

随机激励下一类含分数阶阻尼的 轮胎的振动响应*

范院琴, 徐伟, 韩群, 杨勇歌

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

摘要: 基于随机平均法研究了 Kanai-Tajimi 噪声激励下含分数阶阻尼的轮胎动力学系统的响应. 首先将地震波近似为 Kanai-Tajimi 噪声, 结合点接触模型和分数阶导数模型, 建立轮胎的动力学方程, 然后运用随机平均法求解振动位移的稳态概率密度函数的解析解, 最后通过 Monte-Carlo 数值模拟验证了该方法的有效性. 利用振动位移的概率密度求解聚丁二烯橡胶、丁基 B252 橡胶轮胎振动位移的均值与方差, 并以此为依据考察这两类橡胶的减振性能. 研究表明, 轮胎振动位移的均值和方差随橡胶的储能模量的增大而增大, 随耗散模量的增大而减小, 这说明减小橡胶的储能模量或增大耗散模量可有效改善轮胎的减振性能. 所得结果可为轮胎的设计与制造提供一定的理论基础.

关键词: 分数阶阻尼; 橡胶材料; 随机平均法; 粘弹材料

中图分类号: O246 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.005

引 言

2004年印尼海啸发生,标志着地球可能已经进入又一个“地震活跃期”,频繁发生的地震造成了极大的人员伤亡和经济损失.很多学者致力于研究建筑物的抗震性能,陈清军等^[1]分析了长周期地震波作用下高层建筑结构的弹塑性动力学响应, Roghaei 和 Zabihollah^[2]研究了利用粘弹性材料来减小隔震层的位移并且改善系统的性能.由于很多公路都位于地震的多发地区,开始有学者分析地震对车辆运行的影响^[3-4],但主要是从数值仿真的角度入手.与普通的建筑物相比,汽车在抗震上有天然的优势——轮胎.轮胎作为汽车的重要支撑和隔震装置,对缓解大幅度的振动有着重要的作用.研究轮胎的动力学行为有助于提高汽车在受地震波冲击时乘车的舒适度,改善行车的安全性能.

橡胶是轮胎的主要减振材料,作为典型的粘弹材料,其本构关系的描述主要有5种:复刚度模型、微段模型、Kelvin模型、Maxwell模型、分数阶导数模型^[5-7].其中,分数阶导数模型不但能够在较大频率范围内精确地描述橡胶及其它类聚合物,而且能够减少计算所需的参数.大量学者研究了如何应用分数阶导数模型描述相关粘弹材料的力学性能, Song 和 Jiang^[8]建立了5

* 收稿日期: 2014-05-13; 修订日期: 2014-11-02

基金项目: 国家自然科学基金(11172233;11302169)

作者简介: 范院琴(1990—),女,江西人,硕士生(E-mail: fanyuanqin2012@126.com);

徐伟(1957—),男,浙江人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn).

个参数的分数阶导数 Jeffreys 模型来描述黄原胶和田菁胶,结果与实验数据吻合良好.李根国等^[9]构造了描述具有分数阶导数型本构关系粘弹性柱动力学行为的数学模型,并且给出了粘弹性柱运动稳定状态的存在条件.随后,采用分数阶导数模型,吴杰等^[10]分析了一个含有橡胶隔振器的单自由度振动系统时域响应,研究发现采用分数阶导数模型能更加准确地描述橡胶隔振器的动态特性.但是已有的轮胎动力学模型多是确定性的^[11-12],而现实中地震波具有一定随机性,采用随机动力学模型研究轮胎隔振系统更接近实际情况.

近些年来,不少学者一直致力于研究如何求解具有分数阶导数型阻尼的随机动力学系统. Agrawal^[13-15]结合 Laplace 变换和特征值展开法研究了具有分数阶导数阻尼的随机线性系统的解析随机响应, Ye 等^[16]利用 Fourier 变换法和 Duhamel 积分法研究了受到确定和随机激励下的具有分数阶粘弹阻尼的建筑结构响应. Huang 和 Jin^[17]运用随机平均法求解了 Gauss(高斯)白噪声激励下具有分数阶导数算子的强非线性系统方程,给出了不同参数对稳态概率密度的影响,并运用最大 Lyapunov(李雅普诺夫)指数法讨论了参数对系统稳定域的影响. Liu 等^[18]基于多尺度法得到了分数阶随机系统的一阶一致近似解的分析展开形式,并研究了随机混沌周期激励下轴线运动梁的动力学响应. Chen 等^[19-20]用广义谱和函数导出随机平均方程,研究了谱和与宽带噪声联合激励下的具有分数阶导数型阻尼的随机系统的动力学响应.

