解热传导反问题的一种正则化 Newton 型迭代法[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(4): 479-486. (HE Guo-qiang, MENG Ze-hong. A Newton type iterative method for heat-conduction inverse problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(4): 479-486. (in Chinese))
- [5] Lesnic D, Elliott L, Ingham D B. Identification of the thermal conductivity and heat capacity in unsteady nonlinear heat conduction problems using the boundary element method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**(2): 410-420.
- [6] 薛齐文, 魏伟, 杨海天. 多宗量瞬态热传导反演识别[J]. *固体力学学报*, 2009, **30**(1): 65-69. (XUE Qi-wen, WEI Wei, YANG Hai-tian. Parameters identification of inverse heat conduction problems in transient state with multi-variables[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2009, **30**(1): 65-69. (in Chinese))
- [7] 唐中华, 钱国红, 钱炜祺. 材料热传导系数随温度变化函数的反演方法[J]. *计算力学学报*, 2011, **28**(3): 377-382. (TANG Zhong-hua, QIAN Guo-hong, QIAN Wei-qi. Estimation of temperature-dependent function of thermal conductivity for a material[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(3): 377-382. (in Chinese))
- [8] Zhang W H, Xie G N, Zhang D. Application of an optimization method and experiment in inverse determination of interfacial heat transfer coefficients in the blade casting process[J]. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2010, **34**(8): 1068-1076.
- [9] Chang C L, Chang M. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(3): 1644-1655.
- [10] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨. 非线性二维热传导反问题的混沌正则化混合解法[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(8): 864-870. (WANG Deng-gang, LIU Ying-xi, LI Shou-ju. Chaos-regularization hybrid algorithm for nonlinear two-dimensional inverse heat conduction problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(8): 864-870. (in Chinese))
- [11] 程荣军, 程玉民. 带源参数的热传导反问题的无网格方法[J]. *物理学报*, 2007, **56**(10): 5569-5574. (CHENG Rong-jun, CHENG Yu-min. The meshless method for solving the inverse heat conduction problem with a source parameter[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(10): 5569-5574. (in Chinese))
- [12] 钱炜祺, 何开锋, 汪清. 三维非稳态热传导逆问题反演算法研究[J]. *力学学报*, 2008, **40**(5): 611-618. (QIAN Wei-qi, HE Kai-feng, WANG Qing. Inverse estimation of heat source term in three-dimensional transient heat conduction problem[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(5): 611-618. (in Chinese))
- [13] 张涛, 卢玫, 李博汉, 陶亮. 用于寻源导热反问题的自适应蚁群算法研究[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(7): 823-830. (ZHANG Tao, LU Mei, LI Bo-han, TAO Liang. Study of self-adaptive ant colony optimization for heat source search in inverse heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 823-830. (in Chinese))

- [14] Lyness N, Moler C B. Numerical differentiation of analytic functions[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1967, 4(2): 202-210.

Identification of Temperature-Dependent Thermal Conductivity for 2-D Transient Heat Conduction Problems

ZHOU Huan-lin, XU Xing-sheng, LI Xiu-li, CHEN Hao-long

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology,
Hefei 230009, P.R.China)

(Contributed by ZHOU Huan-lin, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The temperature-dependent thermal conductivity was identified for 2-D transient heat conduction problems with the boundary element method (BEM). The nonlinear governing equations were transformed into linear ones through the Kirchhoff transformation. The BEM was used to build the numerical model for the 2-D transient heat conduction problems. The inversion parameters were defined as the optimization variables. The quadratic sum of residual errors between the calculated temperature values and the measured temperature values at the measuring points was regarded as the objective function. The complex variable differentiation method was employed to compute the gradient matrix of the objective function. The gradient-regulation method was developed to optimize the objective function. Effects of the time step length, the number of measuring points and the random noise on the inverse results were discussed. With decrease of the time step length and increase of the number of the measuring points, the converging rate quickens. With decrease of the random noise, the results grow accurate. Numerical tests show the effectiveness and stability of the presented method.

Key words: boundary element method; inverse problem; transient heat conduction; thermal conductivity; gradient-regulation method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11072073)