本文采用文献[17]中的随机平均法,其基本思想是先结合点接触模型与分数阶导数模型,建立了轮胎在 Kanai-Tajimi 噪声随机加速度激励下的振动微分方程.然后对运动方程进行无量纲化,并运用随机平均法理论,求解含分数阶阻尼轮胎动力学系统在随机激励下的位移的稳态概率密度、均值与方差,最后通过振动位移的这些数字特征分析材料的减振性能,解析结果与 Monte-Carlo 数值模拟的结果吻合得较好.

1 动力学方程的建立与预处理

如图 1 所示,首先将轮胎与地面的接触简化为垂直方向的点接触模型,然后结合基于分数阶导数的粘弹本构模型建立轮胎垂向振动的动力方程:

$$m\ddot{X}(\tau) + \mu D^\alpha X(\tau) + k_1 X(\tau) + k_2 X^3(\tau) = m\xi(\tau). \quad (1)$$

假设整车质量左右对称,质量分配系数约为 1,其中 m 是 1/4 车与轮胎质量, μ 是轮胎的阻尼系数, α 为导数阶次, k_1, k_2 是非线性刚度系数, $\xi(\tau)$ 是来自地面的随机加速度激励,在这里用 Kanai-Tajimi 噪声近似表示,其谱密度为^[21]

$$S(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0, \quad (2)$$

其中, S_0 是零均值白噪声的谱密度, ω 是噪声的频率, ω_g 和 ξ_g 分别是覆盖土层的特征频率和特征阻尼比. $D^\alpha X(t)$ 为分数阶阻尼,这里采用 Riemann-Liouville 定义^[17]:

$$D^\alpha X(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{X(\tau-t)}{t^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

对动力学方程(1)进行无量纲化^[22]

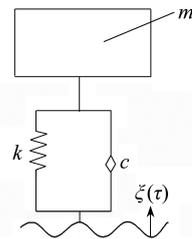


图 1 轮胎垂向振动的数学模型示意图

Fig.1 The mathematical model for tire vertical vibration

$$t = \omega_n \tau, \quad \omega_n^2 = \frac{k_1}{m}, \quad c = \frac{\mu}{k_1 \omega_n^\alpha}, \quad \beta = \frac{k_2}{k_1}, \quad (4)$$

得到新的动力学方程:

$$\ddot{X}(t) + cD^\alpha X(t) + X(t) + \beta X^3(t) = \zeta(t), \quad (5)$$

其中 $\zeta(t) = \xi(\tau)/\omega_n^2$, 其谱密度为

$$S'(\omega) = S(\omega)/\omega_n^3, \quad (6)$$

β 为刚度的非线性强度, 体现了系统刚度项非线性的强弱.

2 随机平均法求解动力学方程^[23]

为了求解动力学方程(5), 先将系统简化为一个无分数阶阻尼、无随机激励的系统, 其运动方程形式如下:

$$\ddot{X} + g(X) = 0, \quad (7)$$

其中 $g(X) = X + \beta X^3$, 对方程(7) 两边关于 X 积分, 得到势函数:

$$U(X) = \int_0^X g(u) du = \frac{1}{2} X^2 + \frac{\beta}{4} X^4. \quad (8)$$

假设系统(5) 在平衡点邻域 U_0 内有周期解族:

$$\begin{cases} X = A \cos \Theta(t), \\ \dot{X} = -A\nu(A, \Theta) \sin \Theta(t), \\ \Theta(t) = \Phi(t) + \Gamma(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中 A 是幅值, $\nu(A, \Theta)$ 是系统瞬时频率,

$$\nu(A, \Theta) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 3\beta A^2)(1 + \eta \cos(2\Theta))}, \quad (10)$$

$\eta = \beta A^2 / (4 + 3\beta A^2)$, 将 $\nu(A, \Theta)$ 进行 Fourier 展开, 得

$$\nu(A, \Theta) = b_0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(A) \cos(n\Theta). \quad (11)$$

对 ν 进行近似处理, 误差不大于 0.03%,

$$\nu = b_0 + b_2 \cos(2\Theta) + b_4 \cos(4\Theta) + b_6 \cos(6\Theta), \quad (12)$$

其中

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(A, \Theta) \cos(n\Theta) d\Theta, \quad n = 0, 2, 4, 6. \quad (13)$$

通过积分得出

$$\begin{cases} b_0 = \sqrt{4 + 3\beta A^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{32} \right), \\ b_2 = \sqrt{4 + 3\beta A^2} \left(\frac{\eta}{4} + \frac{\eta^3}{128} \right), \\ b_4 = \sqrt{4 + 3\beta A^2} \left(-\frac{\eta^2}{32} \right), \\ b_6 = \sqrt{4 + 3\beta A^2} \left(\frac{\eta^3}{128} \right). \end{cases} \quad (14)$$

对式(11) 中的 Θ 积分得到平均频率:

$$\omega(A) = b_0(A). \quad (15)$$

通过式(15),可得到以下近似式:

$$\Theta(t) \approx \omega(A)t + \Gamma(t). \quad (16)$$

式(9)中的第1式对 t 求导后减去第2式,得

$$\frac{dA}{dt} \cos \Theta(t) - \frac{d\Gamma}{dt} A \sin \Theta(t) = 0. \quad (17)$$

式(9)中的第2式对 t 求导后,得

$$\ddot{X}(t) = -\frac{g(A) - g(A \cos \Theta) \cos \Theta}{\nu A \sin \Theta} \cdot \frac{dA}{dt} - g(A \cos \Theta) - \frac{g(A \cos \Theta)}{\nu} \cdot \frac{d\Gamma}{dt}. \quad (18)$$

将式(18)代入动力学方程(5)中并联立式(17)可得

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = F_1(A, \Gamma) + G_1(A, \Gamma)\zeta(t), \\ \frac{d\Gamma}{dt} = F_2(A, \Gamma) + G_2(A, \Gamma)\zeta(t), \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\begin{cases} F_1 = \frac{c\nu A \sin \Theta}{g(A)} D^\alpha(A \cos \Theta), \quad G_1 = -\frac{\nu A \sin \Theta}{g(A)}, \\ F_2 = \frac{c\nu \cos \Theta}{g(A)} D^\alpha(A \cos \Theta), \quad G_2 = -\frac{\nu \cos \Theta}{g(A)}, \end{cases} \quad (20)$$

$\zeta(t)$ 为平稳宽带过程,基于 Stratonovich-Khasminskii 极限定理,当 $c \rightarrow 0$ 时,在 c^{-1} 量级时间区间上, $A(t), \Gamma(t)$ 弱收敛于二维扩散过程.鉴于关于 A 的平均 Itô 方程中不含 Γ ,该极限过程可以用 Itô 随机微分方程表示.因此,极限过程 $A(t)$ 为一维扩散过程,其平均 Itô 方程为

$$dA = m(A)dt + \sigma(A)dB(t). \quad (21)$$

则其漂移与扩散系数分别为

$$\begin{cases} m(A) = \left\langle F_1 + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial A} \Big|_t G_1 \Big|_t + \frac{\partial G_2}{\partial A} \Big|_t G_2 \Big|_t \right) R(\tau) d\tau \right\rangle_\Theta, \\ \sigma^2(A) = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} G_1 \Big|_t G_1 \Big|_{t+\tau} R(\tau) d\tau \right\rangle_\Theta, \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$R(\tau) = E[\zeta(t)\zeta(t+\tau)]. \quad (23)$$

由于 A, Γ 是慢变过程,结合式(15)、(16)可得

$$\Theta(t-\tau) \approx \Theta(t) - \omega(A)\tau. \quad (24)$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时,根据式(15)、(16)、(24)可推导 F_1 对 Θ 的平均:

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle_\Theta &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{c\nu A \sin \Theta}{g(A)} D^\alpha(A \cos \Theta) dt = \\ &= \frac{c}{g(A)\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left(\nu A \sin \Theta \int_0^t \frac{X(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \right) \Big|_0^T - \right. \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{X(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \right) \frac{d}{dt} (\nu \sin \Theta) dt \Big|_0^T \approx \\ &= \frac{-c}{g(A)\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A g(A \cos \Theta) \left[\cos \Theta \int_0^t \frac{\cos(\omega(A)\tau)}{\tau^\alpha} d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\sin \Theta \int_0^t \frac{\sin(\omega(A)\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \Big] dt. \quad (25)$$

在推导式(25)过程中, A 是慢变过程,所以在作积分时当常数处理.当 t 较大时,下述积分可渐进展开为

$$\begin{cases} \int_0^t \frac{\cos(\omega\tau)}{\tau^q} d\tau = \omega^{-(q-1)} \left(\Gamma(1-q) \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + \frac{\sin s}{s^q} + O(s^{-(q-1)}) \right), \\ \int_0^t \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau^q} d\tau = \omega^{-(q-1)} \left(\Gamma(1-q) \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) - \frac{\cos s}{s^q} + O(s^{-(q-1)}) \right). \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25),将其简化为

$$\langle F_1 \rangle_\Theta = \frac{-cA}{g(A)} \left[\frac{1}{2\pi\omega^{1-\alpha}} \int_0^{2\pi} g(A \cos \Theta) \left(\cos \Theta \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \sin \Theta \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) d\Theta \right]. \quad (27)$$

为了得到 $m(A)$, $\sigma^2(A)$ 的显式表达式,先将 G_1, G_2 展成 Fourier 级数:

$$G_1 = -\frac{1}{2(1+\beta A^2)} \left[(2b_0 - b_2) \sin \Theta + (b_2 - b_4) \sin(3\Theta) + (b_4 - b_6) \sin(5\Theta) + b_6 \sin(7\Theta) \right], \quad (28)$$

$$G_2 = -\frac{1}{2(1+\beta A^2)} \left[(2b_0 + b_2) \cos \Theta + (b_2 + b_4) \cos(3\Theta) + (b_4 + b_6) \cos(5\Theta) + b_6 \cos(7\Theta) \right]. \quad (29)$$

将式(27)、(28)、(29)代入式(22),计算出 $m(A)$, $\sigma^2(A)$:

$$\begin{aligned} m(A) &= -\frac{cA(4+3\beta A^2) \sin(\alpha\pi/2)}{8\omega^{1-\alpha}(1+\beta A^2)} + \\ &\frac{\pi}{8(1+\beta A^2)} \left[(2b_0 - b_2) S'(\omega) \frac{d}{dA} \left(\frac{2b_0 - b_2}{1+\beta A^2} \right) \right] + \\ &\frac{\pi}{8(1+\beta A^2)} \left[(b_2 - b_4) S'(3\omega) \frac{d}{dA} \left(\frac{b_2 - b_4}{1+\beta A^2} \right) + \right. \\ &\left. (b_4 - b_6) S'(5\omega) \frac{d}{dA} \left(\frac{b_4 - b_6}{1+\beta A^2} \right) \right] + \frac{\pi}{8(1+\beta A^2)} \left[b_6 S'(7\omega) \frac{d}{dA} \left(\frac{b_6}{1+\beta A^2} \right) \right] + \\ &\frac{\pi}{8A(1+\beta A^2)^2} \left[(2b_0 - b_2)(2b_0 + b_2) S'(\omega) \right] + \\ &\frac{\pi}{8A(1+\beta A^2)^2} \left[3(b_2 - b_4)(b_2 + b_4) S'(3\omega) \right] + \\ &\frac{\pi}{8A(1+\beta A^2)^2} \left[5(b_4 - b_6)(b_4 + b_6) S'(5\omega) \right] + \frac{\pi}{8A(1+\beta A^2)^2} \left[7b_6^2 S'(7\omega) \right], \\ \sigma^2(A) &= \frac{\pi}{4(1+\beta A^2)^2} \left[(2b_0 - b_2)^2 S'(\omega) + \right. \\ &\left. (b_2 - b_4)^2 S'(3\omega) + (b_4 - b_6)^2 S'(5\omega) + b_6^2 S'(7\omega) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

式中

$$S'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (31)$$

与式(21)对应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A}[m(A)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}[\sigma^2(A)p]. \quad (32)$$

式(32)的边界条件取决于平衡点区域 U_0 , 由于 $g(X)$ 在 $X > 0$ 是单调递增的, 其边界条件为

$$p \text{ is finite}, \quad A = 0, \quad (33)$$

$$p, \partial p / \partial A \rightarrow 0, \quad A \rightarrow \infty. \quad (34)$$

式(32)在式(33)、(34)条件下的平稳解为

$$p(A) = \frac{C}{\sigma^2(A)} \exp\left[\int_0^A \frac{2m(u)}{\sigma^2(u)} du\right], \quad (35)$$

其中 C 为归一化常数, 系统的 Hamilton 函数 $H = U(A)$ 的稳态概率密度为

$$p(H) = p(A) \left| \frac{dA}{dH} \right| = \frac{p(A)}{g(A)} \Big|_{A=U^{-1}(H)}, \quad (36)$$

U^{-1} 与 U 互为反函数. 位移与速度的稳态概率密度为

$$p(X, \dot{X}) = \frac{p(H)}{T(H)} \Big|_{H=\dot{X}^2/2+U(X)}, \quad (37)$$

其中 $T(H) = \frac{2\pi}{\omega(A)}$.

位移的稳态概率密度为

$$p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(X, \dot{X}) d\dot{X}. \quad (38)$$

位移的均值为

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} X p(X) dX. \quad (39)$$

位移的方差为

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)^2 p(X) dX. \quad (40)$$

3 结果分析及模拟验证

3.1 两类合成橡胶在随机激励下的减振性能

根据参考文献[24-25], 轮胎刚度系数 $k_1 = (E_0 S)/h$, 阻尼系数 $\mu = E_1/\omega_n$, 其中 E_0 为轮胎材料的储能模量, E_1 为耗散模量, S 为单位轮胎横截面积, h 为轮胎胎面厚度, ω_n 为系统的固有频率. Bagley, Torvik^[6] 利用最小二乘法拟合了聚丁二烯、丁基 B252 这两类合成橡胶的分数阶导数模型的参数(如表 1 所示), 取其它参数: $m = 400 \text{ kg}$, $\beta = 0.2$ (在本文中固定非线性强度), $S = 0.0008 \text{ m}^2$, $h = 0.02 \text{ m}$, ω_g 和 ξ_g 是覆盖土层的参数. 本文假设汽车在硬场地运行, 取: $\omega_g = 15.6 \text{ rad/s}$, $\xi_g = 0.64$, S_0 是基岩白噪声的谱密度, 反映了地震波的强弱程度. S_0 越大, 地震强度越大. 这里假设汽车仍能在路面上行驶, 所以取 $S_0 = 0.01$, $\omega = 1.0 \text{ Hz}$.

表 1 两类合成橡胶分数阶导数模型的参数

Table 1 Parameters of the fractional derivative model for the 2 kinds of synthetic rubbers

rubber	E_0 / Pa	E_1 / Pa	α
polybutadiene rubber	8.14×10^5	7.31×10^4	0.528
butyl B252 rubber	1.05×10^6	2.44×10^5	0.519

在低频范围内, 振动强度与位移成正比. 可以从位移的均值与方差考察振动的强度, 振动

位移均值越大,说明振动幅度越大,方差越大,振动位移的波动就越大,行车稳定性以及乘车舒适度也就越差.从图 2 中可以看出,以丁基 B252 橡胶为原材料的轮胎振动位移的概率密度峰值明显高于聚丁二烯橡胶,振动位移的概率密度在 0 处附近更集中,说明此时振动更容易发生在平衡点的小范围邻域内,振动的幅度更小.在表 2 中丁基 B252 橡胶的振动位移的均值和方差都小于聚丁二烯橡胶,进一步说明了丁基 B252 橡胶的减振性能明显优于聚丁二烯橡胶,这也从理论上定量地证明了丁基橡胶产品可以有效吸收振动能量.在工业生产中,丁基橡胶通常被用来制造轮胎内胎,聚丁二烯橡胶由于其良好的耐磨性通常被用来制造轮胎外胎,但其吸收振动能量的能力弱于丁基橡胶.

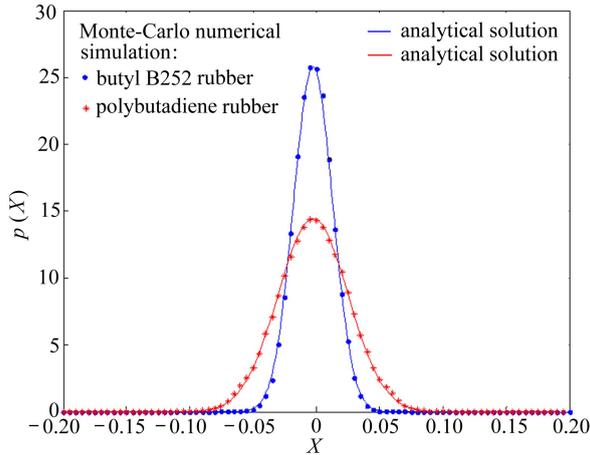


图 2 不同材料的轮胎振动位移的稳态概率密度

Fig.2 Stationary probability densities of vibration displacements of the 2 kinds of tires

表 2 轮胎的振动均值与方差

Table 2 Mean value and variance of the tire vibration

rubber	μ_X / m	σ_X^2 / m^2
polybutadiene rubber	$2.198 6 \times 10^{-2}$	$7.566 4 \times 10^{-4}$
butyl B252 rubber	$1.255 1 \times 10^{-2}$	$2.448 2 \times 10^{-4}$

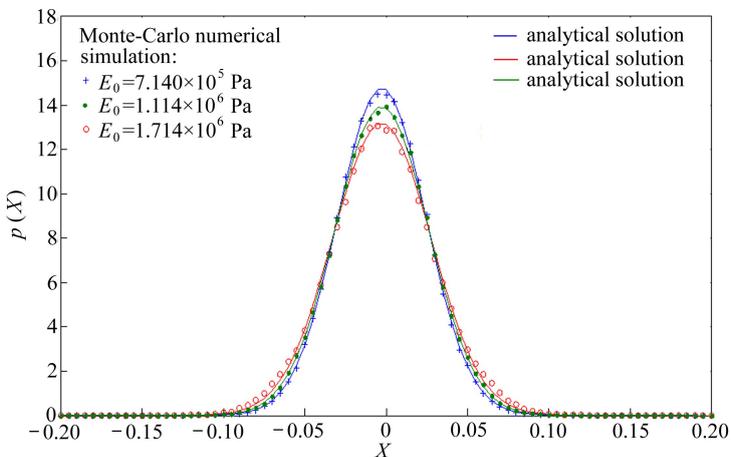


图 3 不同 E_0 下振动位移的稳态概率密度

Fig.3 Stationary probability densities of vibration displacements for the different values of E_0

3.2 不同参数对聚丁二烯橡胶减振性能的影响

从图3中可以看出当储能模量增大时,振动位移稳态概率密度的峰值变小.当 $E_0 = 7.14 \times 10^5$ Pa时,轮胎在 $-0.03 \sim 0.03$ m范围内振动的概率是73.35%,当 $E_0 = 11.14 \times 10^5$ Pa时,概率减小到70.53%,当 $E_0 = 17.14 \times 10^5$ Pa,概率降低到67.80%,说明随着储能模量的增大,振动发生在平衡点小范围邻域内的概率变小,反之发生大幅度振动的可能性变大,这样车辆的稳定性就降低了.图4、图5显示轮胎振动位移均值与方差随轮胎材料储能模量的增大而增大,此时振动强度也随之增大,说明材料的储能模量的增大将导致减振性能变差;从图6中可以看出,当耗散模量增大时,振动位移稳态概率密度的峰值变大.当 $E_1 = 6.31 \times 10^4$ Pa时,轮胎在 $-0.03 \sim 0.03$ m范围内振动的概率是68.99%,当 $E_1 = 7.31 \times 10^4$ Pa时,概率增大到72.52%,当 $E_1 = 8.31 \times 10^4$ Pa时,概率提升到75.55%,说明随着耗散模量的增大,轮胎更容易在平衡点的小范围邻域内振动,反之发生大幅度振动的可能性变小,这样车辆的稳定性就提高了.图7、图8则从均值与方差的角度验证了振动位移随耗散模量的增大而减小,同时,振动强度也减小.上述分析可以为轮胎材料的选择与制造提供一定的理论基础.

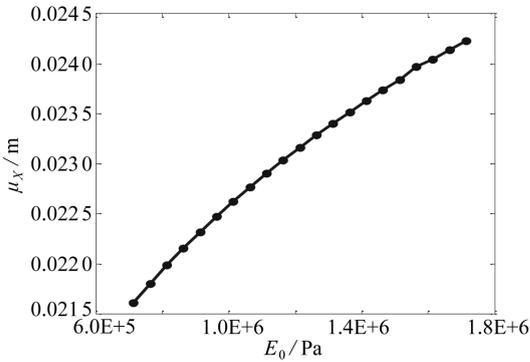


图4 μ_X 随 E_0 变化的曲线

Fig.4 The curve for μ_X vs. E_0

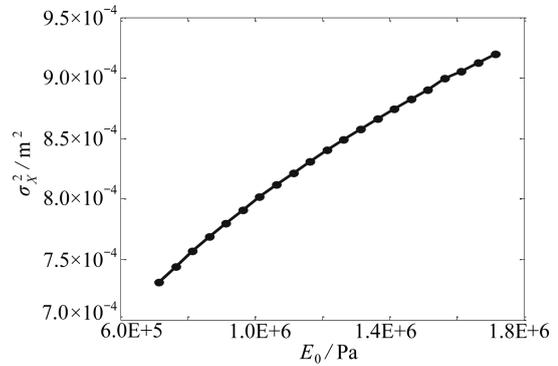


图5 σ_X^2 随 E_0 变化的曲线

Fig.5 The curve for σ_X^2 vs. E_0

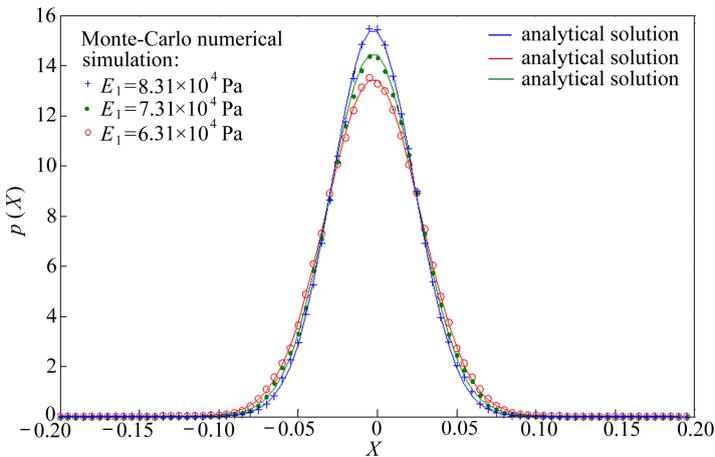
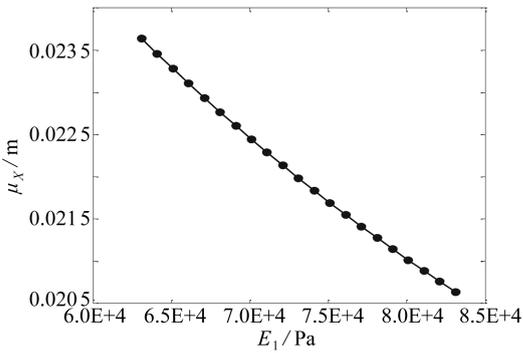
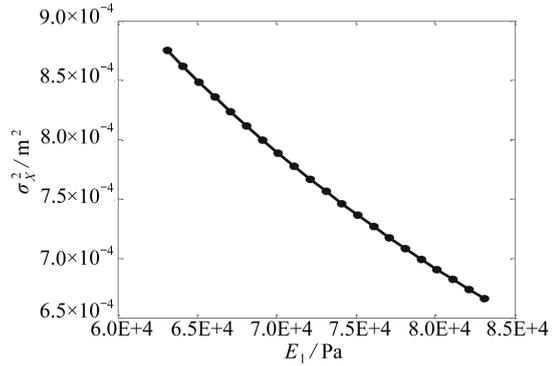


图6 不同 E_1 下振动位移的稳态概率密度

Fig.6 Stationary probability densities of vibration displacements for the different values of E_1

图7 μ_{χ} 随 E_1 变化的曲线Fig.7 The curve for μ_{χ} vs. E_1 图8 σ_{χ}^2 随 E_1 变化的曲线Fig.8 The curve for σ_{χ}^2 vs. E_1

4 结 论

本文基于随机平均法研究了 Kanai-Tajimi 噪声激励下含分数阶阻尼的轮胎动力学系统的响应,讨论了轮胎材料的储能模量与耗散模量对轮胎减振性能的影响.首先将地震波近似为 Kanai-Tajimi 噪声,结合点接触模型和分数阶导数模型建立轮胎垂向振动的微分方程.然后对动力学方程进行无量纲化,引入广义谐和函数,导出 FPK 方程的扩散系数与漂移系数,最后在边界条件下求解出位移的稳态概率密度,解析解与 Monte-Carlo 数值模拟的结果吻合得较好.在这里,本文采用了 Bagley 和 Torvik 通过实验数据得到的两种合成橡胶聚丁二烯橡胶和丁基 B252 橡胶的分数阶导数模型的参数.通过作图比较发现,丁基 B252 橡胶的减振性能明显优于聚丁二烯橡胶.现实中,聚丁二烯橡胶的耐磨性优于丁基 B252 橡胶,所以我们基于聚丁二烯橡胶,改变其储能模量与耗散模量,结果表明,当储能模量增大时,振动位移的均值与方差随之增大,此时,减振性能变差.相反,当增大耗散模量时,均值与方差变小,减振性能有所改善.上述结果能够为轮胎材料的选择与设计提供一定的理论基础.

参考文献 (References):

- [1] 陈清军, 袁伟泽, 曹丽雅. 长周期地震波作用下高层建筑结构的弹塑性动力响应分析[J]. 力学季刊, 2011, **32**(3): 404-410. (CHEN Qing-jun, YUAN Wei-ze, CAO Li-ya. Elasto-plastic dynamic response analysis of high rise structures under long period ground motion[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2011, **32**(3): 404-410. (in Chinese))
- [2] Roghaei M, Zabihollah A. An efficient and reliable structural health monitoring system for buildings after earthquake[J]. *APCBEE Procedia*, 2014, **9**: 309-316.
- [3] 张丙强. 竖向环境震动对人车路系统耦合震动的影响[J]. 动力学与控制学报, 2012, **10**(2): 186-191. (ZHANG Bing-qiang. Influence of vertical ambient vibration on the body-vehicle-road coupled vibrating system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, **10**(2): 186-191. (in Chinese))
- [4] 张丙强. 地震作用对车辆-道路系统耦合震动的影响[J]. 河南理工大学学报, 2012, **31**(6): 728-733. (ZHANG Bing-qiang. Influence of seismic on the coupled vibration of vehicle-road system [J]. *Journal of Henan Polytechnic University*, 2012, **31**(6): 728-733. (in Chinese))
- [5] 周光泉, 刘孝敏. 粘弹性理论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1996. (ZHOU Guang-quan, LIU Xiao-min. *Viscoelastic Theory*[M]. Hefei: University of Science and Technology of China

- Press, 1996.(in Chinese))
- [6] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. *Journal of Rheology*, 1983, **27**(3): 201-210.
- [7] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures[J]. *AIAA Journal*, 1983, **21**(5): 741-748.
- [8] Song D Y, Jiang T Q. Study on the constitutive equation with fractional derivative for the viscoelastic fluids-modified Jeffreys model and its application[J]. *Rheologica Acta*, 1998, **37**(5): 512-517.
- [9] 李根国, 朱正佑, 程昌钧. 具有分数导数型本构关系的粘弹性柱的动力稳定性[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(3): 250-258.(LI Gen-guo, ZHU Zheng-you, CHENG Chang-jun. Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(3): 250-258.(in Chinese))
- [10] 吴杰, 上官文斌. 采用粘弹性分数导数模型的橡胶隔振器动态特性的建模及应用[J]. 工程力学, 2008, **25**(1): 161-166.(WU Jie, SHANGGUAN Wen-bin. Modeling and applications of dynamic characteristics for rubber isolators using viscoelastic fractional[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(1): 161-166.(in Chinese))
- [11] 周超, 吴庆鸣, 张强. 粘弹性阻尼隔振体的非线性振动分析[J]. 工程设计学报, 2009, **16**(3): 205-208.(ZHOU Chao, WU Qing-wu, ZHANG Qiang. Nonlinear vibration analysis of viscoelastic isolator[J]. *Chinese Journal of Engineering Design*, 2009, **16**(3): 205-208.(in Chinese))
- [12] Adhikari S. Damping models for structural vibration[D]. PhD Thesis. Cambridge: University of Cambridge, 2000: 75-78.
- [13] Agrawal O P. Analytical solution for stochastic response of a fractionally damped beam[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2004, **126**(4): 561-566.
- [14] Agrawal O P. Stochastic analysis of a 1-D system with fractional damping of order 1/2[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, **124**(3): 454-460.
- [15] Agrawal O P. Stochastic analysis of dynamic systems containing fractional derivatives[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **247**(5): 927-938.
- [16] Ye K, Li L, Tang J. Stochastic seismic response of structures with added viscoelastic dampers modeled by fractional derivative[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2003, **2**(1): 133-139.
- [17] Huang Z L, Jin X L. Response and stability of a SDOF strongly nonlinear stochastic system with light damping modeled by a fractional derivative[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **319**(3/5): 1121-1135.
- [18] Liu D, Xu W, Xu Y. Dynamic responses of axially moving viscoelastic beam under a randomly disordered periodic excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(17): 4045-4056.
- [19] Chen L C, Wang W H, Li Z S, Zhu W Q. Stationary response of Duffing oscillator with hardening stiffness and fractional derivative[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, **48**: 44-50.
- [20] 陈林聪, 朱位秋. 谐和与宽带噪声联合激励下含分数导数型阻尼的 Duffing 振子的平稳响应[J]. 应用力学学报, 2010, **3**(27): 517-521.(CHEN Lin-cong, ZHU Wei-qiu. Stationary response of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and wide band noise excitations[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2010, **3**(27): 517-521.(in Chinese))

- [21] 张菊辉. 有关 Kanai-Tajimi 模型的统计特征分析[J]. 世界地震工程, 2007, **23**(1): 156-160. (ZHANG Ju-hui. Statistical properties analysis of Kainai-Tajimi model[J]. *World Earthquake Engineering*, 2007, **23**(1): 156-160. (in Chinese))
- [22] 宦荣华, 潘国峰, 金伟良, 朱位秋. 计及列车车体随机振动影响时受电弓的随机动力响应[J]. 铁道学报, 2010, **32**(3): 39-42. (HUAN Rong-hua, PAN Guo-feng, JIN Wei-liang, ZHU Wei-qiu. Stochastic response of pantograph under action of car body random vibration[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2010, **32**(3): 39-42. (in Chinese))
- [23] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Wei-qiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control-Hamilton Theoretical System Framework*[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [24] 王吉忠, 庄继德. 轮胎胎面单元表观刚度计算[J]. 农业工程学报, 2000, **16**(2): 28-31. (WANG Ji-zhong, ZHUANG Ji-de. Calculation of the apparent stiffness of tyre tread[J]. *Transaction of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2000, **16**(2): 28-31. (in Chinese))
- [25] 梁超锋, 欧进萍. 结构阻尼与材料阻尼的关系[J]. 地震工程与工程振动, 2006, **26**(1): 49-55. (LIANG Chao-feng, OU Jin-pin. Relationship between structural damping and material damping[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2006, **26**(1): 49-55. (in Chinese))

Vibration Responses of Rubber Tires With Fractional Damping Under Stochastic Excitation

FAN Yuan-qin, XU Wei, HAN Qun, YANG Yong-ge

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P.R.China)

Abstract: The vertical dynamic responses of rubber tires with fractional damping under the Kanai-Tajimi noise excitation were investigated with the stochastic averaging method. Firstly, the earthquake wave was approximated with the Kanai-Tajimi noise, and the differential equation for tire vibration was established through combination of the point contact model with the fractional derivative model. Then, the stochastic averaging method was used to solve the stationary probability density analytically. In turn, validity of the proposed method was verified against the Monte-Carlo numerical simulation results. The probability density was applied to determine the mean values and variances of vibration displacements of the 2 kinds of tires made of polybutadiene and butyl B252 rubbers, respectively. The results show that the mean value and variance of vibration displacement increase with the rubber's storage modulus and decrease with its dissipation modulus. That means, the lower the rubber's storage modulus is or the higher its dissipation modulus is, the better the vibration damping effect of the resulting tire will be. The work provides a theoretical reference for the design and manufacture of rubber tires.

Key words: fractional damping; rubber material; stochastic averaging method; viscoelastic material

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172233;11302169)